Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2005-05-28

DAG: Lördag 28 maj 2005 TID: 14.15 - 18.15 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Johan Jansson, tel: 0762-721860
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt H_1 och H_2 vara underrum till ett linjärt rum V. Undersök om $H_1 \cup H_2$ alltid är ett underrum till V. **(3p)**
b) Visa att om A och B är ortogonala matriser och $det(A) = -det(B)$ så är $A+B$ singulär (ej inverterbar).
Ledning: Definitioner och produktregel för determinant. **(4p)**

Uppgift 2. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + (a_1 - a_2)t + (a_0 - a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Visa att $B = \{1+t,\ 1-t,\ 1+t+t^2\}$ är bas för P_2 och ange transformationsmatrisen $P_{E \leftarrow B}$ mellan baserna B och E **(2p)**
c) Bestäm matrisen M' för avbildningen F i basen B och verifiera formeln $M' = P_{E\leftarrow B}^{-1} M P_{E\leftarrow B}$. **(3p)**

Uppgift 3.

Vi vill lösa problemet $min_x \|Ax - b\|_2$, med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Lös problemet med normalekvationerna. **(2p)**
b) Lös problemet med QR-faktorisering. **(4p)**
c) Om tredje kolonnen i A ändras till $[\ 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0\ ]^T$ så fungerar inte metoderna i a) eller b). Ange en metod som ger lösningen till problemet med minsta norm $\|x\|_2$. Skriv formellt upp lösningen utan att göra några numeriska beräkningar. **(2p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 6x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ då $x^Tx = 2$. Bestäm alla vektorer u med $u^Tu = 2$ sådana att $Q(u)$ är maximal. **(4p)**
b) Bestäm största värde på $Q(x)$ under villkoren att $x^Tx = 2$ och $x^Tu = 0$ för alla u enligt a)-uppgiften. För vilka x antas detta maxvärde? **(3p)**

Uppgift 5. Vi vill lösa ekvationen $3x^3 - 2x^2 - 0.99 = 0$ med Newtons metod.
a) En rot x^* till ekvationen ligger nära 1. Använd den informationen för att bestämma konvergenshastighet och (approximativt) asymptotisk felkonstant vid konvergens mot roten. **(3p)**
b) Mer noggrant gäller $x^* = 0.99799$ med fem korrekta decimaler. Använd den informationen och a)-uppgiften för att avgöra hur många iterationer det kommer att behövas från startapproximation $x_0 = 1$ för att bestämma x^* med åtta korrekta decimaler. **(3p)**

Uppgift 6. Betrakta följande tabell över funktionsvärden:

x	0	1	2	3
f	1	2	3	2

a) Beräkna en approximation till $\int_0^3 f(x)\,dx$ med hjälp av tabellen och trapetsformeln. **(2p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet till punkterna i tabellen. **(3p)**
c) Undersök om $s = \begin{cases} 1 + x, & 0 \le x \le 2 \\ 3 + (x-2) - 2(x-2)^2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med knutpunkt (nod) i $x = 2$ och som interpolerar tabellvärdena. **(2p)**

Uppgift 7.
a) Formulera linjesökningsproblemet vid minimering av en funktion f av flera variabler utan bivillkor. **(3p)**
b) Visa att om f är en kvadratisk funktion dvs $f = \frac{1}{2}x^THx + b^Tx$ så ges linjesökningsproblemets lösning dvs steglängden av formeln $\alpha_k = -\frac{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}{(d^{(k)})^T H d^{(k)}}$ där $d^{(k)}$ är vald sökriktning i punkten $x^{(k)}$. **(4p)**.
c) Hur väljer man sökriktning i Steepest Descent-metoden? **(1p)**

Uppgift 8. Man vill lösa följande andra ordningens randvärdesproblem för en funktion $y(x)$:

$$\begin{cases} y'' = -4y + a(y' - 1), 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

där a är en parameter.

a) Skriv om problemet som ett system av första ordningens ekvationer. **(2p)**

b) Bestäm för vilka a-värden som problemet i a)-uppgiften är stabilt. Är Eulers framåtmetod stabil för $a = -5$ och steglängd $h = 0.5$? **(4p)**

c) Man vill nu att parametern a skall uppfylla sambandet $a = -(2y'(1) + y(1))$. Sätt, i analogi med inskjutningsmetoden, upp en ekvation vars lösning ger korrekt a-värde och därmed lösningen till problemet. Formulera en lämplig iterativ metod att lösa ekvationen. Vari består det mesta arbetet vid en iteration med metoden? **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 28 maj 2005

1a) Nej! Exempelvis $V = R^2,\ H_1 = \{(x,y);\ y = 2x\},\ H_2 = \{(x,y);\ y = 3x\}$. Då gäller $(1,2) \in H_1,\ (1,3) \in H_2$ men $(1,2)+(1,3) = (2,5) \notin H_1 \cup H_2$.

b) $A^T(A+B) = I + A^TB = B^TB + A^TB = (B+A)^TB$. En matris och dess transponat har samma determinant: $det(A)\cdot det(A+B) = det(B+A)\cdot det(B)$. Förutsättningen $det(A) = -det(B)$ ger nu att $det(A+B) = 0$ dvs $A+B$ singulär.

