Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2010-05-29

DAG: Lördag 29 maj 2010 TID: 14.00 - 18.00 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 16 juni, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm bas för nollrummet Nul(A). **(2p)**
b) Bestäm bas för värderummet Col(A). **(2p)**
c) Bestäm rangen Rank(A). **(1p)**
d) Gör en LU-faktorisering (utan pivotering) av A. **(2p)**
e) När kan det i allmänhet vara lämpligt att LU-faktorisera en matris? **(1p)**

Uppgift 2.
a) Visa att om λ är ett egenvärde till $A \in R^{n\times n}$ så är λ även egenvärde till A^T. **(2p)**
b) En stokastisk matris har icke-negativa element och alla kolonnsummorna är lika med 1. Visa att en stokastisk matris har ett egenvärde lika med 1. **(2p)**
c) Visa att similära matriser har samma egenvärden. Ge en relation mellan egenvektorerna till similära matriser. **(3p)**

Uppgift 3.
Låt $T : C^1(R) \to C(R)$ vara definierad av $T(f) = (fg)'$ (derivering), där $g \in C^1(R)$ är en fix given funktion.
a) Visa att T är linjär. **(2p)**
b) Låt $g(t) = t$ och betrakta T på underrummet $P_n \subset C^1(R)$, dvs $T : P_n \to P_n$, där P_n är rummet av polynom av grad $\leq n$. Bestäm matrisen för avbildningen T i standardbasen för P_n. **(3p)**
c) Låt $n = 3$. Visa att $\{1,\ t,\ t^2 - t,\ t^2 + t^3\}$ är bas för P_3 och bestäm matrisen för avbildningen i b)-uppgiften i denna bas. **(3p)**
d) Ange för $n = 3$ fyra egenvektorer (egenfunktioner) till avbildningen i b)-uppgiften. **(1p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden
$$\begin{cases} x_1'(t) = -5x_1(t) + x_2(t) & x_1(0) = -3 \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) & x_2(0) = 6 \\ x_3'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) - 2x_3(t) & x_3(0) = 5 \end{cases} . \ \textbf{(4p)}$$
b) Vi vill göra ett steg med Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.2$ från $x(0)$ på problemet i a)-uppgiften. Skriv explicit (med alla tal angivna) upp det ekvationssystem som ska lösas för att få approximationen efter steget. Systemet behöver inte lösas. **(3p)**

Uppgift 5.
Betrakta centraldifferenskvoten för approximation av derivata: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.
a) Visa att felet, R_T (kallas trunkeringsfel) är av ordning $R_T = \mathcal{O}(h^2),\ h \to 0$. **(3p)**
b) Antag att f inte kan bestämmas helt exakt utan med viss osäkerhet: $|\delta f| \leq \epsilon$. Detta ger ett fel i derivataberäkningen som vi betecknar R_f, och som alltså beror på osäkerheten i f-beräkningen. Visa att det blir konflikt mellan felen R_T och R_f när det gäller att välja bästa h, dvs det h som minimerar summan av felen, $R_T + R_f$. **(3p)**
c) Ta fram den differensmetod för ODE-problem som centraldifferensen av derivatan leder till. Karakterisera metoden i termer av explicit/implicit och enstegs/flerstegs-metod. Är metoden stabil för $h > 0$? **(4p)**
Ledning för stabilitet: Testproblemet med $y_0 = 0,\ y_1 = 1$.

Uppgift 6.
Bestäm en kvadratisk spline, $s(x)$, med nod i $x = 0.5$, som interpolerar x^3 i punkterna 0, 0.5 och 1, och som uppfyller villkoret $s'(1) = 3$. **(4p)**

Uppgift 7.
a) Definiera linjesökningsproblemet vid optimering i flera variabler utan bivillkor. **(2p)**
b) Härled en formel för optimal steglängd vid linjesökning då funktionen som ska minimeras är kvadratisk med positivt definit Hessian. **(4p)**
c) Betrakta den olinjära modellen $\Psi(x,t) = x_1 + x_2 t^{x_3}$ som vi önskar anpassa till mättabellen

t	0	1	2	3	4
Ψ	1	2	4	5	7

i minsta-kvadrat-mening. Teckna Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Ange explicit hur residual och Jacobian ser ut i första iterationen om du startar i $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$. Iterationssteget behöver inte utföras (beräknas). **(4p)**

Uppgift 8.
Betrakta randvärdesproblemet $\begin{cases} y'' - y' + 2y = t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0, & y(1) = 1 \end{cases}$
a) Formulera om problemet för inskjutning och ange den ekvation som metoden leder till. **(3p)**
b) Teckna en lämplig iterationsmetod för att lösa ekvationen i a)-uppgiften. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 29 maj 2010

1a) Gausselimination: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

Homogena systemet med denna uppåt triangulära matris U har parameter-lösningen $x = s[-2\ 1\ 1]^T$, så bas för nollrummet är $[-2\ 1\ 1]^T$.

