Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2013-08-28

DAG: Onsdag 28 augusti 2013 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Andreas Matrinsson, tel: 0703-088304
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 18 september, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

Betrakta matisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & -5 \end{bmatrix}$.

a) Gör en LU-faktorisering (utan pivotering) av matrisen. **(3p)**
b) Bestäm en bas för radrummet till A, $Row(A)$. **(2p)**
c) Bestäm en bas för kolonnrummet till A, $V(A)$. **(2p)**
d) Bestäm en bas för nollrummet till A, $N(A)$. **(2p)**

Uppgift 2.

a) Definiera vad som menas med en symmetrisk och positivt definit matris. **(2p)**
b) Visa att om A är symmetrisk och positivt definit så är inversen till A också symmetrisk och positivt definit. **(3p)**
c) Låt A vara en symmetrisk $m \times m$-matris med k olika positiva egenvärden. Visa att A är positivt definit på ett underrum till R^m av dimensionen k. **(4p)**

Uppgift 3.

a) Låt T vara en linjär avbildning från R^n till R^n. Anta att mängden $\{u_i\}_{i=1}^m$ är linjärt beroende i R^n. Visa att mängden $\{T(u_i)\}_{i=1}^m$ är linjärt beroende i R^n. **(3p)**

b) Den linjära avbildningen $T: \ R^3 \to R^3$ avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen för R^3. **(3p)**

Uppgift 4.

Betrakta det linjära rummet V av styckvis kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$ och underrummet $F_2 = Span\{1, \ \cos t, \ \cos 2t, \ \sin t, \ \sin 2t\}$ med de angivna funktionerna som bas.

a) Bestäm matrisen för avbildningen $D : F_2 \to F_2$, som definieras av $D(f) = f'$ (derivering). **(2p)**

b) Bestäm bästa approximation av $f = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < t < 3\pi/2 \\ -1, & 3\pi/2 \le t \le 2\pi \end{cases}$ i underrummet F_2 med avseende på skalärprodukten $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t) \ dt$. **(4p)**

Uppgift 5.

Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$ i tre punkter.

t	-1	0	2
f	2	1	-2

a) Bestäm en approximation till $\int_{-1}^{2} f(t) \ dt$ med trapetsformeln. **(2p)**

b) Bestäm interpolationspolynomet genom de tre punkterna. **(2p)**

c) Bestäm en *kvadratisk* spline $s(x)$ som interpolerar f i de tre punkterna och som uppfyller $s'(2) = 0$. **(3p)**

Uppgift 6.

a) Gör en iteration med *Newtons metod* med start i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på det icke-linjära ekvationssystemet: $\left\{ \begin{array}{r} 2x_1^3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 + 3x_2 = 1 \end{array} \right.$. **(3p)**

b) En numerisk metod har räknat fram approximationen $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}$.
Gör en rimligt approximativ feluppskattning för approximationen. **(2p)**

c) Systemet i a) kan skrivas $x = g(x)$ med $g(x) = \begin{bmatrix} \frac{2x_1^3}{x_2} \\ \\ \frac{1-x_1^2}{3} \end{bmatrix}$.
Undersök om *fixpunktsiteration* baserad på denna omskrivning konvergerar. Använd approximationen från b)-uppgiften i testet. **(2p)**.

Uppgift 7.
a) Härled Gauss-Newtons metod för att lösa ett icke-linjärt minstakvadratproblem. **(3p)**
b) Betrakta den olinjära modellen $\Psi(x,t) = x_1 t + \sin(x_2 \frac{\pi}{2} t) + \cos(x_3 \frac{\pi}{2} t)$ som vi önskar anpassa till mättabellen

t	1	2	3	4
Ψ	1	0	-1	0

i minsta-kvadrat-mening. Teckna Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Ange explicit hur residual och Jacobian ser ut i första iterationen om du startar i $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$. Iterationssteget behöver inte utföras (beräknas). **(3p)**
c) Det linjära ekvationssystemet som löses i Gauss-Newtons metod är överbestämt. Om systemet är illa konditionerat, vilken metod skulle du i allmänhet rekommendera för lösning av systemet? Varför är normalekvationerna olämpliga? **(2p)**

Uppgift 8.
a) Bestäm approximationsordning och stabilitetsvillkor för Trapetsmetoden. **(4p)**
b) Gör ett steg med Trapetsmetoden på systemet
$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) = -x_1(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t), & x_2(0) = 1 \end{array} \right.$$
från begynnelsepunkten med steget $h = 0.2$. **(2p)**
c) Avgör om problemet i b)-uppgiften kan lösas med den analytiska diagonaliseringsmetoden. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 28 augusti 2013

1a) LU-faktorisering görs som Gausselimination för att få U, L bestäms samtidigt utifrån regeln att samma operationer som gör A till U ska göra L till I: $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & -5 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 10 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$. L blir enligt regeln $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.
1b) Radrummet är oförändrat i G-eliminationen så radrummet spänns av de två första raderna i U. En bas för $Row(A)$ är $\{\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}\}$.
1c) Vi ser att de två första kolonnerna i Gauss-elimineringen är pivot-kolonner, då spänns kolonnrummet av de två första kolonnerna i ursprungsmatrisen,
dvs $\{\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -4 & -9 & -4 \end{bmatrix}^T\}$ är bas för kolonnrummet.
1d) Homogena systemet med den uppåt triangulära matrisen U (från a)-uppgiften) har parameter-lösningen
$x = s\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + t\begin{bmatrix} 4/3 & 5/3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$,
så bas för nollrummet är $\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T\}$.

