Linjär Algebra och Numerisk Analys F1

TMA 671

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2000-05-26	x	x	
2000-08-25	x	x	
2001-01-09	x	x	
2001-05-26	x	x	
2001-08-31	x	x	
2002-01-14	x	x	
2002-05-31	x	x	
2002-08-30	x	x	
2003-01-13	x	x	
2003-05-30	x	x	
2003-08-29	x	x	
2004-01-12	x	x	
2004-06-01	x	x	
2004-08-27	x	x	
2005-01-10	x	x	
2005-05-28	x	x	
2005-08-26	x	x	
2006-01-09	x	x	

26 april 2006

Institutionen för Matematik
Göteborg

LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1

2000-05-26

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671

DAG: Fredag 26 maj 2000 **TID: 8.45 - 12.45** **SAL: VV**

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 13 juni
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL !

Uppgift 1

a) Låt U vara ett underrum till det linjära rummet V och låt $U^{\perp}$ vara ortogonala komplementet till U. Visa att följande två egenskaper är ekvivalenta för vektorer $u \in V$ och $u' \in U$

(i) $u - u' \in U^{\perp}$

(ii) $\| u - u' \| \leq \| u - w \|, \ \forall\, w \in U$ (**6p**)

b) Tillämpning på a-uppgiften: Låt U vara det underrum till R^4 som definieras av

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Bestäm m.a.p. standardskalärprodukten bästa approximation $u' \in U$ till $u = (-2, -7, 3, 4)$. (**3p**)

Uppgift 2

Betrakta interpolationsoperatorn $I : C(R) \to P_n(R)$, dvs från mängden av kontinuerliga funktioner till mängden av polynom av grad högst n, där interpolationspunkterna (n+1 st) är givna punkter där funktion och polynom överensstämmer.

a) Visa att I är en linjär operator. (**4p**)

b) Vad är dimensionen på nollrummet till I och vad är dimensionen på värderummet? Motivera ordentligt. (**2p**)

c) Låt $f = x^3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Bestäm p_2 som interpolerar f i punkterna. (**2p**)

Uppgift 3

Låt P_2 vara det linjära rummet av alla polynom av grad ≤ 2. Avbildningen F definieras genom

$$(Fp)(x) = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) Visa att F är en linjär avbildning från P_2 till P_2 (**2p**).

b) Bestäm matrisen för F i basen $\{1, x, x^2\}$ (**2p**).

c) Bestäm matrisen för F i basen $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 - x$, $p_3 = 1 + x^2$. Visa först att detta är en bas (**3p**).

d) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till F. (**2p**)

Uppgift 4

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: (**4p**)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t), & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = -2x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 1 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om andra ekvationen ändras till $x_2'(t) = -x_2(t)$? Motivera ordentligt! (**2p**)

c) Föreslå en numerisk metod som klarar av problemet i b-uppgiften. Skriv upp ett rekursionssteg med metoden. Får du några stabilitetsproblem när din metod tillämpas på det aktuella problemet? (**3p**)

Uppgift 5

a) Definiera singulärvärdesuppdelning (SVD) av en $m \ x \ n$-matris, $m > n$ (**2p**)

b) Vad menas med kompakt SVD? (**1p**)

c) Definiera en pseudoinvers utifrån SVD. (**1p**)

d) På vilket sätt kan SVD användas för att få bästa approximation av en matris och hur stort blir felet? (**2p**)

Uppgift 6

Vi önskar beräkna $a = \dfrac{1 - e^{-0.2}}{1 + e^{-0.1}}$ med hjälp av de korrekt avrundade approximationerna $e^{-0.1} \approx 0.90$, $e^{-0.2} \approx 0.82$. Använd felfortplantningsformeln för att bestämma felet i det beräknade a-värdet. Hur många signifikanta siffror har täljaren och hur många har nämnaren? Gör en (grov) uppskattning av felet i det beräknade a-värdet och ange antalet signifikanta siffror i approximationen. (**5p**)

Uppgift 7

Det tryck som behövs för att sänka ner tunga föremål i mjukt underlag kan bestämmas genom experiment med lättare föremål. Speciellt gäller att trycket p, som krävs för att en cirkulär platta med radie r ska sjunka ner ett avstånd d i underlaget, kan approximeras med ekvationen

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

där k_1, k_2 och k_3 är konstanter som beror på underlagets beskaffenhet och d, men inte på r. För att bestämma dessa konstanter kan man alltså mäta trycken som krävs för att sänka ner tre små plattor med olika radier r_1, r_2 och r_3 till samma djup d.

