Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2012-08-29

DAG: Onsdag 29 augusti 2012 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 19 september, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Betrakta matisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm en bas för nollrummet till A, $N(A)$. **(2p)**
b) Bestäm en bas för kolonnrummet till A, $V(A)$. **(2p)**
c) Bestäm en bas för radrummet till A, $Row(A)$. **(2p)**
d) Bestäm rangen för A, rang A. **(1p)**

Uppgift 2.
Betrakta det linjära rummet $V = Span\{\sin t,\ \cos t,\ t\sin t,\ t\cos t\}$ med de angivna funktionerna som bas.
a) Bestäm matrisen för avbildningen $D : V \to V$, som definieras av $D(f) = f'$ (derivering). **(2p)**
b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen i a)-uppgiften. **(3p)**
c) Bestäm $\int(3t\sin t - \cos t + t\cos t)dt$ med matrismetoden, dvs genom att använda matrisen i a)-uppgiften på lämpligt sätt. **(3p)**

Uppgift 3.
a) Definiera minsta-kvadrat-problemet som hör till ett överbestämt linjärt ekvationssystem $Ax = b$, där $A \in R^{m \times n}$ med $m > n$. **(1p)**
b) Visa att om problemet har full rang, rang $A = n$ så har problemet i a)-uppgiften en entydig lösning. **(3p)**
c) Visa att lösningen till problemet i a)-uppgiften inte är entydigt om rang $A < n$. Ge en formel för den allmänna lösningen med hjälp av singulärvärdesuppdelning, SVD. **(3p)**

Uppgift 4.
a) Visa att en reell, symmetrisk matris har reella egenvärden. **(4p)**
b) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_3x_4$.
Bestäm största värde på $Q(x)$ under villkor att $x^T x = 2$. **(3p)**.
c) Bestäm en vektor u med $u^T u = 2$ så att $Q(u)$ är maximal. **(1p)**
d) Bestäm största värdet på $Q(x)$ under villkoren $x^T x = 1$ och $x^T u = 0$ där u är lösningen i c)-uppgiften. Bestäm även två linjärt oberoende vektorer x och y för vilka $Q(x)$ och $Q(y)$ antar detta största värde. **(2p)**

Uppgift 5. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$ i tre punkter.

t	-1	0	1
f	2	1	-1

a) Bestäm en approximation till $\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$ med trapetsformeln. **(1p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet genom de tre punkterna. **(2p)**
c) Bestäm en *kvadratisk* spline $s(x)$ som interpolerar f i de tre punkterna och som uppfyller $s'(-1) = 0$. **(3p)**

Uppgift 6.
a) Visa att Newtons metod för ekvationslösning i en variabel konvergerar kvadratiskt vid en enkelrot. **(3p)**

b) Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 2x_1x_2 + 2 = 0 \\ x_1^3x_2^2 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1x_3^3 - 1 = 0 \end{cases}$.
Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**

Uppgift 7.

a) Härled Gauss-Newtons metod för att lösa ett icke-linjärt minstakvadratproblem. **(3p)**

b) Betrakta den olinjära modellen $\Psi(x,t) = x_1(t+1) + x_2 t^{-x_3}$ som vi önskar anpassa till mättabellen

t	0	1	2	3	4
Ψ	1	3	4	6	7

i minsta-kvadrat-mening. Teckna Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Ange explicit hur residual och Jacobian ser ut i första iterationen om du startar i $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$. Iterationssteget behöver inte utföras (beräknas). **(4p)**

Uppgift 8.

a) Definiera allmänt vad som menas med approximationsordning för en ODE-lösare. Ange approximationsordning och stabilitetsområde för Eulers framåtmetod. **(2p)**

b) Betrakta följande andra ordningens differentialekvation, där a är en parameter:

$$\begin{cases} y'' = (y^2 - a)(y' - 1), \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0.5 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Låt $a = 1$. Utför ett steg med Eulers framåtmetod och steglängd $h = 0.1$. **(3p)**

c) Låt nu a bero på lösningen enligt $a = 2y(1) - y'(1)$. Formulera problemet med inskjutningsteknik, ange den ekvation som ska lösas för att få fram a samt teckna sekantmetoden för att lösa den ekvationen. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 29 augusti 2012

