Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2012-05-25

DAG: Fredag 25 maj 2012 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 15 juni, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Betrakta avbildningen F, definierad av $Fp(t) = (t + t^2)p(t)$, från rummet P_2 till rummet P_4 där P_k är rummet av polynom på R av grad $\leq k$.
a) Visa att avbildningen är linjär. **(2p)**
b) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbaserna för P_2 och P_4. Standardbasen i P_k är monomen dvs $\{1,\ t,\ t^2, ...,\ t^k\}$. **(2p)**
c) Visa att $\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ är bas i P_2 och bestäm matrisen för avbildningen i denna bas i P_2 och standardbasen i P_4. **(3p)**

Uppgift 2.
a) Gör en LU-faktorisering utan pivotering av matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **(3p)**
b) När är det speciellt lämpligt att LU-faktorisera en matris i samband med lösning av motsvarande ekvationssystem? Ge exempel på en relevant tillämpning som illustrerar detta. **(2p)**
c) Ge exempel på en reguljär (inverterbar) matris som inte kan LU-faktoriseras (med vanlig normering av matrisen L) utan pivotering. Visa att matrisen inte kan LU-faktoriseras. Ge en transformation (pivotering) av matrisen så att en LU-faktorisering existerar. **(3p)**.

Uppgift 3.

a) Definiera minsta-kvadrat-problemet som hör till ett överbestämt linjärt ekvationssystem $Ax = b$, där $A \in R^{m\times n}$ med $m > n$ och rang$A = n$. **(1p)**

b) Låt $A = QR$ vara kompakt QR-faktorisering av A. Visa att minsta-kvadrat-lösningen ges av systemet $Rx = Q^T b$. **(3p)**

Ledning. Normalekvationerna får användas utan bevis.

c) Anta nu att $rangA = r < n$ och att $A = U_1\Sigma_r V_1^T$ är en kompakt SVD-faktorisering av A. Då är en lösning till minsta-kvadrat-problemet $x = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^T b$. Visa att denna lösning är den lösning som har minsta norm $\|x\|_2$. (Du behöver alltså inte visa att x är en lösning.) **(3p)**

Uppgift 4.

a) Definiera vad som menas med att en matris är diagonaliserbar. **(1p)**

b) Lös följande system av differentialekvationer med *diagonaliseringsmetoden*

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), & x_1(0) = -4 \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -x_3(t), & x_3(0) = 3 \end{cases} . \quad \textbf{(4p)}$$

c) Varför fungerar inte *diagonaliseringsmetoden* i uppgift b) om andra ekvationen i systemet änd-ras till $x_2'(t) = -2x_2(t)+2x_3(t), \quad x_2(0) = 1$? Var i processen uppstår problemet? **(2p)**.

d) Definiera vad som menas med ett defekt egenvärde och relatera begreppet till c)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 5.

a) Betrakta $\hat{f} = t - \frac{t^3}{6}$ som en approximation till $f = \sin t$. Teckna framåtfelet och bakåtfelet för approximationen $\hat{f}(t_0)$ till $f(t_0)$ i punkten t_0. **(3p)**

b) Definiera vad som menas med att en approximation $\hat{f}$ av f (som i a)-uppgiften) är stabil. **(1p)**

c) Härled ett (approximativt) uttryck för konditionstalet vid funktionsberäkning i en envariabelfunktion $f(x)$ i punkten x_0. **(3p)**

Uppgift 6.

a) Gör en iteration med *Newtons metod* med start i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på det icke-linjära ekvationssystemet: $\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 - 1 = 0 \\ 2x_1x_2 + x_2^3 - 2 = 0 \end{cases}$. **(3p)**

b) Ange en startapproximation i a)-uppgiften som inte fungerar. Varför fungerar den inte? **(1p)**

c) Skriv upp vad som menas med en Kvasi-Newtonmetod. **(2p)**

Uppgift 7.
a) Formulera linjesökningsproblemet vid optimering i flera variabler utan bivillkor. **(2p)**
b) Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2$ utan bivillkor. Gör en iteration med Steepest Descent-metoden, med start i origo och exakt linjesökning. **(4p)**
c) Undersök med hjälp av gradient och Hessian om punkten du fått i b)-uppgiften är lösningen till problemet. **(2p)**

