Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2013-05-31

DAG: Fredag 31 maj 2013 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 25 juni, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

Betrakta matisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en bas för nollrummet till A, $N(A)$. **(2p)**
b) Bestäm rangen för A, $rang(A)$. **(1p)**
c) Visa att den kvadratiska formen $x^T Ax$ är positivt definit på ett underrum till R^4 av dimension 2. **(4p)**
d) Bestäm största och minsta värde för den kvadratiska formen $q(x) = x^T Ax$ då $\|x\| = 3$, dels på hela R^4, dels på underrummet i c)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 2.
Betrakta matriserna $H_1 = I - 2u_1u_1^T$ och $H_2 = I - 2u_2u_2^T$, där $u_1 \in R^n$ och $u_2 \in R^n$ är ortonormala vektorer.
a) Visa att produktmatrisen H_1H_2 är ortogonal. **(2p)**
b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till produktmatrisen H_1H_2. **(3p)**
c) Bestäm, för $n = 4$, u_1 så att H_1 utför första steget i en kompakt QR-faktorisering med

Householdertransformation av matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Gör första steget med hjälp av den erhållna vektorn u_1. **(3p)**

Uppgift 3.

a) Låt U vara ett linjärt underrum till ett linjärt rum V och låt $u \in V$. Visa att om det för en vektor $u' \in U$ gäller att $u - u' \in U^{\perp}$ (ortogonala komplementet till U) så gäller $\|u - u'\| \leq \|u - w\|$ för alla $w \in U$, (där $\| \cdot \|$ är den norm som ges av skalärprodukten), dvs u' är bästa approximation av u i U. **(3p)**

b) Betrakta funktionen $f(t) = t^3 - t^4$ på intervallet $[0,\ 1]$. Vi vill bestämma bästa approximation till f i underrummet P_2 (mängden av polynom av grad ≤ 2) med avseende på skalärprodukten $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$. Använd standardbasen för P_2 och sätt upp det linjära ekvationssystem som ska lösas för att få fram approximationen. Systemet behöver inte lösas. **(4p)**

Uppgift 4.

a) Lös följande system av differentialekvationer med *diagonaliseringsmetoden*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t), & x_2(0) = 2 \end{cases}.\ \textbf{(3p)}$$

b) Lös problemet med första ekvationen ändrad till $x_1'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + e^{2t}$. **(2p)**

c) Vilken egenskap hos egenvärdena gör att metoden inte fungerar om andra ekvationen ändras till $x_2'(t) = 3x_2(t)$? **(1p)**

Uppgift 5.

a) Definiera vad som menas med att ett problem är stabilt. **(1p)**

b) Definiera vad som menas med att en algoritm är stabil. **(1p)**

c) Förklara varför residualen inte är ett bra mått på felet i x, som beror på fel i högerledet b, vid lösning av ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$ med Gausselimination. **(2p)**

d) Undersök med bakåtanalys om algoritmen $f = x \cdot y$ (multiplikation) är stabil i ett IEEE-system. Ta hänsyn till att x och y måste lagras i flyttalssystemet. **(3p)**

Uppgift 6.

a) Gör en iteration med *Newtons metod* med start i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på det icke-linjära ekvationssystemet: $\begin{cases} 3x_1^2 + 2x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 + 2x_2 = 1 \end{cases}$. **(3p)**

b) En numerisk metod har räknat fram approximationen $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$. Gör en rimligt approximativ feluppskattning för approximationen. **(2p)**

c) Systemet i a) kan skrivas $x = g(x)$ med $g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{3x_1^2}{2x_2} \\ \frac{1-x_1^2}{2} \end{bmatrix}$. Undersök om *fixpunktsiteration* baserad på denna omskrivning konvergerar (vid start nära lösningen). **(2p)**.

Uppgift 7.

a) Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^3 - x_2$ utan bivillkor. Gör en iteration med Steepest Descent-metoden, med start i origo och *exakt* linjesökning. **(4p)**
Ledning. Inför en funktion $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha s_0)$.

b) För problemet i a)-uppgiften, gör *approximativ* linjesökning med polynomapproximation. Använd interpolation med andragradspolynom i punkterna $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ och $\alpha = 1$. Använd ledningen i a)-uppgiften. **(3p)**

Uppgift 8.

