Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2009-08-27

DAG: Torsdag 27 augusti 2009   TID: 8.30 - 12.30   SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 11 september, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att $Nul(A) = Col(A^T)^\perp$ för en matris $A \in R^{m\times n}$. **(3p)**
b) Låt $V = R^{n\times n}$. Undersök om V är ett vektorrum med avseende på operationerna:
$A \oplus B = A + B$ (vanlig matrisaddition)
$\alpha \odot A = \frac{\alpha}{2}A$.
Om så inte är fallet, ange alla räkneregler som inte gäller. **(3p)**

Uppgift 2.
a) Visa att varje skalärprodukt $< \cdot,\cdot >$ i R^n kan skrivas $< x, y >= y^T Ax$ där A är en symmetrisk, positivt definit matris. **(4p)**
Ledning: Bas och räkneregler för skalärprodukt.

b) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **(3p)**

c) Bestäm alla singulära värden till matrisen A i b)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 3.
a) Låt $V = C^1[0,1]$ och $W = C[0,1]$ och låt T vara avbildningen $T : V \to W$ så att $T(f) = f'$ (derivering). Visa att T är en linjär avbildning samt bestäm nollrum och värderum för avbildningen. **(3p)**
b) Betrakta det linjära rummet V av funktioner på R, där $V = Span(1,\ t,\ sin^2 t)$ med de angivna funktionerna som bas och betrakta avbildningen derivering på rummet V. Bestäm dimension och en bas för värderummet W samt matrisen till denna avbildning $V \to W$ i aktuella baser.
Betrakta även fortsatt derivering på rummet W. Ange dimension och bas för värderummet U till denna avbildning samt matrisen för avbildningen $W \to U$ i aktuella baser. Visa hur derivering två gånger från $V \to U$ kan beskrivas med en matris som är produkten av de två avbildningsmatriserna. Använd denna matris för att bestämma andraderivatan av $3t + 2sin^2 t$. **(5p)**

Uppgift 4.
a) Visa att en reell symmetrisk matris med olika egenvärden är ortogonalt diagonaliserbar. **(3p)**
b) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
Karakterisera den kvadratiska formen.
Bestäm största och minsta värde på $Q(x)$ då $\|x\|_2 = 1$. Bestäm alla vektorer u med $\|u\|_2 = 1$ sådana att $Q(u)$ blir maximal resp. minimal. **(5p)**

Uppgift 5.
a) Definiera begreppen *konvergenshastighet* och *asymptotisk felkonstant* vid ekvationslösning i en variabel. **(2p)**
b) Hur yttrar sig kvadratisk konvergens i praktiken? **(1p)**
c) Vilken roll spelar multipliciteten vid ekvationslösning? **(1p)**
d) Betrakta följande system av icke-linjära ekvationer:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2 = -2 \\ x_1^3 - x_2^2 - 2x_1 = -1 \end{cases}.$$

Gör en iteration med Newtons metod utgående från startapproximation $x_0 = (0\ \ 0)^T$. **(3p)**

Uppgift 6. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$ i fyra punkter.

t	0	1	2	3
f	-1	0	-1	1

a) Bestäm en approximation till $\int_0^3 f(t)\, dt$ med trapetsformeln. **(1p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet genom de fyra punkterna. **(2p)**
c) Bestäm en *kvadratisk* spline $s(x)$ med noder i punkterna $t = 1$ och $t = 2$, som går genom alla fyra punkterna och som uppfyller $s'(1) = 0$. **(4p)**

Uppgift 7.
a) Definiera vad som menas med en *tillåten riktning* och vad som menas med en *descentriktning* vid optimering med bivillkor. Ge exempel på en tillåten descentriktning. **(3p)**.
b) Vi vill i minsta-kvadrat-mening anpassa en modell på formen
$\Psi(t) = c_0 + c_1 sin(t) + c_2 cos(c_3 t)$ till mätdata $(t_i, \Psi_i),\ i = 1, ..., m$, där $m > 4$.
Formulera residual, Jacobian och Gauss-Newtons metod för att lösa uppgiften dvs för att bestämma de fyra koefficienterna $c_i,\ i = 0, ..., 3$. **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta prediktor/korrektorparet Heuns metod som prediktor och Eulers bakåtmetod som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.
Heuns metod definieras så här: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$
a) Anta att man gör *en* fixpunktsiteration i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(4p)**
b) Bestäm approximationsordning för metoden i a-uppgiften. **(2p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 27 augusti 2009