Uppgift 8.
Betrakta prediktor/korrektorparet Eulers framåtmetod som prediktor och trapetsmetoden som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.
a) Anta att man gör *en* fixpunktsiterationer i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(2p)**
b) Bestäm approximationsordning för metoden i a-uppgiften. Vad blir approximationsordningen om man itererar till full konvergens i fixpunktsiterationen? **(3p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften. Vad blir stabilitetsområdet om man itererar till full konvergens i fixpunktsiterationen? **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 25 maj 2012

1a) Låt p och q vara två polynom i P_2 och låt α och β vara skalärer.
Då gäller $F(\alpha p(t) + \beta q(t)) = (t + t^2)(\alpha p(t) + \beta q(t)) = \alpha(t + t^2)p(t) + \beta(t + t^2)q(t) = \alpha Fp(t) + \beta Fq(t)$, vilket visar att F är linjär.
1b) Kontrollera vad avbildningen gör på baselementen: $F1 = t + t^2$, $Ft = t^2 + t^3$, $Ft^2 = t^3 + t^4$. Uttryck dessa vektorer i basen för P_4 och sätt koordinaterna som kolonner i aktuell matris, som då blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
1c) Överföringsmatrisen mellan den nya basen och standardbasen får vi genom att uttrycka de nya baselementen i standardbasen och sätta koordinaterna som kolonner i matrisen, som blir $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denna matris är reguljär och då är den nya basen en korrekt bas. Matrisen för avbildningen i den nya basen för P_2 får vi på liknande sätt som i b)-uppgiften.
Matrisen blir $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2a) Två stegs Gausselimination ger: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.
Den erhållna matrisen är U i faktoriseringen och L fås genom skalning av kolonner i samband med eliminationen och det ger $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2b) När man har samma matris men många olika högerled (som inte är kända från början). Då görs den kostsamma LU-faktoriseringen en gång och för varje nytt högerled löses endast två triangulära system. Exempelvis en mekanisk konstruktion som beskrivs av en matris och där de olika högerleden är olika belastningar på konstruktionen. Lösningen kan då vara förskjutningar i konstruktionen i olika punkter.

2c) Ett enkelt exempel är $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vi ansätter en faktorisering $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ la & lb+c \end{bmatrix}$. Denna matris kan inte vara A eftersom $a = 0$ ger $la = 0$. Byte av rader ger enhetsmatrisen och den är trivialt LU-faktoriserbar.

3a) Minsta-kvadratproblemet är problemet $min_x \|Ax - b\|_2$.

3b) Normalekvationerna är $A^T Ax = A^T b$. Sätt in QR-faktoriseringen så blir det $(QR)^T(QR)x = (QR)^T b \Leftrightarrow R^T Q^T QRx = R^T Q^T b$. Här är Q ortogonal så $Q^T Q = I$. Systemet blir $R^T Rx = R^T Q^T b$. Vidare är R och därmed R^T reguljär. Vi får alltså systemet $Rx = Q^T b$, v.s.v.

3c) En allmän lösning kan skrivas $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b + x_h$, där x_h är en lösning till homogena systemet dvs. $x_h \in N(A)$. V_2 är en bas för $N(A)$, där V_2 kommer från den fulla SVD-faktoriseringen och $V = [V_1\ V_2]$ är ortogonal. Den allmäna lösningen kan alltså skrivas $x = V_1 y_1 + V_2 y_2 = Vy$, där $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ och $y_1 = \Sigma_r^{-1} U_1^T b$. För normen gäller då $\|x\|_2^2 = \|Vy\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \|y_1\|_2^2 + \|y_2\|_2^2$, som minimeras då $y_2 = 0$ dvs då $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b$.

4a) En matris A är diagonaliserbar om det finns en icke-singulär matris V sådan att $V^{-1}AV = D$, där D är en diagonal matris.

