Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2003-01-13

DAG: Måndag 13 januari 2003 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 27 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att det linjära rummet av polynom av grad $\leq n$ har dimensionen $n+1$. **(4p)**
b) Visa att mängden av polynom av exakt grad n inte är ett linjärt rum då $n > 0$. **(2p)**
c) Undersök om mängden av symmetriskt positivt definita $n \times n$-matriser med operationerna
$A \oplus B$ vanlig matrisaddition
$\alpha \odot A = A^{\alpha}$
är ett linjärt rum (ett vektorrum). **(3p)**

Uppgift 2.
a) Visa spektralsatsen: Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt linjärt rum V. Då finns det en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. **(7p)**

b) Undersök om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(3p)**

Uppgift 3. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och vektorn $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm nollrummet och värderummet till matrisen A. **(4p)**
b) Lös ekvationssystemet $Ax = b$ i minstakvadratmening med hjälp av normalekvationerna. Ange residualens (felvektorns) norm. **(3p)**
c) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av A. **(3p)**
d) Lös ekvationssystemet $Ax = b$ med hjälp av QR-faktoriseringen i c)-uppgiften. **(3p)**

Uppgift 4. Anta att A är en symmetrisk positivt definit matris. Ange hur man lämpligen beräknar $x^T A^{-1} x$. **(4p)**

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. Ge en gräns för relativa felet i lösningen om man räknar med tre korrekta decimaler i $\sqrt{2}$. **(4p)**

Uppgift 6. Betrakta följande tabell över funktionsvärden:

x	0	1	2	3
f	0	1	1	-1

a) Beräkna en approximation till $\int_0^3 f(x)\ dx$ med hjälp av tabellen och trapetsformeln. **(3p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet till punkterna i tabellen. **(3p)**
c) Undersök om $s = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med knutpunkt (nod) i $x = 1$ och som interpolerar tabellvärdena. **(2p)**

Uppgift 7. En modell på formen $\Psi(t) = a\ sin(b\ t) + c\ cos(d\ t)$ ska genom val av parametrarna a, b, c och d anpassas till en mätserie $(t_i,\ \Psi_i),\ i = 1,\ ...,\ m$. Formulera motsvarande icke-linjära minsta-kvadrat problem. Ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(6p)**

Uppgift 8.
a) Betrakta differentialekvationen $y' = -2y^3,\ y(0) = 1$. Antag att vi vill använda Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 0.1$ för att approximera $y(0.1)$. Skriv upp den ickelinjära ekvation som metoden leder till. **(3p)**
b) Antag att vi vill lösa den ickelinjära ekvationen i a)-uppgiften med fixpunktsiteration. Skriv formellt upp hur en sådan iteration ser ut och ange ett lämpligt sätt att bestämma en startapproximation. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 13 januari 2003

1 a) Betrakta mängden $B = \{x^j\}_{j=0}^n$. B spänner rummet P_n, mängden av polynom av grad $\leq n$, eftersom $p \in P_n$ kan skrivas $p = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Vidare är B linjärt oberoende ty $q = \sum_{j=0}^n \beta_j x^j = 0,\ \forall x \Rightarrow \beta_j = 0, \forall j$. Detta följer genom upprepad derivering av q och insättning av $x = 0$.
b) $q = 0$ tillör inte mängden och nollelementet ska tillhöra varje linjärt (under)rum.
c) $(\alpha+\beta)\odot A = A^{\alpha+\beta} = A^\alpha \cdot A^\beta \neq$ (α och β positiva heltal t.ex.) $\neq A^\alpha \oplus A^\beta = \alpha\odot A \oplus \beta\odot A$. Alltså gäller inte räknelag (8) (distributivitet). Slutsats: Ej linjärt rum.

