Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2008-08-28

DAG: Torsdag 28 aug 2008 TID: 8.30 - 12.30 SAL: M

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas var rättad 15 september, resultat tillsänds dig
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm baser för nollrum och värderum samt rangen för A. **(3p)**
b) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av A. **(3p)**
c) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av A. **(3p)**

Uppgift 2. Låt F_2 vara det linjära underrum till $C[0, 2\pi]$ definierat av
$F_2 = Span\{1,\ cos\ t,\ sin\ t,\ cos\ 2t,\ sin\ 2t\}$.
a) Visa att de angivna funktionerna utgör en ortogonal bas för F_2 med skalärprodukten $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$. **(3p)**
b) Bestäm bästa approximation i F_2 till funktionen $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \pi \\ 1, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$. **(3p)**

Uppgift 3. Betrakta avbildningen $T: C^1(R) \to C(R)$ definierad av $T(f) = (fg)'$ där $g \in C^1(R)$ är en fix given funktion och $'$ står för derivering.
a) Visa att T är en linjär avbildning. **(2p)**.
b) Låt $g = t^2$ och betrakta $T : P_n \to P_{n+1}$ där P_n är rummet av polynom av grad $\leq n$. Bestäm matrisen för avbildningen T i standardbaserna för P_n och P_{n+1}. **(3p)**
c) Bestäm alla singulära värden och högersingulära vektorer till avbildningen T i b-uppgiften. **(3p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) & x_1(0) = 0 \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) & x_2(0) = -2 \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) - 3x_3(t) & x_3(0) = 1 \end{cases} .$$ **(4p)**

b) Vad blir det för problem med metoden om andra ekvationen ändras till $x_2'(t) = -2x_2(t)$? **(1p)**
c) Undersök om Eulers framåtmetod är stabil för problemet i b-uppgiften och steglängd $h = 0.4$. **(2p)**
d) Bestäm en approximation av lösningen till problemet enligt b-uppgiften i punkten $t = 0.8$ genom att använda Eulers framåtmetod och steglängd $h = 0.4$. **(3p)**

Uppgift 5. Betrakta algoritmen $y = x^2$ i ett flyttalssystem med dubbel precision i IEEE standard (2, 53, -1022, 1023).
a) Ge en gräns för felet med framåtanalys. Ta hänsyn till felet vid lagring av x i flyttalssystemet. **(3p)**
b) Använd bakåtanalys för att avgöra om algoritmen är stabil eller inte. Ta hänsyn till felet vid lagring av x i flyttalssystemet. **(3p)**
c) Bestäm största möjliga positiva x som inte ger overflow i algoritmen. **(3p)**

Uppgift 6. Betrakta funktionen $f(x) = x + x^2 - 5x^3 + 2x^4$, som har en rot x^* mellan 0 och 1.
a) Bestäm roten x^* approximativt med en iteration i Newtons metod med start i $x_0 = 1$. Ange utan att göra några numeriska beräkningar hur du approximativt skulle uppskatta felet i den erhållna approximationen. **(2p)**
b) Bestäm en kvadratisk spline s med nod i x^* som interpolerar f i 0, x^* och 2 och som uppfyller $s'(0) = f'(0)$. Formeln för s får innehålla x^* alternativt approximationen från a-uppgiften (om du löst den). **(4p)**

Uppgift 7. Vid studiet av en viss larv är man intresserad av sambandet mellan larvens vikt W och dess syrekonsumtion R. Av biologiska skäl gäller sambandet $R = bW^a$ och man önskar bestämma parametrarna a och b genom att anpassa till uppmätta data
$(R_i,\ W_i),\ i = 1,\ ...,\ m.$
a) Linjärisera modellen och ange hur linjär minsta-kvadrat-anpassning kan användas. Skriv upp ekvationssystemet som man får att lösa. **(3p)**
b) Behåll den ursprungliga modellen och använd icke-linjär minsta-kvadrat-anpassning. Ange residual och Jakobian, med explicit angivande av ingående derivator. Sätt upp Gauss-Newtons metod för lösning av problemet. Hur kan man få lämplig startapproximation? **(4p)**

Uppgift 8. Heuns metod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer definieras av:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$

Bestäm approximationsordning och stabilitetsområde för Heuns metod. **(5p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 28 augusti 2008

1a) Lös homogena systemet $Ax = 0$, ger $Nul(A) = Span\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Radreduktion på A ger $Col(A) = Span\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$. Rangen är $dim(Col(A)) = 2$.