2a) A är symmetrisk om $A^T = A$. A är positivt definit om $x^T Ax \geq 0, \ \ \forall x$ och $x^T Ax = 0$ bara om $x = 0$.
2b) Det följer att $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, alltså inversen symmetrisk. Eftersom A är inverterbar så finns för varje y ett x så att $y = Ax$ och $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Då gäller för godtyckligt y att $y^T A^{-1} y = (Ax)^T A^{-1} Ax = x^T AA^{-1} Ax = x^T Ax \geq 0$ (eftersom A är positivt definit). Vidare blir $y^T A^{-1} y = 0$ endast om $y = x = 0$ så A^{-1} är positivt definit.
2c) A är symmetrisk så det finns ortogonala egenvektorer $v_1, \ v_2, \ \ldots \ , \ v_k$ till de k egenvärdena $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ , \ \lambda_k$. Låt $x \in Span\{v_i\}_{i=1}^k$. Då gäller $x = \sum_{i=1}^k c_i v_i$ för skalärer c_i och $x^T Ax = (\sum_{i=1}^k c_i v_i)^T A \sum_{j=1}^k c_j v_j = \sum_{i=1}^k c_i v_i^T \sum_{j=1}^k c_j \lambda_j v_j = \sum_{i=1}^k c_i^2 v_i^T \lambda_i v_i > 0$ Här har vi använt att λ_i är positiva egenvärden, att egenvektorerna är ortogonala och att $c_i \neq 0$ för något i om $x \neq 0$.

3a) $\{u_i\}_{i=1}^m$ linjärt beroende innebär att det finns $c_i \in R, \ i = 1, \ \ldots \ , \ m$, inte alla $= 0$ så att $\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$. T är linjär så $T(\sum_{i=1}^m c_i u_i) = 0$ och $T(\sum_{i=1}^m c_i u_i) = \sum_{i=1}^m c_i T(u_i)$. Alltså är $\sum_{i=1}^m c_i T(u_i) = 0$, inte alla $c_i = 0$, vilket innebör att $\{T(u_i)\}_{i=1}^m$ är linjärt beroende.
3b) Matrisen är $A = [T(e_i) \ \ T(e_2) \ \ T(e_3)]$ där $\{e_1 \ \ e_2 \ \ e_3\}$ är standardbasen. Låt nu $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då gäller $e_1 = \frac{1}{2} v_2, \quad T(e_1) = \frac{1}{2} T(v_2) =$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = v_1 - \frac{1}{2}v_2$, $T(e_2) = T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = v_3 - v_1$, $T(e_3) = T(v_3) - T(v_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Matrisen blir alltså $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4a) Avbildningen på baselementen ger:
$D(1) = 0$, $D(\cos t) = -\sin t$, $D(\cos 2t) = -2\sin 2t$, $D(\sin t) = \cos t$, $D(\sin 2t) = 2\cos 2t$. Avläsning av koordinaterna för dessa element i aktuell bas ger matrisens kolonner. Vi får $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4b) Fourierserieapproximation. Approximationen skrivs $\hat{f} = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t$. Fourierkoefficienterna beräknas: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\, dt = 0$, $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \cos t\, dt = 0$, $a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \cos 2t\, dt = 0$, $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \sin t\, dt = \frac{2}{\pi}$, $b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \sin 2t\, dt = \frac{2}{\pi}$. Approximationen blir alltså $\hat{f} = \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{\pi}\sin 2t$.

5a) Integralen approximeras med $0.5(f(-1) + f(0)) + 1(f(0) + f(2)) = 3/2 - 1 = 1/2$
5b) Ansätt polynomet som $p(t) = c_0 + c_1(t+1) + c_2(t+1)t$.
Bestäm koefficienterna successivt genom att sätta in interpolationsvillkoren:
$p(-1) = 2 \Rightarrow c_0 = 2$
$p(0) = 1 \Rightarrow 2 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = -1$
$p(2) = -2 \Rightarrow 2 - 3 + 6c_2 = -2 \Rightarrow c_2 = -1/6$
Interpolationspolynomet blir $p(t) = 2 - (t+1) - 1/6(t+1)t$
5c) Splinen har två delar: $s_1(t),\ -1 \le t \le 0,\ \ s_2(t),\ 0 \le t \le 2$.
Börja med s_2 eftersom ändpunktsvillkoret är till höger. Ansätt $s_2 = -2 + a(t-2) + b(t-2)^2$ (så att villkoret $s_1(2) = -2$ gäller) med $s_2' = a + 2b(t-2)$. Villkoret $s_2'(2) = 0$ ger $a = 0$ och villkoret $s_2(0) = 1$ ger så $b = 3/4$.
Vi har alltså bestämt $s_2(t) = -2 + 3/4(t-2)^2$ med $s_2'(0) = -3$.
Ansätt vidare $s_1 = 1 + ct + dt^2$ (så att villkoret $s_1(0) = 1$ gäller) med $s_1' = c + 2dt$. Splinevillkoret $s_2'(0) = -3$ ger $c = -3$ och villkor $s_1(-1) = 2$ ger så $d = -2$.
Vi har alltså bestämt $s_1 = 1 - 3t - 2t^2$.

