Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2007-08-31

DAG: Fredag 31 augusti 2007 TID: 8.30 -12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad 17 september, resultat tillsänds dig.
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen 12.30-13.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall motiveras väl

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a) Bestäm baser för värderum och nollrum samt rangen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.
(3p)
b) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen i a-uppgiften. **(3p)**
c) Betrakta optimeringsproblemet $max\ 3x_1 + x_2 + x_3$ under bivillkoren $Ax \leq b$ och $x \geq 0$, där A är matrisen i a-uppgiften och $b = [1\ 1\ 1\ 1]^T$. Antag att vi (i ett första lösningssteg) sätter $x_3 = 0$. Lös det återstående optimeringsproblemet för variablerna x_1 och x_2 grafiskt. **(4p)**

Uppgift 2. En matris $A \in R^{n\times n}$ är skevsymmetrisk om $A = -A^T$.
a) Bestäm diagonalen hos en skevsymmetrisk matris samt mängden av alla matriser som är både symmetriska och skevsymmetriska. **(3p)**
b) Visa att en skevsymmetrisk matris har rent imaginära egenvärden. **(4p)**
c) Visa att om A är skevsymmetrisk och n är udda så är A singulär (icke reguljär). **(3p)**

Uppgift 3. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 6x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_2x_3$.
a) Karakterisera den kvadratiska formen - är den positivt definit, negativt definit eller indefinit? **(1p)**
b) Bestäm största och minsta värde på $Q(x)$ då $\|x\|_2 = 1$. Bestäm alla vektorer u med $\|u\|_2 = 1$ sådana att $Q(u)$ blir maximal resp. minimal. **(4p)**
c) Låt u_1 vara vektor så att $u_1^T u_1 = 6$ och $Q(u_1)$ maximal. Bestäm största värdet på $Q(x)$ under villkoren $\|x\|_2 = 1$ och $x^T u_1 = 0$ och ange en vektor x som ger detta värde. **(2p)**

Uppgift 4. Låt $P_k[0,1]$ vara rummet av polynom av grad $\leq k$ på intervallet $[0,1]$.
a) Bestäm en ortogonal bas för $P_2[0,1]$ med avseende på skalärprodukten
$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ på $C[0,1]$. **(3p)**
b) Bestäm ortogonalprojektionen av t^3 på $P_2[0,1]$ med avseende på skalärprodukten i a-uppgiften. **(2p)**
c) Bestäm basbytesmatrisen mellan basen i a-uppgiften och standardbasen. **(2p)**

Uppgift 5. Antag att vi vill lösa minstakvadrat-problemet $min_x \|Ax - b\|_2$,
där $A \in R^{m \times n}$, $m > n$ och $b \in R^m$.
a) Ange formellt normalekvationslösningen till problemet. Varför är denna lösning ofta inte så bra ur numerisk synvinkel? **(2p)**
b) Det finns metoder som är bättre än metoden i a-uppgiften vad gäller numeriska aspekter. Ange två sådana metoder och skriv formellt upp respektive lösningsformel. Ange speciellt ingående matrisers egenskaper. **(4p)**

Uppgift 6. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 2x_1x_2 + 2 = 0 \\ x_1^3x_2^2 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1x_3^3 - 1 = 0 \end{cases}$.
a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Det visar sig att efter fyra iterationer enligt a-uppgiften är felet $\|x^{(4)} - x^*\|_2 \approx 0.0075$ och roten x^* är reguljär. Hur många ytterligare iterationer kan du förväntas få göra innan felet $\|x^{(k)} - x^*\|_2 \leq 10^{-12}$? **(2p)**

Uppgift 7. En funktion $f(x)$ är beräknad i fyra punkter enligt tabellen:

x	0	1	2	3
f	1	-1	2	5

a) Bestäm, som approximation till f, interpolationspolynomet genom punkterna. **(3p)**
b) Bestäm, som approximation till f, en kvadratisk spline s genom punkterna, som uppfyller $s'(0) = -2$. **(4p)**

