Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2013-01-18

DAG: Fredag 18 januari 2013 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 8 februari, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Betrakta matisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm en bas för nollrummet till A, $N(A)$. **(2p)**
b) Bestäm en bas för radrummet till A, $Row(A)$. **(2p)**
c) Bestäm rangen för A, rang A. **(1p)**

Uppgift 2.
Betrakta Householdermatrisen $H = I - 2uu^T$, där $u \in R^n$ är en vektor med norm $\|u\|_2 = 1$.
a) Visa att H är symmetrisk och ortogonal. **(2p)**
b) Visa att avbildningen $H : R^n \to R^n$ är en spegling i ett plan ortogonalt mot u. **(2p)**
c) Utför första steget i en kompakt QR-faktorisering med Householdertransformation av matrisen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. **(3p)**
d) Visa att alla egenvärden till H har beloppet lika med 1. Du får utnyttja att H är ortogonal. **(2p)**

Uppgift 3.

Betrakta en block-triangulär matris på formen $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

a) Visa att om λ är ett egenvärde till A_{22} så är λ även egenvärde till A. **(2p)**

b) Visa att om λ är ett egenvärde till A så är λ även ett egenvärde till något av diagonal-blocken A_{11} eller A_{22}. **(3p)**

c) Bestäm en matris med ett defekt egenvärde med algebraisk multiplicitet 3. Vilken geometrisk multiplicitet har egenvärdet? **(2p)**

Uppgift 4.

Betrakta det linjära rummet V av styckvis kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$ och underrummet $F_2 = Span\{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \sin t,\ \sin 2t\}$ med de angivna funktionerna som bas.

a) Bestäm matrisen för avbildningen $D : F_2 \to F_2$, som definieras av $D(f) = f'$ (derivering). **(2p)**

b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen i a)-uppgiften. **(3p)**

c) Bestäm nollrummet till avbildningen i b)-uppgiften. **(1p)**

d) Bestäm bästa approximation av $f = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi \\ -1, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$ i underrummet F_2 med avseende på skalärprodukten $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$. **(4p)**

Uppgift 5.

a) Definiera vad som menas med ett *flyttalssystem*. **(2p)**

b) Ge exempel på ett flyttalssystem med basen 10 och bestäm UFL (”under flow limit”) och OFL (”over flow limit”) för systemet. **(2p)**

c) Vad menas med *gradual underflow*? Ge ett par exempel på tal som representerar gradual underflow i ditt system i b)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 6.

a) Vi vill bestämma b så att $\int_0^b \{sin(t) + t^2\}\ dt = 2$ approximativt med Newtons metod. Teckna en iterationsformel som inte innehåller integralberäkning. **(3p)**

Ledning: Beräkna integralen analytiskt.

b) Anta att du har ett litet fel δb i en approximation $\tilde{b}$ till b i a)-uppgiften. Ange hur stort felet i integralens värde ungefär blir på grund av felet δb. Din formel får innehålla approximationen $\tilde{b}$. **(2p)**

Uppgift 7.

a) Definiera vad som menas med en *tillåten riktning* och vad som menas med en *descent-riktning* vid optimering med bivillkor. Ge exempel på en tillåten descentriktning. **(3p).**

b) Betrakta ett icke-linjärt optimeringsproblem i flera variabler med flera likhetsbivillkor. Formulera Lagranges multiplikatormetod för problemet och skriv upp det icke-linjära ekvationssystem som metoden leder till. **(3p)**

c) Gör ett steg med steepest descentmetoden på problemet $min\ x^T Ax,\ \ x \in R^3$, med $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ och start i punkten $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$ och optimalt val av steglängd. **(3p)**

Uppgift 8.