1b) Ortogonalisera $Col(A)$ med Gram-Schmidt: $\bar{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\hat{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Matrisen Q har dessa kolonner, $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och R får vi genom matrismultiplikation $R = Q^T A = \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1c) Genom enkel variant på vanlig Gausselimination finner vi att $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 \\ 0.5 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$,

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2a) Ortogonaliteten följer av standardformlerna:
$\int_0^{2\pi} sin\ \alpha t\ sin\ \beta t\ dt = \frac{1}{2}[\int_0^{2\pi} cos\ (\alpha - \beta)t\ dt - \int_0^{2\pi} cos\ (\alpha + \beta]t\ dt]$
$\int_0^{2\pi} sin\ \alpha t\ cos\ \beta t\ dt = \frac{1}{2}[\int_0^{2\pi} sin\ (\alpha - \beta)t\ dt + \int_0^{2\pi} sin\ (\alpha + \beta)t\ dt]$
$\int_0^{2\pi} cos\ \alpha t\ cos\ \beta t\ dt = \frac{1}{2}[\int_0^{2\pi} cos\ (\alpha - \beta)t\ dt + \int_0^{2\pi} cos\ (\alpha + \beta)t\ dt]$
för $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \beta = 0,\ 1,\ 2$ och att alla dessa integraler har värdet 0 för $\alpha \neq \beta$.

2b) Bästa approximation på ortogonalmängd bestäms enligt standardformeln:
$\hat{f} = \frac{<f,\ 1>}{<1,\ 1>}1 + \frac{<f,\ cos\ t>}{<cos\ t,\ cos\ t>}cos\ t + \frac{<f,\ sin\ t>}{<sin\ t,\ sin\ t>}sin\ t + \frac{<f,\ cos\ 2t>}{<cos\ 2t,\ cos\ 2t>}cos\ 2t + \frac{<f,\ sin\ 2t>}{<sin\ 2t,\ sin\ 2t>}sin\ 2t.$
Här är $< f,\ 1 >= -\pi + \pi = 0,\quad < f,\ cos\ t >= \int_0^\pi -cos\ t + \int_\pi^{2\pi} cos\ t\ dt = 0,$
$< f,\ sin\ t >= \int_0^\pi -sin\ t\ dt + \int_\pi^{2\pi} sin\ t\ dt = -4,$
$< f,\ cos\ 2t >= \int_0^\pi -cos\ 2t\ dt + \int_\pi^{2\pi} cos\ 2t\ dt = 0,$
$< f,\ sin\ 2t >= \int_0^\pi -sin\ 2t\ dt + \int_\pi^{2\pi} sin\ 2t\ dt = 0$ och $< sin\ t,\ sin\ t >= \int_0^{2\pi} sin^2 t\ dt = \pi,$
så $\hat{f} = -\frac{4}{\pi} sin\ t.$

3a) Linjäriteten visas på standardsätt:
$T(f + h) = ((f + h)g)' = (fg + hg)' = (fg)' + (hg)' = T(f) + T(h)$
$T(cf) = ((cf)g)' = c(fg)' = cT(f).$
3b) Standardbaserna är $b_i = t^{i-1}$ med $i = 1,\ ...,\ n+1$ för P_n och $i = 1,\ ...,\ n+2$ för P_{n+1}. Avbildningen på baselementen blir $T(b_i) = (t^{i-1}\ t^2)' = (t^{i+1})' = (i+1)t^i$, vars koordinater i standardbasen för P_{n+1} ger elementen i matrisen, som blir

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2 & 0 & & & & \\ 0 & 3 & 0 & & & \\ & ... & ... & ... & & \\ & & ... & ... & ... & \\ & & & ... & n+1 & 0 \\ & & & & 0 & n+2 \end{bmatrix}.$$

3c) De singulära värdena till M är roten ur egenvärdena till $M^T M$. Denna matris är diagonalmatrisen $diag(4, 9, ..., (n+2)^2)$ så de singulära värdena är $2, 3, ..., n+2$. Högersingulära vektorer motsvarar egenvektorerna till $M^T M$ och de är enhetsvektorerna, men som egen-funktioner blir det alltså $b_i = t^{i-1},\ i = 1,\ ...,\ n+1$.

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_3 = -3$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (1, -1, 0)^T,\ v_2 = (1, 1, 1)^T$ och $v_3 = (0, 0, 1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 2.$

Lösningen blir alltså $x = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{-3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Nu blir matrisen $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ med egenvärden och egenvektorer enligt: $\lambda_3 = -3,\;\; v_3 = (0,0,1)^T,\;\; \lambda_{1,2} = -2,\;\; v_{1,2} = (1,0,1)^T$. Egenvektorerna bildar ej bas så metoden fungerar inte.

4c) Metoden stabil på problemet om $h\lambda_i \in S$ för alla egenvärden $\lambda_i,\; i = 1,2,3$. Stabilitetsområdet för Euler framåt är $\{z \in C; |z+1| \leq 1\}$ och $0.4\lambda_i \in S$ för alla egenvärdena så metoden är stabil.