1b) Vi ser att de två första kolonnerna i Gauss-elimineringen är pivot-kolonner, då spänns kolonnrummet av de två första kolonnerna i ursprungsmatrisen, dvs $\{[1\,0\,1\,1]^T,\ [0\,1\,-1\,0]^T\}$ är bas för nollrummet.

1c) Rangen är dimensionen på värderummet, och det framgår av b)-uppgiften att rangen är 2.

1d) LU-faktorisering är en variant på Gausselimination, där räkningarna administreras så att $A = LU$, där U är den uppåt triangulära matris som är resultatet av eliminationen och L är nedåt triangulär med ettor i diagonalen. Från a)-uppgiften får vi då $A = LU$ med
$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1e) När man har många högerled med samma matris och högerleden inte är kända från början.

2a) λ egenvärde innebär att $det(A - \lambda I) = 0$. Då gäller även $det(A^T - \lambda I) = det((A - \lambda I)^T) = det(A - \lambda I) = 0$, dvs λ egenvärde till A^T.

2b) Låt e vara vektorn med idel ettor. Då gäller enligt definition på stokastisk matris att $A^T e = 0$ dvs A^T har ett egenvärde 1 (och motsvarande egenvektor e). Då har A egenvärde 1 enligt a)-uppgiften.

2c) A och B similära innebär att det finns icke-singulär matris P så att $A = PBP^{-1}$, $B = P^{-1}AP$. $(x,\ \lambda)$ egenpar till B: $Bx = \lambda x \Leftrightarrow P^{-1}APx = \lambda x \Leftrightarrow A(Px) = \lambda(Px)$, dvs $(Px,\ \lambda)$ egenpar till A.
$(y,\ \mu)$ egenpar till A: $Ay = \mu y \Leftrightarrow PBP^{-1}y = \mu y \Leftrightarrow B(P^{-1})y = \mu(P^{-1}y)$. Samma egenvärden alltså och egenvektorerna relaterade genom transformation med P resp P^{-1}.

3a) $T(f+h) = ((f+h)g)' = (fg+hg)' = (fg)' + (hg)' = T(f) + T(h)$
$T(cf) = ((cf)g)' = c(fg)' = cT(f)$.
3b) Bas $\mathcal{B} = \{b_i = t^{i-1}\}_{i=1}^{n+1}$, $T(b_i) = (t^{i-1}t)' = (t^i)' = it^{i-1} = ib_i$. Matrisen blir

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{C} = \{1,\ t,\ t^2 - t,\ t^3 + t^2\}$. Överföringsmatrisen till bas $\mathcal{B} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Denna matris är reguljär så basen $\mathcal{C}$ är ok! För avbildningens matris i denna bas beräknar vi $T(1) = 1 = c_1$, $T(t) = 2t = 2c_2$, $T(t^2 - t) = 3t^2 - 2t = 3c_3 + c_2$, $T(t^3 + t^2) = 4t^3 + 3t^2 = 4c_4 - c_3 - c_2$. Matrisen blir då $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

3d) Matrisen är diagonal med egenvärden på diagonalen. Basfunktionerna är alltså egenfunktioner, dvs $1,\ t,\ t^2,\ t^3$.

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = -2$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -6$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (0,0,1)^T$, $v_2 = (1,2,3)^T$ och $v_3 = (4,-4,-3)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-6t} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna c_1, c_2 och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = -1,\ c_2 = 1,\ c_3 = -1$.

Lösningen blir alltså $x = -e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - e^{-6t} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

4b) Eulers bakåtmetod ser ut så här: $y_{k+1} = y_k + hAy_{k+1}$ som kan skrivas $(I-hA)y_{k+1} = y_k$.
y_1 fås alltså från lösningen av ett ekvationssystem med matris $I-hA = \begin{bmatrix} 2 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & 1.8 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 1.4 \end{bmatrix}$
och högerled $y_0 = [-3,\ 6,\ 5]^T$.

5a) Taylorutveckling ger $R_T = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)] - f'(x) = \frac{1}{2h}[2hf'(x) + \mathcal{O}(h^3)] - f'(x) = \mathcal{O}(h^2)$.

5b) Vi får en gräns för funktionsfelet: $|R_f| \leq \frac{\epsilon+\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h}$. Detta fel har alltså en gräns som önskar ett stort h medan trunkeringsfelet önskar ett litet h. Här är alltså konflikten om man önskar minimera summan av felen.