Vi ska betrakta Eulers bakåtmetod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer.

a) Teckna metoden för att allmänt problem. **(1p)**

b) Bestäm approximationsordning och stabilitetsområde för metoden. **(4p)**

c) Betrakta det linjära ode-systemet: $y' = Ay,\ t > 0,\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ där $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Bestäm en approximativ lösning till problemet vid tiden $t = 0.5$ med Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.5$. **(3p)**

d) Förklara varför det kan vara lämpligt att använda sig av LU-faktorisering i allmänhet vid Eulers bakåtmetod och flera steg med metoden. Vilken matris är det som ska LU-faktoriseras? **(1p).**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 18 januari 2013

1a) Gausselimination: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Homogena systemet med denna uppåt triangulära matris har parameter-lösningen
$x = s\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$,
så bas för nollrummet är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$.
1b) Enligt a)-uppgiften är dimensionen för nollrummet 2. Enligt dimensionssatsen är dimensionen för kolonnrummet 4-2=2 (antal kolonner minus dimensionen för nollrummet). Dimensionen för radrummet är samma som dimensionen för kolonnrummet och alltså 2. Vi ser att de två första raderna är linjärt oberoende och vi kan ta dem som bas för radrummet som alltså blir $\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\}$.
1d) Rangen är dimensionen på värderummet, och det framgår av b)-uppgiften att rangen är 2.

2a) $H^T = (I - 2uu^T)^T = I^T - 2(u^T)^T(u^T) = I - 2uu^T = H$. Vidare är $H^TH = HH = (I - 2uu^T)(I - 2uu^T) = I - 2uu^T - 2uu^T + 4u(u^Tu)u^T = I$.
2b) För en godtycklig vektor x blir $Hx = x - 2u^Txu = x - \alpha u$, för skalären $\alpha = u^Tx$. Eftersom H är ortogonal gäller att x och Hx har samma längd, alltså är $Hx = x - \alpha u$ spegling av x i plan med u som normal.
2c) Låt $\hat{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Den andra kolonnen blir då $H\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2(-25)\frac{1}{25\cdot 2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och första steget i QR-faktoriseringen är klar: $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
2d) För egenvärde λ och egenvektor v gäller $Hv = \lambda v$. Det följer att $\|Hv\|_2 = |\lambda|\|v\|_2$ och eftersom H är ortogonal, enligt a)-uppgiften, så är $\|Hv\|_2 = \|v\|_2$ och därmed gäller att $|\lambda| = 1$.

3a) Enligt förutsättning gäller $A_{22}x = \lambda x$ för en egenvektor $x \neq 0$. Då gäller

$A\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$, dvs. λ är egenvärde till A.

3b) Enligt förutsättning gäller $A\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, där inte både y och z kan vara nollvektorn. Detta kan skrivas

$$\begin{cases} A_{11}y = \lambda y \\ A_{21}y + A_{22}z = \lambda z \end{cases}$$

Om nu $y \neq 0$ så är λ egenvärde till A_{11} enligt första ekvationen. Om $y = 0$ och därmed $z \neq 0$ så är λ egenvärde till A_{22} enligt andra ekvationen.

3c) Exempelvis matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som har egenvärde $\lambda = 1$ med multiplicitet 3 men egenrummet till $\lambda = 1$ är $Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ som har dimension 1, så egenvärdet har geometrisk multiplicitet 1.

4a) Avbildningen på baselementen ger:
$D(1) = 0$, $D(\cos t) = -\sin t$, $D(\cos 2t) = -2\sin 2t$, $D(\sin t) = \cos t$, $D(\sin 2t) = 2\cos 2t)$. Avläsning av koordinaterna för dessa element i aktuell bas ger matrisens kolonner. Vi får $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4b) Med baselementen i ordningen $\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t\}$ får matrisen den bekvämare formen $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Egenvärdena bestäms från diagonalblocken. De blir $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$, $\lambda_4 = 2i$, $\lambda_5 = -2i$. Egenvektorerna till matrisen bestäms på vanligt sätt från homogena systemet $(M - \lambda_k I)v_k = 0$ och ger $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 1 \end{bmatrix}^T$ och $v_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{bmatrix}^T$. Egenvektorerna (egenfunktionerna) till avbildningen blir då 1, $-i\cos t + \sin t$, $i\cos t + \sin t$, $-i\cos 2t + \sin 2t$ och $i\cos 2t + \sin 2t$.

4c) Nollrummet är egenfunktioner motsvarande egenvärdet 0, dvs (enligt b)-uppgiften), alla konstanta funktioner.