1a) Gausselimination: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Homogena systemet med denna uppåt triangulära matris har parameter-lösningen
$x = s\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + t\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$,
så bas för nollrummet är $\{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$.
1b) Vi ser att de två första kolonnerna i Gauss-elimineringen är pivot-kolonner, då spänns kolonnrummet av de två första kolonnerna i ursprungsmatrisen,
dvs $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}^T\}$ är bas för kolonnrummet.
1c) Dimensionen för radrummet är 2 (samma som dimensionen för kolonnrummet och det är 2 enligt b)-uppgiften). Vi ser att de två första raderna är linjärt oberoende och vi kan ta dem som bas för radrummet som alltså blir $\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$.
1d) Rangen är dimensionen på värderummet, och det framgår av b)-uppgiften att rangen är 2.

2a) Avbildningen på baselementen ger:
$D(\sin t) = \cos t, \quad D(\cos t) = -\sin t, \quad D(t\sin t) = \sin t + t\cos t, \quad D(t\cos t) = \cos t - t\sin t.$
Avläsning av koordinaterna för dessa element i aktuell bas ger matrisens kolonner. Vi får
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2b) Egenvärdena bestäms från de två diagonalblocken. De blir $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ (multipelt) och $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$ (multipelt). Egenvektorerna till matrisen bestäms på vanligt sätt från homogena systemet $(M - \lambda_k I)v_k = 0$ och ger $v_1 = v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $v_3 = v_4 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Egenvektorerna (egenfunktionerna) till avbildningen blir då $\sin t - i\cos t$ och $\sin t + i\cos t$.
2c) Koordinatvektorn för integranden är $v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$. Vi söker alltså en koordinatvektor u sådan att $Mu = v$. Relativ enkel elimination (ta ekvationerna i lämplig ordning) ger $u = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$. En primitiv funktion blir alltså $2\sin t + \cos t + t\sin t - 3t\cos t$.

3a) Minsta-kvadratproblemet är problemet $min_x \|Ax - b\|_2$.
3b) $\hat{b} = Ax$ ska vara bästa approximation till b i $V(A)$ dvs felet ska vara ortogonalt mot $V(A)$ vilket ger $A^T(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow A^TAx = A^Tb$ (normalekvationerna). Matrisen A^TA är reguljär (inverterbar) ty den är positivt definit enligt: $x^TA^TAx = \|Ax\|_2^2$, som är 0 endast

om $x = 0$ eftersom A har full rang.
3c) Låt $A = U_1 \Sigma_r V_1^T$ vara kompakt SVD av A. Då är $\hat{x} = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b$ en lösning ty $A\hat{x} = U_1 \Sigma_r V_1^T V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b = U_1 U_1^T b$, där $V(U_1) = V(A)$ (värderummen lika), dvs $\hat{b} = A\hat{x}$ är ortogonala projektionen av b på $V(A)$. En allmän lösning är då $\hat{x} + x_h$ där $x_h \in N(A)$ enligt teorin för linjära ekvationssystem. Eftersom A inte har full rang så är dim $N(A) > 0$ så lösningen är inte entydig.

4a) Se kompendiet.

4b) Den kvadratiska formen kan skrivas $Q(x) = x^T A x$ med $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Egenvärdena till A är egenvärdena till diagonalblocken dvs $\lambda_1 = 6$, $\lambda_{2,3} = 4$ (multipelt), $\lambda_4 = 2$. Enligt Sats 4.14 i kompendiet blir största vädret på $Q(x)$ lika med $\lambda_{max} x^T x$ som alltså är $2 \cdot 6 = 12$.
4c) Vi bestämmer egenvektorn u som hör till största egenvärdet $\lambda_4 = 6$. Detta görs på vanligt sätt och ger $u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, som är lösningen eftersom $u^T u = 2$.
4d) Enligt Sats 4.15 i kompendiet gäller att lösningen är näst största egenvärde och motsvarande egenvektorer. Vi får allstå $Q(x) = Q(y) = 4$ där x och y är linjärt oberoende (normerade) egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda_{2,3} = 4$. Två aktuella egenvektorer bestäms på vanligt sätt: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