Betrakta prediktor/korrektorparet Eulers framåtmetod som prediktor och Eulers bakåtmetod som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.

a) Anta att man gör *två* fixpunktsiterationer i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(3p)**

b) Bestäm approximationsordning och stabilitetsområde för metoden i a-uppgiften. **(3p)**

c) Betrakta följande andra ordningens differentialekvation med begynnelsevärden:

$$\begin{cases} y'' = y^2 - ay' - y, \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0.5 \end{cases}$$

Här är a en parameter som beror på lösningen enligt $a = y'(1) - 2y(1)$. Formulera problemet med inskjutningsteknik, ange den ekvation som ska lösas för att få fram a samt teckna sekantmetoden för att lösa den ekvationen. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 31 maj 2013

1a) Nollrummet bestäms genom att lösa det homogena linjära ekvationssystemet $Ax = 0$. Detta görs på standardvis med Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Homogena systemet med denna uppåt triangulära matris har parameter-lösningen $x = t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, så bas för nollrummet är $\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$.

1b) Enligt a)-uppgiften är dimensionen för nollrummet 1. Enligt dimensionssatsen är dimensionen för kolonnrummet 4-1=3 (antal kolonner minus dimensionen för nollrummet). Rangen är dimensionen på värderummet och rangen är alltså 3.

1c) Vi börjar med att beräkna egenvärdena. Matrisen är block-diagonal. Vi beräknar enkelt, på standardsätt, egenvärdena till de två 2×2-blocken.
Vi får $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -4$.
Låt nu v_1 och v_2 vara egenvektorerna som hör till de positiva egenvärdena λ_1 och λ_2 till den symmetriska matrisen. Enligt spektralsatsen kan v_1 och v_2 väljas ortonormala. Vi visar att den kvadratiska formen är positivt definit på det tvådimensionella underrummet som spänns av v_1 och v_2. Låt $x = \alpha v_1 + \beta v_2$. Då är $Ax = \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2$ och $x^T Ax = (\alpha v_1^T + \beta v_2^T)(\alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2) = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 > 0$ v.s.v.

1d) Största värde på kvadratiska formen är $\lambda_{max}\|x\|^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot 9$. Minsta värde är $\lambda_{min}\|x\|^2 = -4 \cdot 9 = -36$. På underrummet gäller att den kvadratiska formens största värde är $\lambda_1\|x\|^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot 9$ och minsta värde är $\lambda_2\|x\|^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot 9$.

2a) Beteckna produkten av matriserna H, då är $H = H_1H_2 = (I - 2u_1u_1^T)(I - 2u_2u_2^T) = I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T + 4u_1u_1^Tu_2u_2^T = I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T$ ty $u_1^Tu_2 = 0$. H är ortogonal ty $H^TH = (I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T)(I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T) = I - 2u_1u_1^T - 2u_2u_2^T - 2u_1u_1^T + 4u_1u_1^T - 2u_2u_2^T + 4u_2u_2^T = I$. v.s.v.

2b) Mängden av de givna vektorerna $\{u_1,\ u_2\}$ kan byggas ut till en ON-mängd $\{u_i\}_{i=1}^n$ i R^n. Nu gäller $Hu_1 = u_1 - 2u_1u_1^Tu_1 - 2u_2u_2^Tu_1 = -u_1$, dvs. u_1 är en egenvektor med egenvärde -1. På samma sätt är $Hu_2 = u_2 - 2u_1u_1^Tu_2 - 2u_2u_2^Tu_2 = -u_2$, dvs. u_2 är egenvektor med egenvärde -1. Slutligen gäller för alla de andra u_j att $Hu_j = u_j - 2u_1u_1^Tu_j - 2u_2u_2^Tu_j = u_j$, dvs $Span\{u_j\}_{j=3}^n$ är egenvektorer med egenvärde 1.

2c) Låt $\hat{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. Den andra kolonnen blir då $H_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 25 \frac{1}{25 \cdot 2} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och den tredje kolonnen blir på samma sätt $H_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 25 \frac{1}{25 \cdot 2} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Första steget i QR-faktoriseringen är klar: $H_1 A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3a) Se kompendiet, bevis av Sats 2.6, första delen.

