Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2007-01-15

DAG: Måndag 15 januari 2007 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Anslås vid sal MVF21 senast 29 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Låt $A = LL^T$ vara en symmetrisk faktorisering av matrisen A.
a) Visa att nollrummen för A och L^T är identiska. **(3p)**
b) Visa att värderummen för A och L är identiska. **(3p)**.
c) Bestäm en nedåt triangulär matris L så att $LL^T = A$ då $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ **(3p)**
d) Bestäm baser för värderum och nollrum till matrisen A i c-uppgiften. Du får använda resultaten i a- och b-uppgifterna om du vill. **(3p)**

Uppgift 2.
a) Utför första steget av en QR-faktorisering av matrisen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **(4p)**
b) Varför är det i många fall bättre att använda QR-faktorisering vid lösning av överbestämt linjärt ekvationssystem än att använda normalekvationerna? **(2p)**
c) Beskriv hur det går till att lösa ett överbestämt linjärt ekvationssystem med singulärvärdesfaktorisering (SVD). **(3p)**

Uppgift 3.

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + x_3(t) & x_1(0) = 3 \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) & x_2(0) = -1 \\ x_3'(t) = -x_3(t) & x_3(0) = 2 \end{cases} . \quad \textbf{(4p)}$$

b) Visa att det blir problem med metoden om sista raden i ekvationssystemet ändras till $x_3'(t) = -2x_3(t)$. **(2p)**

Uppgift 4.

Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_0 - a_3) + (2a_1 - a_0)t + a_3t^2 + (a_3 - a_0)t^3$ från P_3 till P_3, där P_3 är rummet av polynom av grad ≤ 3. Visa att $p_1 = 1,\ p_2 = 2-t,\ p_3 = -2 - t + t^2 + 2t^3,\ p_4 = 1 - t + t^3$ är bas i P_3 och bestäm matrisen för avbildningen i denna bas. **(6p)**

Uppgift 5.

Betrakta Newtons metod för att lösa ekvationen $x^3 - 4x^2 + 2x + 2 = 0$. Vi söker den reella roten mellan 1 och 2.

a) Gör en iteration med Newtons metod från $x_0 = 1$ för att bestämma en approximation till roten. **(2p)**

b) Gör en iteration med sekantmetoden och startapproximationer $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ för att bestämma en approximation till roten. **(2p)**

c) Det visar sig att efter två iterationer med Newtons metod enligt a-uppgiften är felet $\mid x^{(2)} - x^* \mid \approx 3.3 \cdot 10^{-6}$. Hur många ytterligare iterationer kan du förväntas behöva göra innan felet är av storlek som enkel maskinprecision (eps). **(3p)**

Uppgift 6.

Genom de fyra punkterna (0,2), (1,-3), (2,-2) och (3,5) går dels andragradskurvan $p_2 = 3x^2 - 8x + 2$, dels fjärdegradskurvan $p_4 = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 2$.

a) Hur många polynom av exakt grad 3, dvs polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ med $a_3 \neq 0$, går det genom punkterna? **(2p)**

b) Bestäm en kvadratisk spline s genom punkterna med noder i (1,-3) och (2,-2) och som uppfyller kravet $s'(0) = -8$. Är splinen entydigt bestämd? **(2p)**.

c) Bestäm en approximation till $\int_0^3 p_4(x)dx$ med trapetsformeln och steglängd $h = 1$. **(2p)**

Uppgift 7.
Det tryck som erfordras för att sänka ner tunga föremål i mjukt underlag kan bestämmas genom experiment med lättare föremål. Speciellt gäller att trycket p, som krävs för att en cirkulär platta med radie r ska sjunka ner ett avstånd d i underlaget, kan approximeras med ekvationen
$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$
där $k_1,\ k_2$ och k_3 är konstanter som beror på underlagets beskaffenhet och d, men inte på r. För att bestämma dessa konstanter kan man allstå mäta trycken som krävs för att sänka ner tre små plattor med olika radier $r_1,\ r_2$ och r_3 till samma djup d.
a) Skriv upp det icke-linjära ekvationssystem som ska lösas. Ange en iterativ metod för dess lösning och kommentera vilket subproblem som ska lösas i varje iteration och vilken metod som används för detta subproblem. **(3p)**
b) Om man gör fler än tre prov av ovanstående slag blir systemet överbestämt. Ange en iterativ metod att lösa detta problem i minsta-kvadrat-mening. Tala även om hur ingående subproblem ser ut och hur det lämpligen löses. **(4p)**

Uppgift 8.
Betrakta begynnelsevärdesproblemet
$y' = -2y^3 + 2ty^2, \quad y(0) = 1.$
a) Anta att du vill använda Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ för att bestämma en approximation till $y(0.1)$. Skriv upp den tredjegradsekvation som du får att lösa. **(3p)**
b) Man behöver inte lösa tredjegradsekvation om man använder Eulers framåtmetod som prediktor och gör fixpunktsiteration i Eulers bakåtmetod (korrektorn). Gör en fixpunktsiteration för att approximera $y(0.1)$. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 15 januari 2007

