Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2008-05-30

DAG: Fredag 30 maj 2008 TID: 14.00 - 18.00 SAL: M

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas var rättad 18 juni, resultat tillsänds dig
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Ta fram en ON-bas för $Col(A)$. **(4p)**
b) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av A. **(2p)**
c) Lägg till en fjärde kolonn till A så att $Nul(A) = Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. **(2p)**

Uppgift 2. Betrakta avbildningen
$F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (2a_1 - 2a_2) + (2a_0 + 3a_2)t + 3a_2t^2$
från P_2 till P_2, där P_2 är rummet av polynom av grad ≤ 2.
a) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen $e_1 = 1,\ e_2 = t,\ e_3 = t^2$. **(2p)**
b) Visa att även $b_1 = 1 + t,\ b_2 = 1 - t,\ b_3 = t + t^2$ är bas i P_2 och bestäm matrisen för avbildningen i denna bas. **(3p)**
c) Bestäm tre egenvektorer och motsvarande egenvärden till avbildningen F. **(2p)**

Uppgift 3.
Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ under villkor att $x^Tx = 2$. **(2p)**
b) Bestäm en vektor u med $u^Tu = 2$ så att $Q(u)$ är maximal. **(2p)**
c) Bestäm största värdet på $Q(x)$ under villkoren $x^Tx = 1$ och $x^Tu = 0$ där u är lösningen i b)-uppgiften. Bestäm även två vektorer x för vilka $Q(x)$ antar detta största värde. **(2p)**

Uppgift 4.
a) Skriv upp formeln för trunkerad minsta-kvadrat-lösning till problemet $min_x\|Ax - b\|_2$ där $A \in R^{m\times n}$, $m > n$. Formeln bygger på SVD (singulärvärdesuppdelning). **(3p)**
b) Varför är trunkerad minsta-kvadrat ofta att föredra framför icke trunkerad? Ange två skäl. **(2p)**
c) Ge ett enkelt uttryck för $\|A\|_2$ som bygger på SVD. **(2p)**

Uppgift 5.
a) Visa att Newtons metod för ekvationslösning i en variabel konvergerar linjärt med asymptotisk felkonstant $C = 2/3$ vid trippelrot. **(4p)**
b) Ange en feluppskattningsformel som bland annat kan användas vid Newtons metod. Vid vilka typer av rötter är den användbar? **(2p)**

Uppgift 6.
a) Bestäm en kvadratisk spline s med nod i $x = 0.5$, som interpolerar $f(x) = x^3$ i punkterna 0, 0.5 och 1 och som uppfyller villkoret $s'(0) = 0$. **(5p)**
b) Bestäm en approximation till $\int_0^1 s(x)\, dx$, där s är splinen i a)-uppgiften, med trapetsformeln och steg $h = 0.5$. **(2p)**

Uppgift 7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet
$y'' + cy' + y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ för $t \geq 0$ och där c är en positiv parameter.
a) Skriv om problemet till ett system av första ordningens differentialekvationer. **(2p)**
b) Undersök för vilka värden på c som problemet är stabilt. **(2p)**
c) Välj $c = 1$ och gör ett steg med Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 0.1$ på systemet i a)-uppgiften. **(4p)**
d) Anta att vi vill bestämma c så att $y'(1) = 0.5$. Skriv upp den ekvation som ska lösas samt formulera en lämplig iterativ numerisk metod för att lösa ekvationen. Vari består det tyngsta arbetet under en iteration av metoden? **(4p)**

Uppgift 8.
a) Definiera matematiskt vad som menas med en sökmetod vid minimering av en funktion i flera variabler utan bivillkor. Ange speciellt vad som menas med sökriktning och steglängd. **(2p)**
b) Formulera det så kallade linjesökningsproblemet vid minimering enligt a)-uppgiften. **(2p)**
c) Vid en kvasi-Newton metod väljs sökriktning i punkten x_k som $-B_k^{-1}\nabla f(x_k)$. Visa att detta blir en descentriktning om B_k är positivt definit. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 30 maj 2008

1a) Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på kolonnerna $a_1,\ a_2$ och a_3.

$$\hat{a_1} = a_1,\quad \hat{a_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \hat{a_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normering ger nu ON-systemet: $\bar{a_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{a_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ \bar{a_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$

b) Q är matrisen med kolonner $\bar{a_1},\ \bar{a_2},\ \bar{a_3}$ enligt a)-uppgiften.