1a) Låt $x \in Nul(A)$ dvs $Ax = 0$. Då är vektorn x ortogonal mot alla rader i A dvs mot alla kolonner i A^T. x är alltså ortogonal mot rummet som spänns av A^T:s kolonner dvs mot $Col(A^T)$. Detta skrivs $x \in Col(A^T)^\perp$.
1b) Eftersom $\oplus$ är vanlig addition är alla räkneregler som involverar endast $\oplus$ okej. När det gäller $\odot$ så testar vi och finner att reglerna gäller utom (9) och (10), V är ej vektorrum med dessa operationer.
(9): $\alpha \odot (\beta \odot A) = \alpha \odot \frac{\beta}{2} A = \frac{\alpha}{2}\frac{\beta}{2} A = \frac{\alpha\beta}{4} A \neq \frac{\alpha\beta}{2} A = (\alpha\beta) \odot A$
(10): $1 \odot A = \frac{1}{2} A \neq A$

2a) Med $\{e_i\}_{i=1}^n$ bas kan x och y skrivas: $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$.
Räkneregler för skalärprodukt (linjäritet) ger:
$< x, y >=< \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{i=1}^n y_i e_i >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i < e_j, e_i >$.
Med $a_{ij} =< e_j, e_i >$ element i matrisen A får vi $< x, y >= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y^T A x$.
A är symmetrisk på grund av symmetri hos skalärprodukt: $< e_j, e_i >=< e_i, e_j >$.
A är positivt definit ty $x^T A x =< x, x >> 0$ om $x \neq 0$ enligt positiviteten hos skalärprodukt.

2b) De två första kolonnerna är ortogonala och även första och tredje. Ortogonalisera den tredje mot den andra med Gramm-Schmidt:
$q_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T - 1/4[-1\ 1\ 1\ -1]^T = 1/4[1\ -1\ 3\ 1]^T$. Normering av kolonnerna ger
$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/2 & 1/\sqrt{12} \\ 2/\sqrt{6} & 1/2 & -1/\sqrt{12} \\ 0 & 1/2 & 3/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{6} & -1/2 & 1/\sqrt{12} \end{bmatrix} \text{ och } R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} \end{bmatrix}.$$

2c) Singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^T A = R^T R = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Denna matris har egenvärdena 6, $\frac{5+\sqrt{13}}{4}$ och $\frac{5-\sqrt{13}}{4}$, singulära värdena till A är alltså $\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{2}$ och $\frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}$.

3a) Låt $f \in V,\ g \in V,\ \alpha \in R,\ \beta \in R$. Då gäller
$T(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha T(f) + \beta T(g)$, vilket visar att T är linjär.
Nollrummet till T är mängen av konstanta funktioner, ty dessa deriveras till noll-funktionen.
Värderummet till T är hela W, ty varje funktion i W har en primitiv funktion i V.

3b) Derivatan av baselementen i den givna är $1' = 0,\ t' = 1,\ (sin^2 t)' = 2\ sint\ cost$ och vi ser att dimensionen är 2 och $B = \{1,\ sint\ cost\}$ kan tas som bas för värderummet W.
Matrisen för avbildningen i de aktuella baserna blir $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
För fortsatt derivering blir derivatan av baselementen i basen B: $1' = 0,\ (sint\ cost)' = cos^2 t - sin^2 t$ och vi ser att dimensionen är 1 och att $C = cos^2 t - sin^2 t$ kan tas som bas i U. Matrisen för derivering $W \to U$ blir $M_2 = [0\ \ 1]$. Derivering två gånger $V \in U$ kan alltså besrivas med matrisen $M = M_2 M_1 = [0\ \ 0\ \ 2]$. Den givna funktionen har koordinatvektorn $x = [0\ \ 3\ \ 2]^T$ och $Mx = 4$ så andraderivatan är $4(cos^2 t - sin^2 t)$.

4a) Vi visar att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala:
Vi har $Av_1 = \lambda_1 v_1,\quad Av_2 = \lambda_2 v_2$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$ och A symmetrisk.
Detta ger $\lambda_1(v_1^T v_2) = (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2 = v_1^T \lambda_2 v_2 = \lambda_2(v_1^T v_2)$ och eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ger detta att $v_1^T v_2 = 0$ dvs egenvektorerna ortogonala.
Om alla egenvärden är olika så har vi alltså att alla egenvektorer är parvis ortogonala. Om vi normerar dem och sätter dem som kolonner i en matris V och motsvarande egenvärden i diagonalen av diagonalmatrisen D så gäller alltså $AV = VD$ som ger $A = VDV^T$, dvs diagonaliserbarheten med ortogonal matris V är visad.

4b) Den kvadratiska formen kan skrivas $Q(x) = x^T Ax$ med $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
Egenvärden och egenvektorer till A bestäms. Karakteristiska ekvationen
$(4-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) - 8]$ har lösningarna $\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvektorer
$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Egenvärden är icke-negativa så den kvadratiska formen är positivt semidefinit.
Enligt sats i Lay gäller $0 \leq \frac{Q(x)}{x^T x} \leq 6$, där övre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}[1\ \ 1\ \ 1]^T$ och undre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}[1\ \ -2\ \ 1]^T$.