5c) Differensmetoden blir på vanligt sätt: $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(t_k, y_k)$ för problemet $y' = f(t,y)$. Vi ser att den är tvåstegs och explicit. För stabiliteten följer vi ledningen och ser var vi hamnar med testproblemet:
$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2h\lambda,\ y_3 = y_1 + 2h\lambda y_2 = 1 + \mathcal{O}(h^2),\ y_4 = y_2 + 2h\lambda y_3 = 4h\lambda + \mathcal{O}(h^2),\ y_5 = y_3 + 2h\lambda y_4 = 1 + \mathcal{O}(h^2),\ y_6 = y_4 + 2h\lambda y_5 = 6h\lambda + \mathcal{O}(h^3)$, ... Trenden är nu klar, för jämna k får vi $y_k = kh\lambda + \mathcal{O}(h^3)$ och $|y_k|$ är obegränsad då $k \to \infty$ om $h > 0$, godtyckligt litet. Metoden är alltså inte stabil för något $h > 0$.

6) Splinen har två delar: $s_1(t),\ 0 \leq t \leq 0.5,\quad s_2(t),\ 0.5 \leq t \leq 1$.
Ansätt $s_2 = 1 + a(t-1) + b(t-1)^2$. Då gäller $s_2(1) = 1$ genom ansatsen. Vidare är $s_2'(t) = a + 2b(t-1)$ och villkoret $s_2'(1) = 3$ ger $a = 3$. Villkoret $s_2(0.5) = \frac{1}{8}$ ger $1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}b = \frac{1}{8}$ dvs $b = \frac{5}{2}$ och $s_2(t) = 1 + 3(t-1) + \frac{5}{2}(t-1)^2$, med $s_2'(0.5) = 0.5$.
Ansätt $s_1(t) = \frac{1}{8} + c(t-0.5) + d(t-0.5)^2$. Då gäller $s_1(0.5) = \frac{1}{8}$ genom ansatsen. Vidare är $s_1'(t) = c + 2d(t-0.5)$ med $s_1'(0.5) = c$ och villkoret $s_1'(0.5) = s_2'(0.5)$ ger $c = 0.5$. Slutligen är $s_1(0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{d}{4}$ och villkoret $s_1(0) = 0$ ger $d = \frac{1}{2}$ och därmed $s_1(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(t-0.5) + \frac{1}{2}(t-0.5)^2$.

7a) Betrakta $min\ f(x),\ f : R^n \to R$ med approximation x_k och vald sökriktning s_k. Då är linjesökningsproblemet: $min\ f(x_k + \alpha s_k)$ med avseende på α.

7b) Låt $g(\alpha) = f(x_k + \alpha s_k)$. Då är linjesökningsproblemet $min\ g(\alpha)$ och vi får lösningen genom $g'(\alpha) = 0$. Nu är f kvadratisk, $f = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x$ så $g'(\alpha) = \nabla f(x_k + \alpha s_k)^T s_k = (H(x_k + \alpha s_k) + b)^T s_k = (Hx_k + b + \alpha H s_k)^T s_k = (\nabla f(x_k) + \alpha H s_k)^T s_k = 0$ och $g'(\alpha) = 0$ om $\nabla f(x_k)^T s_k + \alpha s_k^T H s_k = 0$ dvs för $\alpha = -\frac{\nabla f(x_k)^T s_k}{s_k^T H s_k}$.

7c) Låt $f_i = \Psi(x, t_i) - \Psi_i$ vara residualerna där Ψ_i är uppmätt värde i tid t_i enligt tabellen.

Vi får då $f = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_1 + x_2 - 2 \\ x_1 + x_2 2^{x_3} - 4 \\ x_1 + x_2 3^{x_3} - 5 \\ x_1 + x_2 4^{x_3} - 7 \end{bmatrix}$. Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2^{x_3} & x_2 2^{x_3} ln(2) \\ 1 & 3^{x_3} & x_2 3^{x_3} ln(3) \\ 1 & 4^{x_3} & x_2 4^{x_3} ln(4) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newtons metod skrivs: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + s_k \\ J(x_k)s_k = -f(x_k) \end{cases}$

Med start i $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$ blir $f(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $J(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2ln(2) \\ 1 & 3 & 3ln(3) \\ 1 & 4 & 4ln(4) \end{bmatrix}$.

8a) Skriv om problemet som system av första ordning genom $y_1 = y$ och $y_2 = y'$.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = t^2 - 2y_1 + y_2 & y_2(1) = 1 \end{cases}.$$

Inför begynnelsevärdesproblem med variabel s:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = t^2 - 2y_1 + y_2 & y_2(0) = s \end{cases}.$$

Anpassning till givet randvärde ger ekvationen $y_1(1, s) - 1 = 0$.

8b) Ekvationen i a)uppgiften kan lösas med sekantmetoden:

$s_{k+1} = s_k - \frac{(y_1(1,s_k)-1)(s_k - s_{k-1})}{y_1(1,s_k) - y_1(1,s_{k-1})}$.