R beräknas som $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

c) Den fjärde kolonnen ska alltså vara $a_4 = -a_1 + a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$

2a) Vi får $F(e_1) = 2t^2 = 2e_2,\ F(e_2) = 2 = 2e_1,\ F(e_3) = -2 + 3t + 3t^2 = -2e_1 + 3e_2 + 3e_3.$

Matrisen för avbildningen blir då $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Överföringsmatrisen mellan denna bas och standardbasen är $P_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
som är reguljär ty kolonnerna linjärt oberoende, alltså är basen ok!
Vi får $F(b_1) = 2 + 2t = 2b_1,\ F(b_2) = -2 + 2t = -2b_2, F(b_3) = 3t + 3t^2 = 3b_3$. Matrisen för avbildningen i B-basen blir alltså $M' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

c) Egenvärdena tar vi enklast från matrisen M' och de är 2, -2 och 3. Motsvarande egenvektorer är $b_1 = 1 + t,\ b_2 = 1 - t,\ b_3 = t + t^2$.

3 Den kvadratiska formen kan skrivas $Q(x) = x^T Ax$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Egenvärdena till A är $3 - \sqrt{2}$, 3 och $3 + \sqrt{2}$. Det gäller att $x^T Ax \leq \lambda_{max} x^T x$. Det största värdet är på $Q(x)$ då $x^T x = 2$ är alltså $2\lambda_{max} = 6 + 2\sqrt{2}$.

b) Största värdet antas för egenvektor motsvarande λ_{max} och som är $\begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ normerad till längd $\sqrt{2}$ dvs $u = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Detta största värde är näst största egenvärde dvs 3 och antas för motsvarande normerade egenvektor dvs $x = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4a) En trunkerad minsta-kvadrat-lösning med k termer definieras som $\hat{x_k} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{-1} v_i u_i^T b$, där σ_i är singulära värden, u_i är vänstersingulära vektorer och v_i är högersingulära vektorer.
b) Mindre konditionstal och färre flyttalsoperationer (färre termer i summan).
c) $\|A\|_2 = \sigma_1$, det största singulära värdet.

5a) Taylorutveckling av funktionen och derivatan runt en trippelrot x^* blir:
$f(x_k) = f(x^*) + f'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2}(x_k - x^*)^2 + \frac{f'''(x^*)}{6}(x_k - x^*)^3 + ...$
$f'(x_k) = f'(x^*) + f''(x^*)(x_k - x^*) + \frac{f'''(x^*)}{2}(x_k - x^*)^2 + ...$
Här är $f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = 0$ och en iteration i Newtons metod blir
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2f'''(x^*)(x_k - x^*)^3}{6f'''(x^*)(x_k - x^*)^2} + ...$
Vi antar att vi har konvergens och låter $k \to \infty$ så att lägre ordnings termer försvinner. Vi får då $x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{1}{3}(x_k - x^*) = \frac{2}{3}(x_k - x^*)$. Vi har visat att $\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} \to \frac{2}{3}$ då $k \to \infty$ och konvergensen är alltså linjär med asymptotiska felkonstanten $\frac{2}{3}$.

b) $|x^* - \hat{x}| \lesssim \frac{|f(\hat{x})|}{|f'(\hat{x})|}$, som är användbar vid enkelrot.