4d) Metoden blir: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + hAx^{(k)}$ och med start i $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ får vi med två steg:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.4 \\ -1 \end{bmatrix},\;\; x^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.4 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.32 \\ -0.08 \\ -0.28 \end{bmatrix}.$$

5a) Låt μ vara avrundningsenheten. Framåtanalys ger: $\hat{x} = fl(x) = x(1+\epsilon_1)$.
$fl(\hat{x}^2) = \hat{x}^2(1+\epsilon_2) = x^2(1+\epsilon_1)^2(1+\epsilon_2) = x^2(1+2\epsilon_1+\epsilon_2+O(\mu^2))$, med $|\epsilon_i| \leq \mu,\; i = 1,2$.
Vi får alltså följande feluppskattning: $\frac{|fl(\hat{x}^2)-x^2|}{x^2} \leq 3\mu + O(\mu^2)$.

5b) Algoritmen är stabil om bakåtfelet är litet. Bakåtanalysen ger:
Enligt lösning 5a) ovan gäller: $fl(\hat{x}^2) = x^2(1+\epsilon_1)^2(1+\epsilon_2) = \bar{x}^2$, om vi definierar $\bar{x} = x(1+\epsilon_1)\sqrt{1+\epsilon_2}$.
Enkel taylorutveckling ger $\bar{x} = x(1+\epsilon_1)(1+\frac{\epsilon_2}{2}+O(\mu^2)) = x(1+\epsilon_1+\frac{\epsilon_2}{2}+O(\mu^2))$ varav följer $\frac{|\bar{x}-x|}{|x|} \leq \frac{3}{2}\mu + O(\mu^2)$. Bakåtfelet är litet och algoritmen är alltså stabil.

5c) $OFL = 2^{1024}(1-2^{-53}) \approx 2^{1024} = OFL_+,\;\; \sqrt{OFL_+} = 2^{512}$ är alltså lite för stort men närmaste lägre flyttal går bra dvs $2^{512}(1-2^{-53})$.

6a) Newtons metod: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{-4} = 0.75$.
Feluppskattning: $|x_1 - x^*| \leq \frac{|f(x_1)|}{|f'(x_1)|}$.

6b) Splinen har två delar, $s_1(x),\; 0 \leq x \leq x^*$ och $s_2(x),\; x^* \leq x \leq 2$.
Ansätt $s_1(x) = a+bx+cx^2$ med $s'(x) = b+2cx$. Interpolationsvillkoret $s(0) = f(0) = 0$ ger $a = 0$ och villkoret $s'(0) = f'(0) = 1$ ger $b = 1$. Interpolationsvillkoret $s(x^*) = f(x^*) = 0$ ger $c = -\frac{1}{x^*}$ och första delen är bestämd: $s_1(x) = x - \frac{x^2}{x^*}$ med $s_1'(x^*) = -1$.
För den andra delen ansätter vi $s_2(x) = d(x-x^*)+e(x-x^*)^2$ så att interpolationsvillkoret $s_2(x^*) = 0$ är uppfyllt direkt genom ansatsen. Nu gäller $s_2'(x) = d+2e(x-x^*)$ och splinevillkoret $s_2'(x^*) = s_1'(x^*) = -1$ ger $d = -1$. Slutligen ger interpolationsvillkoret $s_2(2) = f(2) = -2$ att $e = -\frac{x^*}{(2-x^*)^2}$ och andra spline-delen är bestämd:
$s_2(x) = -(x-x^*) - \frac{x^*}{(2-x^*)^2}(x-x^*)^2$.
Alternativt kan man alltså ersätta x^* med 0.75 här för approximativ spline.

7a) $R_i = bW_i^a$. Linjärisering: $ln(R_i) = \hat{b} + a\ ln(W_i)$, med $\hat{b} = ln(b)$

Överbestämt linjärt ekvationssystem: $\begin{bmatrix} ln(W_1) & 1 \\ ln(W_2) & 1 \\ ... & ... \\ ln(W_m) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln(R_1) \\ ln(R_2) \\ ... \\ ln(R_m) \end{bmatrix}$.

Återfransformera $b = e^{\hat{b}}$.

7b) Residualer $f_i = R_i - bW_i^a$, $F = [f_1\ f_2\ ...\ f_m]^T$. Jakobian $J = \begin{bmatrix} -b\ ln(W_1)W_1^a & -W_1^a \\ -b\ ln(W_2)W_2^a & -W_2^a \\ ... & ... \\ -b\ ln(W_m)W_m^a & -W_m^a \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $\quad F_k = F(a_k, b_k)$.
Starta med lösningen från linjäriserat problem enligt a-uppgiften.

8) Tillämpa metoden på testproblemet: $y' = \lambda y$.
Vi får då $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)\} = y_k + h\lambda y_k + \frac{h^2\lambda^2}{2} y_k = y_k(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})$.
För approximationsordningen jämför vi tillväxtfaktorn $1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}$ med tillväxtfaktorn för den exakta lösningen $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + ...$ och finner att de överensstämmer med tre termer. Lokala felet är då $= O(h^3)$ och approximationsordningen är 2.
Stabilitetsområdet är mängden $h\lambda$ i komplexa talplanet för vilka lösningarna är begränsade.
Vi får fram stabilitetsområdet från tillväxtfaktorn ovan med $z = h\lambda$:
$S = \{z \in C; |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$.