2 a) se LAT, sid 66.
b) Alla egenvärden =1 (på diagonalen).
Beräkna egenvektorer: Lös homogena systemet $(A - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, med parameterlösning $x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$. Lösningsrummet har dimensionen 2 och spänner alltså inte hela R^3. Slutsats: Matrisen ej diagonaliserbar.

3 a) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, dvs nollrummet består av endast nollelementet och dimensionen 0. Värderummet spänns av $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dessa är inte parallella och spänner ett plan, dimensionen är alltså 2.
b) Normalekvationerna $A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.
c) Gram-Schmidt: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ och $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.
d) $Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

4 $A = LL^T$, dvs Cholesky-faktorisering. (Då gäller formellt $A^{-1} = L^{-T}L^{-1}$)
Lös triangulärt system (framåtsubstitution) $Ly = x$. (Formellt är då $y = L^{-1}x$)
Beräkna $y^T y$. Detta är svaret ty formellt gäller $y^T y = x^T L^{-T} L^{-1} x = x^T A^{-1} x$.

5 Följande uppskattning gäller: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$, där $\kappa(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$ är konditionstalet till matrisen A.
Här har vi $\| A \|_\infty = 9, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \| A^{-1} \|_\infty = 0.9, \quad \kappa(A) = 8.1$
Vidare enligt förutsättning: $\| \delta b \|_\infty \le 0.5 \cdot 10^{-3}$ (tre korrekta decimaler) och $\| b \|_\infty = 2$.
Uppskattningen blir alltså: $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 8.1\frac{0.5\cdot 10^{-3}}{2} \le 2 \cdot 10^{-3}$.

6 a) $\int_0^3 f(x)\, dx \approx 1\left[\frac{1}{2}\cdot 0 + 1 + 1 + \frac{1}{2}(-1)\right] = \frac{3}{2}$.
b) Newtons form med villkoret $p_3(0) = 0$ utnyttjat vid ansatsen:
$p_3 = ax + bx(x-1) + cx(x-1)(x-2)$
Villkoret $p_3(1) = 1$ ger $p_3(1) = a = 1$
Villkoret $p_3(2) = 1$ ger $p_3(2) = 2 + 2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$.
Villkoret $p_3(3) = -1$ ger $p_3(3) = 3 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 + c\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{6}$.
Polynomet blir alltså $p_3 = x - \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$.
c) s är en kvadratisk spline eftersom $s_1(1) = s_2(1) = 1$ och $s_1'(1) = s_2'(1) = 2$.
Den interpolerar dock inte tabellvärdet $f(2) = 1$ ty $s_2(2) = \frac{3}{2} \neq 1$.

7 Problem: $\min_{a,b,c,d} \| f \|_2$ där $f_i = a\, sin(b\, t_i) + c\, cos(d\, t_i) - \Psi_i$ är residualerna.

$$\text{Jacobian: } J = \begin{bmatrix} sin(b\, t_1) & t_1\, a\, cos(b\, t_1) & cos(d\, t_1) & -t_1\, c\, sin(d\, t_1) \\ sin(b\, t_2) & t_2\, a\, cos(b\, t_2) & cos(d\, t_2) & -t_2\, c\, sin(d\, t_2) \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ sin(b\, t_m) & t_m\, a\, cos(b\, t_m) & cos(d\, t_m) & -t_m\, c\, sin(d\, t_m) \end{bmatrix}$$

$$\text{Gauss-Newton: } x \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{c} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{array} \right.$$

8 a) $y_0 = 1, \quad y_1 = y_0 - 0.2y_1^3 = 1 - 0.2y_1^3$, dvs ekvationen $0.2y_1^3 + y_1 - 1 = 0$.
b) Fixpunktsiteration: $y_1^{(l+1)} = 1 - 0.2\left[y_1^{(l+1))}\right]^3$.
Startapproximation $y_1^{(0)}$ med Euler framåt dvs $y_1^{(0)} = y_0 - 0.2y_0^3 = 1 - 0.2\cdot 1^3 = 0.8$.