Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2001-05-26

DAG: Lördag 26 maj 2001 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Jonas Juel, tel. 0740-459022
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
a) Visa att egenvektorer till en matris A, som hör till olika egenvärden, är linjärt oberoende. **(6p)**

b) Undersök om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(3p)**

Uppgift 2
Låt P_2 vara det linjära rummet av alla polynom av grad ≤ 2. Avbildningarna F och G, från P_2 till P_2, definieras genom

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_0x + (a_0 + a_2)x^2$$

$$G(a_0 + a_1x + a_2x^2) = -a_1 + 2a_0x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2$$

a) Bestäm matrisen till den sammansatta avbildningen FG i basen $\{1,\ x,\ x^2\}$ **(4p)**
b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen FG. **(3p)**
c) Bestäm den omvända (inversa) avbildningen till FG och ange den på samma form som F och G är angivna ovan. **(2p)**

Uppgift 3
Betrakta funktionerna $f = x$ och $g = x^2$ i rummet $C[0\ ,\ 1]$ med skalärprodukt
$< f\ ,\ g >= \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$
a) Bestäm vinkeln mellan f och g. **(2p)**
b) Använd Gramm-Schmidts process för att ortogonalisera g mot f. **(3p)**

Uppgift 4
Anta att Du har en SVD-faktorisering av en $m \times n$ -matris A med $rang(A) = r$ och $m > n > r$.
a) Visa hur man kan få fram nollrummet till A ur SVD-faktoriseringen. **(2p)**
b) Ange hur man kan beräkna en trunkerad minsta-kvadrat-lösning till problemet $min_x \parallel Ax - b \parallel_2$ ur SVD-faktoriseringen. **(2p)**
c) Ange hur man ur SVD-faktoriseringen kan få fram bästa approximation av $rang = k$ till A. Hur stort blir felet i approxiamtionen? **(2p)**

Uppgift 5
För en harmonisk svängning med amplitud a och fasvinkel v gäller modellen $u(t) = a\ sin(t + v)$. Vi vill bestämma a och v från mätningar $(t_i,\ u_i)$, $i = 1,\ ...\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att linjär minsta-kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas samt hur a och v kan fås ur lösningen. **(4p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod **(4p)**

Uppgift 6
Vid minimering i flera variabler utan bivillkor används så kallade sökmetoder:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

a) Ange Newtons metod för att bestämma sökriktningen. **(2p)**
b) I en Kvasi-Newton-metod approximeras hessianen med B_k. Visa att sökriktningen blir en descentriktning om B_k är positiv definit. **(3p)**
c) Newtons metod kan även användas vid linjesökningen. Skriv explicit upp hur den metoden ser ut. **(4p)**

Uppgift 7
a) Skriv upp prediktor/korrektor-metoden:
(p) Euler framåt
(k) Euler bakåt
för ett begynnelsevärdesproblem för ett system av ordinära differentialekvationer. **(2p)**
b) Vilken approximationsordning och vilket stabilitetsområde har metoden i a)-uppgiften? **(2p)**
c) Vilken explicit metod får man om man endast gör **en** fixpunktsiteration i korrektorn i a)-uppgiften? **(2p)**
d) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i c)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 8
I samband med ett strömningsproblem med gränsskikt vill man lösa följande randvärdesproblem för en ordinär differentialekvation:

$$f(x)f''(x) + 2f'''(x) = 0, \quad 0 \le x \le b,$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(b) = 1$$

med inskutningsmetoden.
a) Formulera det begynnelsevärdesproblem för ett första ordningens system av ordinära differentialekvationer som man upprepade gånger skall lösa. **(2p)**
b) Ange den funktion q, i en variabel, vars nollställe s svarar mot lösningen till randvärdesproblemet. **(2p)**
c) Skriv upp en lämplig iterationsformel för lösning av ekvationen $q(s) = 0$ och ange det väsentliga arbetet som krävs i varje iteration. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 26 maj 2001

1 a) Se LAT, sid 63.

b) Egenvärden 2, 2, 1 och 1. $\lambda = 2$: $(A - \lambda I)x = 0$ ger system $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Lösningen spänner inte run av dimensionen 2 och därmed är A ej diagonaliserbar.