3b) Bästa approximation innebär att felet ska vara ortogonalt mot underrummet P_2, dvs mot alla baselementen i P_2, där vi har valt standardbasen. Om $\hat{f}$ är bästa approximation så ska det alltså gälla att:

$< f - \hat{f},\ 1 >= 0, \quad < f - \hat{f},\ t >= 0, \quad < f - \hat{f},\ t^2 >= 0.$

Om vi ansätter $\hat{f} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ så får vi ett linjärt ekvationssystem för att bestämma $c_0,\ c_1$ och c_2:

$$\begin{bmatrix} < 1,\ 1 > & < t,\ 1 > & < t^2,\ 1 > \\ < 1,\ t > & < t,\ t > & < t^2,\ t > \\ < 1,\ t^2 > & < t,\ t^2 > & < t^2,\ t^2 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f,\ 1 > \\ < f,\ t > \\ < f,\ t^2 > \end{bmatrix}.$$

Med uträknade integraler får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 - 1/5 \\ 1/5 - 1/6 \\ 1/6 - 1/7 \end{bmatrix}. \text{ (Hilbertmatrisen)}$$

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$.

Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = [1, 1]^T,\ v_2 = [1, 2]^T$.

Lösningsformeln är sedan

$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 2,\ c_2 = 0$, dvs. $x = 2e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Med variabeltransformationen $x = Tz$, där $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ är egenvektorsmatrisen, får vi diagonaliserat problem $z' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} z + T^{-1} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$. Med ansatsen $z_1 = c_1 e^t + \alpha e^{2t},\ \ z_2 = c_2 e^{-t} + \beta e^{2t}$ kan $\alpha = 2,\ \beta = -\frac{1}{3}$ bestämmas. Den återtransformerade lösningen blir $x = Tz = x = \begin{bmatrix} c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2t} \\ c_1e^t + 2c_2e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} \end{bmatrix}$. Med begynnelsevärdena bestäms koefficienterna på samma sätt som i a)-uppgiften. Lösningen blir $c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{3}$ och $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2tr} \\ \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{2t} \end{bmatrix}$.

4c) Ett egenvärde $\lambda = 3$ är defekt, algrebraisk multiplicitet är 2 men geometrisk multiplicitet är 1.

5a) Ett problem är stabilt om små förändringar i indata ger små förändringar i utdata, dvs om konditionstalet är litet.

5b) En algoritm är stabil om den ger exakt lösning till aktuellt problem med lite ändrade indata, dvs om bakåtfelet är litet.

5c) Låt $\hat{b}$ vara det approximativa högerledet. Då gäller $x = A^{-1}b$ och $\hat{x} = A^{-1}\hat{b}$, där $\hat{x}$ är exakt lösning motsvarande $\hat{b}$. Residualen är $\|b - A\hat{x}\| = \|b - \hat{b}\|$ och den är alltså ett mått på bakåtfelet. Dess storlek säger inget om felet i x utan den är alltid liten därför att Gausselimination är en stabil algoritm.

5d) Lagringen i systemet ger $fl(x) = x(1+\delta_1)$ och $fl(y) = y(1+\delta_2)$. Multiplikationen ger $fl(fl(x)\cdot fl(y)) = (fl(x)\cdot fl(y))(1+\delta_3) = (x\cdot y)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)$. Här gäller $\delta_i \le \mu,\ i = 1, 2, 3$, där μ är avrundningsenheten. Låt nu $\hat{x} = x(1+\delta_1)\sqrt{1+\delta_3}$ och $\hat{y} = y(1+\delta_2)\sqrt{1+\delta_3}$. Då gäller $fl(fl(x)\cdot fl(y)) = \hat{x}\cdot\hat{y}$. Eftersom $(1+\delta_1)\sqrt{1+\delta_3} = (1+\delta_1)(1+\frac{1}{2}\delta_3) + O(\mu^2)$ får vi $(\hat{x} - x)/x = \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_3 + O(\mu^2)$ med $|(\hat{x} - x)/x| \le \frac{3}{2}\mu + O(\mu^2)$. På samma sätt får vi $|(\hat{y} - y)/y| \le \frac{3}{2}\mu + O(\mu^2)$. Algoritmen ger alltså exakt resultat för lite ändrade indata och den är alltså stabil.

6a) Vi skriver ekvationssystemet som $f(x) = 0$, där $f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 \\ x_1^2 + 2x_2 - 1 \end{bmatrix}$. Jacobianen beräknas till $J(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2 \end{bmatrix}$.

I startpunkten $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ blir $f_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $J_0 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet $J_0s_0 = -f_0$ har lösningen $s_0 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ och första iterationen blir $x_1 = x_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

6b) I den erhållna approximationen $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ gäller $f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0.11 \\ -0.19 \end{bmatrix}$, $J(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.2 \\ 0.2 & 2 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet $J(\hat{x})s = -f(\hat{x})$ har lösningen $s \approx [-0.1 \quad 0.1]^T$ och feluppskattningen blir $\|\hat{x} - x^*\|_\infty \lesssim \|s\|_\infty \approx 0.1$.