a) Skriv upp det icke-linjära ekvationssystem som ska lösas. Ange en iterativ metod för dess lösning och kommentera vilket subproblem som ska lösas i varje iteration och vilken metod som kan användas för detta subproblem. (**3p**)

b) Om man gör fler än tre prov av ovanstående slag blir systemet överbestämt. Ange en iterativ metod att lösa detta problem i minsta-kvadrat mening. Tala även här om hur ingående subproblem ser ut och hur det löses. (**3p**)

Uppgift 8

I en cirkulär, porös katalysatorpartikel beskrivs koncentrationen av det ämne katalysatorn verkar på av följande randvärdesproblem

$$\begin{aligned} &y'' = \Phi^2 y \, exp(\gamma \beta \frac{1 - y}{1 + \beta(1 - y)}), \quad 0 < x < 1 \\ &y'(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{aligned}$$

där Φ, γ och β är konstanter.

a) Formulera inskjutningsmetoden för problemet. Ange speciellt den icke-linjära ekvation som ska lösas samt teckna en numerisk metod för att lösa denna ekvation. (**4p**)

b) Formulera en differensmetod för problemet och skriv upp det resulterande icke-linjära ekvationssystemet. (**4p**)

Matematik
Chalmers
Ivar Gustafsson

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 26 maj 2000

1. a) se LAT sid 35.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $AA^T x = Au$ blir då $\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -28 \\ 0 \end{bmatrix}$
   med lösning $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Vi får alltså $u'' = A^T x = (-2,\ -4,\ 0,\ 6)^T$, $u' = u - u'' = (0,\ -3,\ 3,\ -2)^T$

2. a) $I(f) = p$ innebär $f_i = p(x_i) = p_i$, $i = 1, ..., n+1$ och på samma sätt innebär $I(g) = q$ att $g_i = q_i$, $i = 1, ..., n+1$

   Vidare gäller $(f+g)(x_i) = f_i + g_i = p_i + q_i = (p+q)(x_i)$ dvs

   $I(f+g) = p + q = I(f) + I(g)$ ty interpolationen är entydig.

   På liknande sätt visas $I(\alpha f) = \alpha p = \alpha I(f)$, där α är en skalär och därmed har vi visat att I är en linjär operator.

   b) Nollrummet är oändligtdimensionellt eftersom det är mängden av alla funktioner som är noll i interpolationspunkterna, exempelvis funktioner $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n+1})h(x)$ för godtycklig funktion $h(x)$. Värderummet är $P_n(R)$ eftersom till ett givet polynom finns alltid en funktion med samma värden som polynomet i de givna interpolationspunkterna. Dimensionen på värderummet är alltså $n + 1$.

   c) Ansätt $p_2 = a + bx + cx(x-1)$. Interpolationsvillkoren ger: $p_2(0) = f(0) = 0$ dvs $a = 0$, $p_2(1) = f(1) = 1$ dvs $b = 1$ och $p_2(2) = f(2) = 8$ dvs $c = 3$. Polynomet är alltså $p_2(x) = x + 3x(x-1)$.

3. a) $F(1) = x^2,\ F(x) = x,\ F(x^2) = 1$ ger $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b) A (linjär) matris, $V(F) = P_2$ så ok!

c) Transformationsmatrisen $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är reguljär, alltså basen ok! Vidare gäller $Fp_1 = x^2+x = p_3-p_2,\ Fp_2 = x^2-x = p_3-p_1,\ Fp_3 = x^2+1 = p_3$ dvs $A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) Från b) ser vi att $-1+x^2$ är egenvektor med egenvärde -1 och att x är egenvektor med egenvärde 1. Vidare ser vi från c) att p_3 är egenvektor med egenvärde 1, dvs $Span(x,\ x^2+1)$ egenvektorer med egenvärde 1.

4. a) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och vi får $z_1 = c_1e^{-t},\ z_2 = c_2e^{-2t},\ z_3 = c_3e^{-3t}$ och $x = Tz = \begin{bmatrix} c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \\ c_2e^{-2t} \\ c_3e^{-3t} \end{bmatrix}$. Begynnelsevärdena $x(0) = (2,\ 1,\ 1)^T$ ger $c = (1,\ 1,\ 1)^T$ och lösningen $x = (e^{-t}+e^{-2t},\ e^{-2t},\ e^{-3t})^T$.

b) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ej diagonaliserbar, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är singulär.

c) Exempelvis Eulers framåtmetod: $x_{k+1} = x_k + hAx_k$. Matrisen A är inte styv så det blir inga problem med stabilitet. Steglängden h väljes endast med tanke på önskad noggrannhet.