2 a) Matris för F: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matris för G: $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Matrisen för FG blir då: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Egenvärden 2, -2 och 1. $\lambda = 2$ ger system $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenvektor till egenvärdet 2 är alltså $1 + x^2$ och egenvektorerna till egenvärdena -2 och 1 får enkelt till x respektive x^2.

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dvs $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
och därmed $(FG)^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 0.5a_0 - 0.5a_1 x - (0.5a_0 - a_2)x^2$.

3 a) $\cos\alpha = \frac{<f,g>}{\|f\|\|g\|} = \frac{1/4}{\sqrt{1/3}\sqrt{1/5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$

b) $\hat{g} = g - \frac{<f,g>}{<f,f>} f = x^2 - \frac{1/4}{1/3} x = x^2 - 0.75x$.

4 a) $A = U\Sigma V^T = U_1 \Sigma_r V_1^T$ (kompakt), V ortogonal.
$AV_2 = U_1 \Sigma_r V_1^T V_2 = 0$ dvs $N(A) = V(V_2)$
b) Minsta-kvadrat-lösning: $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b = \sum_{i=1}^{r} v_i \sigma_i^{-1} u_i^T b$ och trunkerad: $x_k = \sum_{i=1}^{k} v_i \sigma_i^{-1} u_i^T b$.
c) $A_k = \sum_{i=1}^{k} u_i \sigma_i v_i^T$ med $\| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1}$.

5 a) $u(t) = a\ sin(v)\ cos(t) + a\ cos(v)\ sin(t) = as\ cos(t) + ac\ sin(t)$ med nya parametrar $as = a\ sin(v)$ och $ac = a\ cos(v)$. I dessa parametrar har vi det linjära problemet $\begin{bmatrix} cos(t_1) & sin(t_1) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ cos(t_m) & sin(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} as \\ ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ ... \\ ... \\ u_m \end{bmatrix}$. Med sambandet $as^2 + ac^2 = a^2$ får vi då $a = \sqrt{as^2 + ac^2}$ och $v = \arcsin \frac{as}{a}$.

b) modell: $u(t) = a\ sin(t + v)$, residualer: $f_i = a\ sin(t_i + v) - u_i$,

Jacobian: $J = \begin{bmatrix} sin(t_1 + v) & a\ cos(t_1 + v) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ sin(t_m + v) & a\ cos(t_m + v) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$.

6 a) $H(x^{(k)})d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$.

b) $-(d^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) = (d^{(k)})^T B_k d^{(k)} > 0$ om B_k är positivt definit, dvs $d^{(k)}$ är en decsentriktning ty spetsig vinkel med $-\nabla f(x^{(k)})$.

c) Linjesökning: $\min_\alpha f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = \min_\alpha g(\alpha)$.

Newtons metod: $\alpha^{(l+1)} = \alpha^{(l)} - \frac{g'(\alpha^{(l)})}{g''(\alpha^{(l)})}$ dvs

$\alpha^{(l+1)} = \alpha^{(l)} - \frac{[\nabla f(x^{(k)} + \alpha^{(l)} d^{(k)})]^T d^{(k)}}{[d^{(k)}]^T H(x^{(k)} + \alpha^{(l)} d^{(k)}) d^{(k)}}, \quad l = 0,\ 1,\ ...$

7 a) (p): $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$, (k): $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$

b) Approximationsordning 1, stabilitetsområde $\{z \in C; \mid z - 1 \mid \geq 1\}$

c) $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$

d) $y_{k+1} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = y_k + h\lambda y_k + (h\lambda)^2 y_k = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]y_k$.

Stabilitetsområde: $\{z \in C, \mid 1 + z + z^2 \mid \leq 1\}$

8 a) $y_1 = f,\ y_2 = f',\ y_3 = f''$ ger systemet (P):$\begin{cases} y_1' = y_2 & ,\ y_1(0) = 0 \\ y_2' = y_3 & ,\ y_2(0) = 0 \\ y_3' = -0.5 y_1 y_3 & ,\ y_3(0) = s \end{cases}$

b) $y_2(b, s) - 1 = 0$

c) Sekantmetoden: $s^{(k+1} = s^{(k)} - \frac{[y_2(b, s^{(k)}) - 1](s^{(k)} - s^{(k-1)})}{y_2(b, s^{(k)}) - y_2(b, s^{(k-1)})}, \quad k = 1,\ 2,\ ....$

I varje iteration löses systemet (P).