4d) Fourierserieapproximation. Approximationen skrivs $\hat{f} = \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + a_2\cos 2t + b_1\sin t + b_2\sin 2t$. Fourierkoefficienterna beräknas: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\, dt = 0$, $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cos t\, dt = 0$, $a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cos 2t\, dt = 0$, $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\sin t\, dt = \frac{4}{\pi}$, $b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\sin 2t\, dt = 0$. Approximationen blir alltså $\hat{f} = \frac{4}{\pi}\sin t$.

5a) Kvadruppeln $(\beta,\ p,\ L,\ U)$ definierar tal på formen $x = m \cdot \beta^e$, där $m = \pm d_0.d_1 d_2 ... d_{p-1},\ 0 \leq d_i < \beta,\ 0 < d_0 < \beta,\ 1 \leq |m| < \beta,\ L \leq e \leq U$.
5b) Ta exempelvis $(10,\ 5,\ -9,\ 9)$. "underlow"-gräns är minsta positiva tal i ett flyttalssystem $= \beta^L = 10^{-9}$, "overflow"-gräns är största positiva tal $= \beta^{U+1}(1-\beta^{-p}) = 10^{10}(1-10^{-5})$.
5c) "Gradual underflow" representeras av alla tal mellan 0 och "underflow"-gräns dvs mellan 0 och 10^{-9}. Exempel på sådana tal är $0.9 \cdot 10^{-9}$ och 10^{-10}.

6a) Betrakta ekvationen $f(b) = \int_0^b \{sin(t) + t^2\}\ dt - 2 = 0$. Newtons metod är: $b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)},\ i = 0, 1, ...$ med startapproximation b_0. Beräkna integralen analytiskt $f(b) = -cos(b) + \frac{b^3}{3} - 1$ och derivatan $f'(b) = sin(b) + b^2$. Iterationsformeln blir alltså $b_{i+1} = b_i - \frac{\frac{b_i^3}{3} - cos(b_i) - 1}{b_i^2 + sin(b_i)}$.
6b) Felfortplantningsformeln ger $\delta f \approx f'(\tilde{b})\delta b = (sin(\tilde{b}) + \tilde{b}^2)\delta b$.

7a) Låt optimeringsproblemet vara
$min\ f(x)$ då $x \in X$,
där X är det tillåtna området.
s är en tillåten riktning i x om $x + \alpha s \in X$ för $0 < \alpha < \delta_1$ för något δ_1.
s är en descentriktning i x om $f(x + \alpha s) < f(x)$ för $0 < \alpha < \delta_2$ för något δ_2.
Om x ligger i det inre av X så är s en tillåten descentriktning om $\nabla f(x)^T s < 0$.
7b) Vi har problemet $\min f(x)$ då $g(x) = 0$ med $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$. Lagranges metod är att söka extrempunkt till $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ där $\lambda \in R^m$ är Lagrangemultiplikatorerna. Vi får ekvationssystemet:
$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$
7c) Låt $f = x^T A x$, då är gradienten $\nabla f = 2Ax$. I startpunkten $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$ är gradienten $g_0 = 2[1\ 2\ 3]^T$ och steepest descentriktningen $d_0 = -[1\ 2\ 3]^T$. Vi ska alltså minimera f i riktningen d_0 utgående från x_0 dvs minimera $f(x_0 + \alpha d_0)$ med avseende på α. Vi får $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0) = (1-\alpha)^2 + 2(1-2\alpha)^2 + 3(1-3\alpha)^2$ med $g'(\alpha) = 2(1-\alpha) + 8(1-2\alpha) + 18(1-3\alpha) = 28 - 72\alpha$ som är 0 för $\alpha = \frac{7}{18}$. Detta ger $x_1 = [1\ 1\ 1]^T - \frac{7}{18}[1\ 2\ 3]^T = \frac{1}{18}[11\ \ 4\ \ -3]^T$.

8a) Eulers bakåtmetod på problemet $y' = f(t, y)$ är: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$
8b) Se kompendiet eller föreläsningsanteckningar.
8c) Rekursionssteget skrivs: $y_1 = y_0 + hAy_1$, med $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi får följande linjära ekvationssystem att lösa: $(I - hA)y_1 = y_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix} y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med lösning $y_1 = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$.
8d) Samma matris $I - hA$ vid varje iteration, alltså bör den faktoriseras för att minska arbetet per steg.