Uppgift 8. Vi vill lösa följande differentialekvation numeriskt:
$y'' + 3y^2 = 4t, y(0) = 1,\ y'(1) = 2$.
a) Skriv om problemet till ett system av första ordningen. **(1p)**
b) Formulera inskjutningsmetoden för att lösa problemet. **(3p)**
c) Formulera en lämplig metod att lösa den ekvation som inskjutningsmetoden ger upphov till. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 31 augusti 2007

1a) Lös homogena systemet $Ax = 0$, ger $Nul(A) = Span\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Radreduktion på A ger $Col(A) = Span\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$. Rangen är $dim(Col(A)) = 2$.

b) Genom enkel variant på vanlig Gausselimination finner vi att $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}$,

$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Vi löser det reducerade problemet $max\ 3x_1 + x_2$ med bivillkoren:
$2x_1 + x_2 \leq 1,\ 2x_1 \leq 1,\ x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 2x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.
Grafisk metod innebär att man i (x_1, x_2)-planet ritar ut dessa bivillkor och får ett tillåtet område som är ett konvext polygonområde. Sedan ritas objektfunktionen ut som den räta linjen $3x_1 + x_2 = 0$. Denna linje parallell-förflyttas uppåt tills den lämnar det tillåtna området. Detta sker i punkten $(0.5, 0)$ och lösningen är alltså $x_1 = 0.5,\ x_2 = 0$.

2a) $diag(A) = diag(-A^T) = diag(-A) = -diag(A) \Rightarrow diag(A) = 0$.
$A = -A^T =$(ty A symmetrisk)$= -A \Rightarrow A = 0$.
b) $Ax = \lambda x,\ x \in C^n, \lambda \in C$. Multiplicera från vänster med $\bar{x}^T$ och vi får
(1) $\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$
Här är vänsterledet skalären $\alpha = \bar{x}^T Ax = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T \bar{x} = -x^T \bar{A}\bar{x} = -\bar{\bar{x}}^T \bar{A}\bar{x} = -\bar{\alpha} \Rightarrow \alpha = \bar{x}^T Ax$ rent imaginärt. Vidare är i (1) $\bar{x}^T x$ reellt och därmed är λ imaginärt ty kvoten mellan imaginärt och reellt tal.
c) Egenvärden till reell matris förekommer komplexkonjugerade ty:
$Ax = \lambda x \Rightarrow \bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$.
Om A är av udda ordning innebär det att minst ett egenvärde är reellt. Här är alla imaginära, alltså är minst ett lika med noll, dvs A är singulär.

3 Egenvärden och egenvektorer bestäms. Karakteristiska ekvationen

$(6-\lambda)[(2-\lambda)(6-\lambda)-32]$ har lösningarna $\lambda = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvektorer

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

3a Egenvärden med olika tecken ger att den kvadratriska formen är indefinit.
b) Enligt sats i Lay gäller $-2 \leq \frac{Q(x)}{x^T x} \leq 10$, där övre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}[1 \ \ 1 \ \ 1]^T$ och undre gränsen antas för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}[1 \ \ -2 \ \ 1]^T$.
c) Enligt sats i Lay blir $max\frac{Q(x)}{x^T x}$ under givna villkor det näst största egenvärdet dvs 6 och antas för motsvarande egenvektor, normerad, dvs för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[-1 \ \ 0 \ \ 1]^T$.