1a) $x \in Nul(L^T) \Rightarrow L^T x = 0 \Rightarrow LL^T x = 0 \Rightarrow Ax = 0$ dvs $x \in Nul(A)$
$x \in Nul(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow L(L^T)x = 0 \Leftrightarrow L^T x \in Nul(L) \Leftrightarrow L^T x \in Col(L^T)^\perp$. Men enligt definitionen gäller att $L^T x \in Col(L^T) \Rightarrow L^T x = 0 \Leftrightarrow x \in Nul(L^T)$.
b) $b \in Col(A) \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Rightarrow b \in Col(L)$.
$b \in Col(L) \Leftrightarrow Ly = b$. Låt $y = y_1 + y_2$ med $y_1 \in Col(L^T)$, $\quad y_2 \in Nul(L)$. Då gäller $L(y_1 + y_2) = b \Leftrightarrow Ly_1 = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow b \in Col(A)$.
c) Genom enkel variant på vanlig Gausselimination finner vi att $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
d) Värderummet till A är lika med värderummet för L och detta får vi från c-uppgiften direkt: $Span\{[2 \ \ -2 \ \ -1]^T, \ [0 \ 1 \ 2]^T\}$. Nollrummet för A lika med nollrummet för L^T och detta får vi genom att lösa det homogena problemet $L^T x = 0$, med lösning $x = s[-3/2 \ \ -2 \ 1]^T$. Nollrummet är alltså $Span\{[-3/2 \ \ -2 \ 1]^T\}$.

2a) $H = I - 2uu^T$, $\ \hat{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Normaliserad blir $u = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$
och vi får $H \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2(-25)\frac{1}{25 \cdot 2} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och då blir alltså
$HA = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
b) Konditionstalet blir mindre. Om residualen är liten så bestäms störningsanalysen av konditionstalet till A vid QR-faktorisering medan den bestäms av konditionstalet till $A^T A$ vid normalekvationerna.
c) Låt $A = U_1 \Sigma_r V_1^T$ vara kompakt SVD-faktorisering av A. Då ges minsta-kvadrat-lösningen till överbestämda systemet $Ax = b$, med minsta norm på x, av $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b$.

3a) Problemet är på matrisform $y' = Ay$, där $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_3 = -1$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (1, -1, 0)^T,\ v_2 = (0, 1, 0)^T$ och $v_3 = (1, 3, 2)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 2,\ c_2 = -2,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = 2e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3b) Nu blir matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ med egenvärden och egenvektorer enligt: $\lambda_1 = -3,\quad v_1 = (1, -1, 0)^T,\quad \lambda_{2,3} = -2,\quad v_{2,3} = (0, 1, 0)^T$. Egenvektorerna bildar ej bas så metoden fungerar inte.

4) Överföringsmatrisen mellan den givna basen och standardbasen $\{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ är $P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, som är reguljär ty egenvärdena är 1, -1, 1 och 1, alltså är basen ok!

Matrisen för avbildningen blir i standardbasen $M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrisen i den givna basen blir då $M = P_{C \leftarrow B} M' P_{B \leftarrow C}$, där $P_{C \leftarrow B} = P_{B \leftarrow C}^{-1}$= (med Gausselimination) $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Matrismultiplikation ger $M = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

5a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$. Newtons metod ger: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.
5b) Sekantmetoden ger: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - \frac{-2(1)}{-2-1} = \frac{4}{3}$.
5c) Konvergensen är kvadratisk ty enkelrot eftersom $f'(x) \neq 0, \quad x \in (1,2)$. Det krävs då två iterationer ty $(3.3 \cdot 10^{-6})^{2^2} < eps$.

6a) Inga, ty interpolationspolynomet av grad ≤ 3 är p_2 och det är entydigt bestämt.
6b) $s = p_2$ uppfyller alla kraven trivialt och är då den efterfrågade splinen. Ja, den är entydigt bestämd eftersom ett randvillkor satisfierats.
6c) $T(1) = [f(0)/2 + f(1) + f(2) + f(3)/2] = [1 - 3 - 2 + 5/2] = -\frac{3}{2}$

7 a) Lös $f(k) = 0$, där $f_i = p_i - k_1 e^{k_2 r_i} - k_3 r_i, \quad i = 1,2,3$. Newtons metod blir: $k^{(l+1)} = k^{(l)} + d^{(l)}, \quad J(k^{(l)})d^{(l)} = -f(k^{(l)}), \quad l = 1,2, \ldots$ Här är J Jacobianmatrisen $J = \begin{bmatrix} | & | & | \\ -e^{k_2 r_i} & -r_i k_1 e^{k_2 r_i} & -r_i \\ | & | & | \end{bmatrix}$. Ett linjärt ekvationssystem löses i varje iteration, exempelvis med Guasselimination.
b) Problemet kan formuleras:
$min_k \|f(k)\|_2, \quad f_i = p_i - k_1 e^{k_2 r_i} - k_3 r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$
Här kan Gauss-Newtons metod användas. Den ser ut som Newtons metod ovan men ett överbestämt ekvationssystem löses i varje iteration exempelvis med QR-faktorisering (eller SVD).
8a) Eulers bakåtmetod blir: $y_1 = y_0 + 0.1(-2y_1^3 + 0.2y_1^2) = 1 - 0.2y_1^3 + 0.02y_1^2$
Tredjegradsekvationen kan skrivas: $0.2y_1^3 - 0.02y_1^2 + y_1 - 1 = 0$.
b) Eulers framåtmetod: $y_1^{(0)} = 1 + 0.1(-2 + 0) = 0.8$
Fixpunktsiteration: $y_1^{(1)} = 1 + 0.1(-2 \cdot 0.8^3 + 0.2 \cdot 0.8^2) = 0.9104$.