5a) Låt lösningen vara x^* och låt $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ vara iterationsföljd. Konvergensordningen är högsta möjliga tal q så att
$lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^q} = C < \infty$. Konstanten C är då asymptotiska felkonstanten.

5b) Antalet korrekta decimaler fördubblas i varje iteration (nära lösningen).

5c) Långsammare konvergens och svårare att bestämma roten på grund av större inverkan av funktionsfel.

5d) Vi ska lösa $f(x)=0$ där $f = \begin{bmatrix} x_1^2+2x_2+2 \\ x_1^3-x_2^2-2x_1+1 \end{bmatrix}$ är residualen och $J = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2 \\ 3x_1^2-2 & -2x_2 \end{bmatrix}$ är Jakobianen. Med startvärdena $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ blir iterationen $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$ Ekvationssystem $J_0 s_0 = -f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ har lösningen $s_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$ och iterationen blir $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6a Integralen approximeras med $0.5(f(0)+2f(1)+2f(2)+f(3)) = -1$

6b Ansätt polynomet som $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t(t-1) + c_3 t(t-1)(t-2)$.
Bestäm koefficienterna successivt genom att sätta in interpolationsvillkoren:
$p(0) = -1 \Rightarrow c_0 = -1$
$p(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 1$
$p(2) = -1 \Rightarrow -1+2+2c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = -1$
$p(3) = 1 \Rightarrow -1+3-6+6c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 5/6$
Interpolationspolynomet blir $p(t) = -1 + t - t(t-1) + 5/6t(t-1)(t-2)$

6c) Splinen har tre delar: $s_1(t),\ 0 \le t \le 1,\quad s_2(t),\ 1 \le t \le 2,\quad s_3(t),\ 2 \le t \le 3$.
Ansätt $s_1 = a + b(t-1) + c(t-1)^2$ med $s_1' = b + 2c(t-1)$. Villkoren $s_1(1) = 0,\ \ s_1'(1) = 0$ ger $a = b = 0$ och villkoret $s_1(0) = -1$ ger så $c = -1$.
Vi har alltså bestämt $s_1(t) = -(t-1)^2$.
Ansätt vidare $s_2 = d(t-1) + e(t-1)^2$ med $s_2' = d + 2e(t-1)$. Villkor $s_2(1) = 0$ uppfyllt genom ansatsen, $s_2'(1) = 0$ ger $d = 3$ och villkor $s_2(2) = -1$ ger $e = -1$.
Vi har alltså bestämt $s_2 = -(t-1)^2$ med $s_2'(2) = -2$.
Slutligen ansätts $s_3 = -1 + f(t-2) + g(t-2)^2$ med $s_3' = f + 2g(t-2)$ Villkoret $s_3(2) = -1$ är uppfyllt genom ansatsen.
Villkoret $s_3'(2) = -2$ ger $f = -2$ och villkoret $s_3(3) = 1$ ger $g = 4$
Vi har alltså bestämt $s_3 = -1 - 2(t-2) + 4(t-2)^2$

7a) Låt optimeringsproblemet vara
$minf(x)$ då $x \in X$,
där X är det tillåtna området.
s är en tillåten riktning i x om $x + \alpha s \in X$ för $0 < \alpha < \delta_1$ för något δ_1.
s är en descentriktning i x om $f(x+\alpha s) < f(x)$ för $0 < \alpha < \delta_2$ för något δ_2.
Om x ligger i det inre av X så är s en tillåten decsentriktning om $\nabla f(x)^T s < 0$.

7b) Residualen f har elementen $f_i = c_0 + c_1 sin(t_i) + c_2 cos(c_3 t_i) - \Psi_i$.
Jakobianen J är $m \times 4$ -matrisen med i:te rad $[1\ \ sin(t_i)\ \ cos(c_3 t_i)\ \ \ -t_i c_2 sin(c_3 t_i)]$.
Med $x = [c_0\ \ c_1\ \ c_2\ \ c_3]^T$ kan Gauss-Newtons metod skrivas:
$x_{k+1} = x_k + d_k$ där $J(x_k)d_k = -f_k$, k är iterationsindex och x_0 är startapproximation.

8a) Eulers bakåtmetod är: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$
Med en fixpunktsiteration från Heuns prediktorvärde blir metoden:
$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$.

8b) Metoden på testproblemet $y' = \lambda y$ blir
$y_{k+1} = y_k + h\lambda(y_k + \frac{h\lambda}{2}(y_k + y_k + h\lambda y_k)) = y_k(1 + h\lambda + h^2\lambda^2 + \frac{h^3\lambda^3}{2})$.
Formeln stämmer till två termer med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda}$ och metoden är då av ordning 1.

8c) Stabilitetsområdet är de $z = h\lambda$ som ger begränsade lösningar.
Från b)-uppgiften ger detta: $\{z \in C; |1 + z + z^2 + \frac{z^3}{2}| \leq 1\}$.