4a) Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess tillämpas utgående från standardbasen $\{1,\ t,\ t^2\}$:
$p_1 = 1,\ p_2 = t - \frac{\int_0^1 t\ dt}{\int_0^1 1\ dt} = t - \frac{1}{2},\ p_2 = t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\ dt}{\int_0^1 1\ dt} - \frac{\int_0^1 t^2(t-0.5)\ dt}{\int_0^1 (t-0.5)^2\ dt}(t-0.5) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$
b) $Proj_{P_2}\ t^3 = \frac{<t^3,p_1>}{<p_1,p_1>}p_1 + \frac{<t^3,p_2>}{<p_2,p_2>}p_2 + \frac{<t^3,p_3>}{<p_3,p_3>}p_3 = \int_0^1 t^3\ dt +$
$+12\int_0^1 t^3(t-\frac{1}{2})\ dt\ (t-\frac{1}{2}) + 180\int_0^1 t^3(t^2-t+\frac{1}{6})\ dt\ (t^2-t+\frac{1}{6}) = \frac{1}{4} + \frac{9}{10}(t-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(t^2-t+\frac{1}{6}).$
c) Koordinaterna i standardbasen för baselementen i basen enligt a-uppgiften sätts som kolonner i basbytesmatrisen, som blir $P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5a) Formellt $x = (A^T A)^{-1} A^T b$. Stort konditionstal hos $A^T A$ kan ge stora fel.
b) Kompakt QR-faktorisering $A = QR$, Q med ortogonala kolonner och R uppåt triangulär med positiv diagonal: $x = R^{-1} Q^T b$.
Kompakt SVD-faktorisering $A = U\Sigma V^T$, U och V med ortogonala kolonner och Σ diagonal med positiv diagonal: $x = V\Sigma^{-1} U^T b$.

6a) $f = \begin{cases} 2x_1 + 2x_1x_2 + 2 \\ x_1^3 x_2^2 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1 x_3^2 - 1 \end{cases} \quad J = \begin{bmatrix} 2+2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 3x_1^2 x_2^2 & -4 + 2x_2 x_1^3 & 1 \\ -2x_1 - x_3^2 & 1 & -2x_3 x_1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$

b) Det krävs tre iterationer ytterligare ty kvadratisk konvergens och $0.0075^{2^3} \leq 10^{-12}$.

7a) Sätt $p_3 = a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$ (Newtons form). Bestäm koefficienterna en efter en:
$p_3(0) = 1$ ger $a = 1$
$p_3(1) = -1$ ger $1 + b = -1$, dvs $b = -2$
$p_3(2) = 2$ ger $1 - 4 + 2c = 2$ dvs $c = 5/2$
$p_3(3) = 5$ ger $1 - 6 + 15 + 6d = 5$ dvs $d = -5/6$.
Interpolationspolynomet blir: $p_3 = 1 - 2x + \frac{5}{2}x(x-1) - \frac{5}{6}x(x-1)(x-2)$
b) Det blir tre spline-delar:
$s_1 = 1 + ax + bx^2$ mellan 0 och 1: $s_1' = a + 2bx$. Villkor $s_2'(0) = -2$ ger $a = -2$ och villkor $s_1(1) = -1$ ger $b = 0$.
$s_2 = -1+c(x-1)+d(x-1)^2$ mellan 1 och 2: $s_2' = c+2d(x-1)$. Villkor $s_2'(1) = s_1'(1) = -2$ ger $c = -2$ och villkor $s_2(2) = 2$ ger $d = 5$.
$s_3 = 2 + e(x-2) + f(x-2)^2$ mellan 2 och 3: $s_3' = e + 2f(x-2)$. Villkor $s_3'(2) = s_2'(2) = 8$ ger $e = 8$ och villkor $s_3(3) = 5$ ger $f = -5$.
Vi får alltså spline-delarna:
$s_1 = 1 - 2x,\ s_2 = -1 - 2(x-1) + 5(x-1)^2,\ s_3 = 2 + 8(x-2) - 5(x-2)^2$.

8a) Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Systemet blir $\begin{cases} y_1{}' = y_2 \\ y_2{}' = 4t - 3y_1^2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(1) = 2 \end{cases}$

b) Inskjutningsmetoden innebär att skriva problemet som $\begin{cases} y_1{}' = y_2 \\ y_2{}' = 4t - 3y_1^2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = s \end{cases}$

och lösa ekvationen: $q(s) \equiv y_2(1, s) - 2 = 0$.
c) Sekantmetoden för att lösa $q(s) = 0$ blir:
$s_{k+1} = s_k - \frac{(y_2(1,s_k)-2)(s_k-s_{k-1})}{y_2(1,s_k)-y_2(1,s_{k-1})},\ k = 1, 2, ...$ med två startskott s_0 och s_1