4b) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = -1$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (1, 1, 0)^T,\ v_2 = (-1, 1, 0)^T$ och $v_3 = (-5, -4, 3)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 3,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{-4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4c) Matrisen blir nu $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Egenvärdena blir $-2,\ -2$ och -1. Det går inte att finna en linjärt oberoende mängd av tre egenvektorer så matrisen är inte diagonaliserbar. Diagonaliseringsmetoden kan alltså inte fungera.

4d) Ett egenvärde är defekt om geometriska multipliciteten och algebraisk multipliciteten inte äe lika. För egenvärdet -2 i uppgift c) gäller att den algebraiska multipliciteten är 2 men den geometriska multipliciteten är 1. Egenvärdet är alltså defekt och matrisen är då inte diagonaliserbar.

5a) Framåtfelet är $\hat{f}(t_0) - f(t_0) = t_0 - \frac{t_0^3}{6} - \sin t_0$. Bakåtfelet är $\arcsin(t_0 - \frac{t_0^3}{6}) - t_0$.
5b) $\hat{f}$ är en stabil approximation av f om bakåtfelet är litet.
5c) Felet i en funktionsberäkning $f(x)$, som beror på felet δx i x, definieras som $\delta f = f(x+\delta x) - f(x)$ som med Taylor-utveckling kan approximeras (för små δx) med $\delta f \approx f'(x)\delta x$. För det relativa felet får vi $\frac{\delta f}{f} \approx \frac{f'(x)\delta x}{f} = \frac{\delta x}{x}\frac{x f'(x)}{f}$. Konditionstalet är beloppet av kvoten mellan relativa felet i f och relativa felet i x. Konditionstalet blir alltså $\kappa \approx |\frac{x f'(x)}{f(x)}|$, i punkten x_0 alltså $\kappa \approx |\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}|$.

6a) Vi ska lösa $f(x) = 0$ där $f = \begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2 - 1 \\ 2x_1 x_2 + x_2^3 - 2 \end{cases}$. Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 + 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = -f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} -4/13 \\ -1/13 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 9/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}$.

6b) Startapproximationen $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fungerar inte eftersom Jacobianen i den startpunkten är $J(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, som är singulär.
6c) En Kvasi-Newtonmetod skrivs $x_{k+1} = x_k + s_k$, där $B_k s_k = -f(x_k)$. Här är B_k en approximation av $J(x_k)$.

7a) Linjesökningsproblemet är $min_{\alpha \in R}\ f(x_k + \alpha s_k)$, där f är den funktion som ska minimeras och s_k är en vald sökriktning i punkten x_k.
7b) För SD beräknar vi $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 - 2 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad s_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Linjesökning: Låt $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha s_0)$ så får vi $g(\alpha) = 8\alpha^2 - 4\alpha, \quad g'(\alpha) = 16\alpha - 4$. Vi får minimum för $g(\alpha)$ i punkten $\alpha = 0.25$. Detta ger $x_1 = x_0 + \alpha s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

7c) I den erhållna punkten i b)-uppgiften gäller $\nabla f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och Hessianen $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ är positivt definit, så punkten är en minpunkt, dvs lösningen till problemet.

8a) Trapetsmetoden är $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$
Med en fixpunktsiteration från Eulers framåtmetod blir metoden:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$.

8b) Metoden på testproblemet $y' = \lambda y$ blir
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})$.
Formeln stämmer till tre termer med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1+h\lambda+\frac{h^2\lambda^2}{2}+...$ och metoden är då av ordning 2.
Om man itererar till konvergens i prediktorn så blir metoden trapetsmetoden som har approximationsordning 2.

8c) Stabilitetsområdet är de $z = h\lambda$ som ger begränsade lösningar.
Från b)-uppgiften ger detta: $\{z \in C; |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$.
Om man itererar till konvergens i prediktorn så blir metoden trapetsmetoden som har hela vänstra halvplanet av komplexa talplanet som stabilitetsområde (den är A-stabil).