6a) Vi skriver ekvationssystemet som $f(x)=0$, där $f(x)=\begin{bmatrix} 2x_1^3 - x_1x_2 \\ x_1^2+3x_2-1 \end{bmatrix}$. Jacobianen beräknas till $J(x)=\begin{bmatrix} 6x_1^2-x_2 & -x_1 \\ 2x_1 & 3 \end{bmatrix}$.
I startpunkten $x_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ blir $f_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $J_0=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet $J_0s_0=-f_0$ har lösningen $s_0=\begin{bmatrix} -6/17 \\ -13/17 \end{bmatrix}$ och första iterationen blir $x_1=x_0+s_0=\begin{bmatrix} 11/17 \\ 4/17 \end{bmatrix}$.

6b) I den erhållna approximationen $\hat{x}=\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ gäller $f(\hat{x})=\begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.06 \end{bmatrix}$, $J(\hat{x})=\begin{bmatrix} 0.66 & -0.4 \\ 0.8 & 3 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet $J(\hat{x})s=-f(\hat{x})$ har lösningen $s\approx-[0.02\ \ 0.015]^T$ och feluppskattningen blir $\|\hat{x}-x^*\|_\infty \lesssim \|s\|_\infty \approx 0.02$.

6c) Jacobianen till $g(x)$ är $G(x)=\begin{bmatrix} \frac{6x_1^2}{x_2} & -\frac{2x_1^3}{x_2^2} \\ \frac{-2x_1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ och i approximationen $\hat{x}$ får vi $G(\hat{x})=\begin{bmatrix} 32/10 & -64/45 \\ -4/15 & 0 \end{bmatrix}$ med $\|G(\hat{x})\|_\infty \approx 4.6$ så metoden konvergerar inte. Kravet är att normen för G ska vara strikt mindre än 1 nära lösningen (och att man startar i en omgivning där detta gäller).

7a) Se kompendiet eller föreläsningsanteckningar.
7b) Låt $f_i=\Psi(x,t_i)-\Psi_i$ vara residualerna där Ψ_i är uppmätt värde i tid t_i enligt tabellen.

Vi får då $f=\begin{bmatrix} x_1+\sin(\frac{\pi}{2}x_2)+\cos(\frac{\pi}{2}x_3)-1 \\ 2x_1+\sin(\pi x_2)+\cos(\pi x_3) \\ 3x_1+\sin(\frac{3\pi}{2}x_2)+\cos(\frac{3\pi}{2}x_3)+1 \\ 4x_1+\sin(2\pi x_2)+\cos(2\pi x_3) \end{bmatrix}$.

Jacobianen blir $J=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x_2) & -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x_3) \\ 2 & \pi\cos(\pi x_2) & -\pi\sin(\pi x_3) \\ 3 & \frac{3\pi}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}x_2) & -\frac{3\pi}{2}\sin(\frac{3\pi}{2}x_3) \\ 4 & 2\pi\cos(2\pi x_2) & -2\pi\sin(2\pi x_3) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newtons metod skrivs: $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+s_k \\ J(x_k)s_k=-f(x_k) \end{cases}$

Med start i $x_0=[1\ 1\ 1]^T$ blir $f(x_0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $J(x_0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\pi/2 \\ 2 & -\pi & 0 \\ 3 & 0 & 3\pi/2 \\ 4 & 2\pi & 0 \end{bmatrix}$.

7c) QR-faktorisering blir bra. Normalekvationerna blir illa konditionerade ty konditionstalet kvadreras.

8a) Se kompendiet eller föreläsningarna.
8b) Vi skriver om problemet på systemform $x' = Ax$ med matris:
$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
Trapetsmetoden kan då skrivas: $(I - \frac{h}{2}A)x_{i+1} = (I + \frac{h}{2}A)x_i,\ i = 0,\ 1,\ ....$ Med givet A och $h = 0.2$ blir första steget: $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ -0.1 & 1.1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ekvationssytemet löses och ger $x_1 = \begin{bmatrix} 0.9/1.1 \\ 1.19/1.21 \end{bmatrix}$.
8c) Metoden fungerar inte ty matrisen A har egenvärde -1 med algebraisk multiplicitet 2. Egenvektorsrummet är $Span\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}$ och är alltså av dimension 1. Egenvärdets geometriska multiplicitet är då 1. Egenvärdet är alltså defekt och metoden fungerar inte.