2a) $F(e_1) = t^2 = e_3,\ F(e_2) = 1+t = e_1+e_2,\ F(e_3) = -t-t^2 = -e_2-e_3$.
Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $P_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är reguljär alltså är B en bas.

c) $F(b_1) = 1+t+t^2 = b_3,\ F(b_2) = -1-t+t^2 = -2b_1+b_3,\ F(b_3) = 1 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2$
$M' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ med $P_{E\leftarrow B}M' = MP_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3a) $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ A^Tb = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ A^TAx = A^Tb \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1,1,0,1)^T - \frac{1}{2}(1,0,-1,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^T = (0,1,0,1)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen
$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = Q^TA = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ och $Q^Tb = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Lösningen ges av triangulära systemet $Rx = Q^Tb$ och blir $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Kompakt SVD: $A = U_1\Sigma_rV_1^T$. Lösning $x = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^Tb$ där $r = 2$ eftersom $rang(A) = 2$.

4) $Q(x) = x^TAx$ med $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Egenvärden i $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, egenvektorer i

$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

a) Största värde på kvoten $Q(x)/x^T x = 6$ dvs största värdet på $Q(x)$ är 12 och antas för $u = c_1[1\ 0\ 0]^T + c_2[0\ 1\ 2]^T$ med längd $\sqrt{2}$ dvs c_1 och c_2 ska ligga på cirkeln $c_1^2 + c_2^2 = 2$.
b) Enligt sats i Lay blir maxvärdet på $Q(x)/x^T x$ under givna villkor det näst största egenvärdet dvs 1 och därmed $Q(x) = 2$ som antas för $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}[0\ \ -2\ 1]^T$

5a) $f' = 9x^2 - 4x,\ f''(x) = 18x - 4$ med $f'(1) = 5 \neq 0$ dvs enkelrot, konvergensordning 2 och asymptotisk felkonstant $C \approx \frac{1}{2}\frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \approx \frac{14}{10} = 1.4$.
b) $\epsilon_0 \approx 0.2 \cdot 10^{-2},\ \epsilon_1 \approx 1.4\epsilon_0^2 \approx 5.6 \cdot 10^{-6},\ \epsilon_2 \approx 1.4\epsilon_1^2 \approx 4.4 \cdot 10^{-11}$. Två iterationer räcker.

6a). $T(1) = 1(1/2 + 2 + 3 + 2/2) = 6.5$
b) Ansätt $p_3(x) = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2),\ p_3(0) = 1 \Rightarrow a = 1$
$p_3(1) = 2 \Rightarrow b = 1,\ p_3(2) = 3 \Rightarrow c = 0,\ p_3(3) = 2 \Rightarrow d = -1/3$
dvs $p_3(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$.
c) Ja, ty båda delarna är polynom av grad ≤ 2 och villkoren $s_1(0) = 1,\ s_1(1) = 2,\ s_1(2) = s_2(2) = 3,\ s_1'(2) = s_2'(2)$ och $s_2(3) = 2$ gäller.

7a) $min_\alpha\ f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$, där $d^{(k)}$ är vald sökriktning i punkten $x^{(k)}$.
b) Låt $g(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$. Vi söker $min\ g(\alpha)$. $g'(\alpha) = \nabla f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})^T d^{(k)}$.
$\nabla f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = H(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) + b = Hx^{(k)} + b + \alpha H d^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) + \alpha H d^{(k)}$.
$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow [\nabla f(x^{(k)}) + \alpha H d^{(k)}]^T d^{(k)} = 0$ som ger $\alpha = -\frac{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}{(d^{(k)})^T H d^{(k)}}$.

8a) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 + a(y_2 - 1) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

b) $y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & a \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}$. Stabilt om $Re(\lambda) \leq 0$. Vi får $\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-16}{4}}$. $Re(\lambda) \leq 0$ om $a \leq 0$. $-4 < a \leq 0$ ger komplexkonjugerat par med realdel ≤ 0 och $a \leq -4$ ger två negativa egenvärden. $a = -5$ ger minsta egenvärde $\lambda = -4$ med $h\lambda = -2$ som ligger i stabilitetsområdet för Euler framåt och som därmed är stabil.
c) Ekvationen kan skrivas $g(a) = 0$ med $g(a) = a + 2y_2(1,a) + y_1(1,a)$. Sekantmetoden blir $a_{k+1} = a_k - \frac{g(a_k)(a_k - a_{k-1})}{g(a_k) - g(a_{k-1})}$. I varje iteration skall ODE-systemet i a)-uppgiften lösas och det är det som kostar på.