6c) En lösning (den som ligger närmast approximationen i b)-uppgiften) till problemet är (som man lätt finner analytiskt) $x^* = [0 \quad 0.5]^T$. Vi beräknar Jacobianen till $g(x)$: $G(x) = \begin{bmatrix} -\frac{6x_1}{2x_2} & \frac{3x_1^2}{2x_2^2} \\ -x_1 & 0 \end{bmatrix}$ och vi får $G(x^*) = O$ så konvergensen är mycket snabb nära x^*. Kravet är att normen för G ska vara strikt mindre än 1 nära lösningen (och att man startar i en omgivning där detta gäller).

7a) Vi beräknar $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 6x_2^2 - 1 \end{bmatrix}$. Med $x_0 = [0,\ 0]^T$ får vi $\nabla f_0 = [0,\ \ -1]^T$ och därmed SD-riktningen $s_0 = [0,\ 1]^T$. Vi följer ledningen och inför $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha s_0) = f([0,\ \alpha]^T) = 2\alpha^3 - \alpha$. Vi minimerar genom att sätta $g'(\alpha) = 0$ där $g'(\alpha) = 6\alpha^2 - 1$, som ger $\alpha_0 = \sqrt{1/6}$ med $g''(\alpha_0) = 12\alpha_0 > 0$. Vi får alltså första SD-iterationen: $x_1 = x_0 + \alpha_0 s_0 = [0,\ 0]^T + \sqrt{1/6}[0,\ 1]^T = \sqrt{1/6}[0,\ 1]^T$.
7b) Med $g(\alpha)$ från a)-uppgiften får vi $g(0) = 0,\ g(1/2) = -1/4,\ g(1) = 1$. Ansätt ett andragradspolynom genom punkterna genom $p_2 = 0 + c_1\alpha + c_2\alpha(\alpha - 1)$ så att $p_2 = 0$ genom ansatsen. Interpolationsvillkor ger: $p_2(1) = c_1 = 1$ och $p_2(1/2) = 1/2 - c_2/4 = -1/4 \Rightarrow c_2 = 3$ så att $p_2 = \alpha + 3\alpha(\alpha - 1)$. Vi minimerar p_2 genom att sätta $p_2' = 0$ där $p_2' = 6\alpha - 2$ som ger $\alpha_0 = 1/3$. Vi får alltså första SD-iterationen: $x_1 = x_0 + \alpha_0 s_0 = [0,\ 0]^T + 1/3[0,\ 1]^T = 1/3[0,\ 1]^T$.

8a)
prediktor: Eulers framåtmetod på problemet $y' = f(t, y)$: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$
korrektor: Eulers bakåtmetod på problemet $y' = f(t, y)$: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$
Första fixpunktsiterationen i korrektorn: $y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$
Andra fixpunktsiterationen i korrektorn: $y_{k+1}^{(2)} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)))$
Metoden blir alltså: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)))$
8b) På testproblemet $y' = \lambda y, y(t_0) = c_0$ blir metoden
$y_{k+1} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k)) = y_k(1 + h\lambda + (h\lambda)^2 + (h\lambda)^3)$.
Formeln stämmer till två termer med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + ...$ och metoden är då av ordning 1.
Stabilitetsområdet är de $z = h\lambda$ som ger begränsade lösningar.
Detta ger: $\{z \in C; |1 + z + z^2 + z^3| \leq 1\}$.
8c) Vi skriver om problemet på systemform: $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 1 \\ y_2' = y_1^2 - ay_2 - y_1 & y_2(0) = 0.5 \end{cases}$.
Eftersom lösningen till ODE-problemet nu även beror på a så skriver vi den som $y(t, a)$.
Den ekvation som ska lösas är $q(a) \equiv a - y_2(1, a) + 2y_1(1, a) = 0$. Sekantmetoden för denna ekvation blir:
$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k - y_2(1,a_k) + 2y_1(1,a_k)(a_k - a_{k-1})}{a_k - y_2(1,a_k) + 2y_1(1,a_k) - a_{k-1} + y_2(1,a_{k-1}) - 2y_1(1,a_{k-1})},\ k = 1,\ 2,\ ...$
med två startapproximationen a_0 och a_1. För varje nytt a_k måste alltså ODE-problemet lösas.