6a) Splinen har två delar, $s_1(x)$, $0 \leq x \leq 0.5$ och $s_2(x)$, $0.5 \leq x \leq 1$.
Ansätt $s_1(x) = a + bx + cx^2$ med $s'(x) = b + 2cx$. Interpolationsvillkoret $s(0) = f(0) = 0$ ger $a = 0$ och villkoret $s'(0) = 0$ ger $b = 0$. Interpolationsvillkoret $s(0.5) = f(0.5) = 0.125$ ger $c = 0.5$ och första delen är bestämd: $s_1(x) = 0.5x^2$ med $s'(x) = x$.
För den andra delen ansätter vi $s_2(x) = 0.125 + d(x - 0.5) + e(x - 0.5)^2$ så att interpolationsvillkoret $s_2(0.5) = 0.125$ är uppfyllt direkt genom ansatsen. Nu gäller $s_2'(x) = d + 2e(x - 0.5)$ och splinevillkoret $s_2'(0.5) = s_1'(0.5) = 0.5$ ger $d = 0.5$. Slutligen ger interpolationsvillkoret $s_2(1) = f(1) = 1$ att $e = 2.5$ och andra spline-delen är bestämd: $s_2(x) = 0.125 + 0.5(x - 0.5) + 2.5(x - 0.5)^2$.
b) För att lösa denna uppgift behöver man inte beräkna splinen eftersom funktionen f likaväl kan approximeras, $s = f$ i aktuella punkter för kvadraturformeln.
Vi får $\int_0^1 s(x)\, dx \approx \frac{0.5}{2}[f(0) + 2f(0.5) + f(1)] = 0.25(0 + 0.25 + 1) = 0.3125$.

7a) Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ så blir systemet på matrisform
$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$
b) Egenvärdena till matrisen i a)-uppgiften är $0.5(-c \pm \sqrt{c^2 - 4})$ och det gäller att realdelen för egenvärdena är icke-positiva då $c > 0$, alltså är problemet alltid stabilt.
c) Euler bakåt på system $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ ser ut: $y_{k+1} = y_k + h(Ay_{k+1} + b_k)$ dvs $(I - hA)y_{k+1} = y_k + hb_k$. Här får vi $y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, $(I - hA)y_1 = y_0 + hb_0$.
Detta ekvationssystem är med $h = 0.1$ och matrisen A enligt a)-uppgiften med $c = 1$:
$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0.1 & 1.1 \end{bmatrix} y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.01 \end{bmatrix}$ med lösning $y_1 = \frac{1}{11.1} \begin{bmatrix} 1.01 \\ 10.1 \end{bmatrix}$.
d) Ekvationen att lösa blir $y_2(1, c) = 0.5$ eller $q(c) \equiv y_2(1, c) - 0.5 = 0$. Sekantmetoden är lämplig: $c_{k+1} = c_k - \frac{(y_2(1,c_k)-0.5)(c_k-c_{k-1})}{y_2(1,c_k)-y_2(1,c_{k-1})}$, $k = 1, 2, ...$, med två startapproximationer c_0 och c_1. Det tyngsta arbetet i en iteration är all lösa ode-systemet.

8a) En sökmetod är en iterativ metod på formen $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ med startapproximation x_0, d_k sökriktning i punkten x_k och α_k är steglängd längs den valda sökriktningen.
b) Linjesökningsproblemet innebär att bestämma optimal steglängd när sökriktningen är vald. Problemet kan alltså formuleras $min_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$, där f är funktionen som ska minimeras.
c) d_k är en descentriktning i x_k om $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$. För kvasi-Newton-riktningen gäller $\nabla f(x_k)d_k = -\nabla f(x_k)B_k^{-1}\nabla f(x_k) < 0$ ty B_k och därmed även B_k^{-1} är positivt definit (egenvärdena positiva för båda matriserna). Definitionen på positivt definit är att $y^T B_k y > 0$ för alla $y \neq 0$ speciellt gäller detta då för $y = \nabla f(x_k)$.