5a) Integralen approximeras med $0.5(f(-1) + 2f(0) + f(1)) = 3/2$
5b) Ansätt polynomet som $p(t) = c_0 + c_1(t+1) + c_2(t+1)t$.
Bestäm koefficienterna successivt genom att sätta in interpolationsvillkoren:
$p(-1) = 2 \Rightarrow c_0 = 2$
$p(0) = 1 \Rightarrow 2 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = -1$
$p(1) = -1 \Rightarrow 2 - 2 + 2c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = -0.5$
Interpolationspolynomet blir $p(t) = 2 - (t+1) - 0.5(t+1)t$
5c) Splinen har två delar: $s_1(t),\ -1 \le t \le 0,\ \ s_2(t),\ 0 \le t \le 1$.
Ansätt $s_1 = 2 + a(t+1) + b(t+1)^2$ (så att villkoret $s_1(-1) = 2$ gäller) med $s_1' = a + 2b(t+1)$.
Villkoret $s_1'(-1) = 0$ ger $a = 0$ och villkoret $s_1(0) = 1$ ger så $b = -1$.
Vi har alltså bestämt $s_1(t) = 2 - (t+1)^2$ med $s_1'(0) = -2$.
Ansätt vidare $s_2 = 1 + ct + dt^2$ (så att vilkoret $s_2(0) = 1$ gäller) med $s_2' = c + 2dt$.
Splinevillkoret $s_2'(0) = -2$ ger $c = -2$ och villkor $s_2(1) = -1$ ger så $d = 0$.
Vi har alltså bestämt $s_2 = 1 - 2t$.

6a) Se kompendiet.

6b) $f = \begin{cases} 2x_1 + 2x_1x_2 + 2 \\ x_1^3x_2^2 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1x_3^3 - 1 \end{cases} \qquad J = \begin{bmatrix} 2+2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 3x_1^2x_2^2 & -4+2x_2x_1^3 & 1 \\ -2x_1 - x_3^2 & 1 & -3x_1x_3^2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$

7a) Se kompendiet.

7b) Låt $f_i = \Psi(x, t_i) - \Psi_i$ vara residualerna där Ψ_i är uppmätt värde i tid t_i enligt tabellen.

Vi får då $f = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3 \\ 3x_1 + x_2 2^{-x_3} - 4 \\ 4x_1 + x_2 3^{-x_3} - 6 \\ 5x_1 + x_2 4^{-x_3} - 7 \end{bmatrix}$. Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2^{-x_3} & -x_2 2^{-x_3} ln(2) \\ 4 & 3^{-x_3} & -x_2 3^{-x_3} ln(3) \\ 5 & 4^{-x_3} & -x_2 4^{-x_3} ln(4) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newtons metod skrivs: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + s_k \\ J(x_k)s_k = -f(x_k) \end{cases}$

Med start i $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$ blir $f(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ -5/3 \\ -7/4 \end{bmatrix}$ och $J(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1/2 & -1/2\ ln(2) \\ 4 & 1/3 & -1/3\ ln(3) \\ 5 & 1/4 & -1/4\ ln(4) \end{bmatrix}$.

8a) Om för en steglängd h det lokala felet är av ordning h^{p+1} så sägs metoden ha approximationsordning p. Eulers framåtmetod har approximationsordning 1 och stabilitetsområdet är för $z = h\lambda$ cirkelskivan $\{z; |1+z| \le 1\}$.

8b) Vi skriver om problemet på systemform: $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0.5 \\ y_2' = (y_1^2 - 1)(y_2 - 1), & y_2(0) = 0 \end{cases}$.

Euler framåt med $h = 0.1$ blir: $\begin{pmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.075 \end{pmatrix}$.

8c) Eftersom lösningen till ODE-problemet nu även beror på a så skriver vi den som $y(t, a)$. Den ekvation som ska lösas är $g(a) \equiv a - 2y_1(1, a) + y_2(1, a) = 0$. Sekantmetoden för denna ekvation blir:

$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k - 2y_1(1,a_k) + y_2(1,a_k)(a_k - a_{k-1})}{a_k - 2y_1(1,a_k) + y_2(1,a_k) - a_{k-1} + 2y_1(1,a_{k-1}) - y_2(1,a_{k-1})}, \ k = 1,\ 2,\ ...$

med två startapproximationen a_0 och a_1. För varje nytt a_k måste alltså ODE-problemet lösas.