5. a) $A = U\Sigma V^T$ där U är ortogonal $m\times m$, Σ är diagonal $m\times n$ och V är ortogonal $n\times n$.

b) $A = U_1\Sigma_r V_1^T$ där U_1 är $m\times r$, Σ är $r\times r$, V är $n\times r$ och r är A:s rang.

c) $A^+ = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1}v_iu_i^T$

d) $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_iu_iv_i^T$, $\| A-A_k \|_2 = \sigma_{k+1}$

6. Med $x = e^{-0.1} \approx 0.90,\ y = e^{-0.2} \approx 0.82$ ska vi alltså beräkna $a = \frac{1-y}{1+x}$. Felfortplantning: $\delta a \approx \frac{1-y}{(1+x)^2}\delta x - \frac{1}{1+x}\delta y$ med $\mid \delta a \mid \leq (\frac{0.0185}{1.855^2} + \frac{1}{1.855})0.005 \leq 0.005$. Den uträknade approximationen blir $\bar{a} = \frac{1-0.82}{1+0.90} = \frac{0.18}{1.90} = 0.09..$ och vi ser att täljaren $1-y \approx 0.18$ är angiven med två

signifikanta siffror, nämnaren $1 + x \approx 1.90$ med tre signifikanta siffror och $a \approx 0.09$ med en signikant siffra.

7. a) Lös $f(k) = 0$ där $f_i = p_i - k_1 e^{k_2 r_i} - k_3 r_i,\ i = 1, 2, 3$. Newtons metod blir: $k^{(l+1)} = k^{(l)} + d^{(l)},\ J(k^{(l)}) d^{(l)} = -f(k^{(l)}),\ l = 1,\ 2,\ ....$ Här är J Jacobianmatrisen $J = \begin{bmatrix} | & | & | \\ -e^{k_2 r_i} & -r_i k_1 e^{k_2 r_i} & -r_i \\ | & | & | \end{bmatrix}$ Ett linjärt ekvationssystem löses i varje iteration, exempelvis med Gausselimination.

   b) Problemet kan formuleras

   $min_k \parallel f(k) \parallel_2,\ f_i = p_i - k_1 e^{k_2} r_i - k_3 r_i,\ i = 1, 2, ..., m.$

   Här kan Gauss-Newtons metod användas. Den ser ut som Newtons metod ovan men ett överbestämt ekvationssystem löses i varje iteration exempelvis med QR-faktorisering (eller SVD).

8. $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ ger system $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = g(y_1) \end{cases},\ \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$

   a) Begynnelsevärdesproblemet blir $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = g(y_1) \end{cases},\ \begin{cases} y_1(0) = s \\ y_2(0) = 0 \end{cases}.$

   Om lösningen till detta system är $y(x, s)$ ska ekvationen

   $q(s) = y_1(1, s) - 1 = 0$ lösas. Med sekantmetoden blir det:

   $s^{(k+1)} = s^{(k)} - \frac{y_1(1,s^{(k)})(s^{(k)} - s^{(k-1)})}{y_1(1,s^{(k)}) - y_1(1,s^{(k-1)})},\ k = 1, 2, ...$

   b) Centraldifferenser ger beräkningsspindlarna: $y'' \approx \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

   $y' \approx \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Villkoret $y'(0) = 0$ ger spindeln

   $y'' \approx \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ i vänster ändpunkt.

   Det ickelinjära ekvationssystemet som approximerar $y'' - g(y) = 0$ blir alltså:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ \cdots \\ \cdots \\ g(y_{n-2}) \\ g(y_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix}$$

Institutionen för Matematik Göteborg — **LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1**

2000-08-25

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671

OBS! NYA KURSEN

DAG: Fredag 25 augusti 2000 **TID: 8.45 - 12.45 SAL: VV**

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 11 september
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL !

Uppgift 1. Visa spektralsatsen: Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt linjärt rum V. Då finns det en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. (**8p**)

Uppgift 2

a) Undersök om mängden av matriser på formen $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, för godtyckliga $a, b \in R$ är ett linjärt rum med avseende på de vanliga matrisoperationerna. Om inte, ange alla axiom som inte gäller. Hur blir det om man i stället betraktar $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$? (**4p**)

b) Låt $A = D + \alpha uu^t$, där $\alpha \in R$, $u \in R^n$ och $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Visa att om det för något i gäller att $d_i = d_{i+1}$ eller att $u_i = 0$ så är d_i ett egenvärde till A. Bestäm egenvektorerna hörande till d_i i de båda fallen. (**4p**)

c) Visa att om en matris är ortogonal och triangulär så är den diagonal. Bestäm diagonalelementen. (**4p**)

Uppgift 3. Betrakta den reella matrisen $A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm p och q så att $dim\ V(A) = dim\ N(A)$ och ange ON-baser för rummen för dessa värden på p och q.

Bestäm även baser för $N(A)^{\perp}$ och $V(A)^{\perp}$ (ortogonala komplementen till nollrummet resp värderummet). (**6p**)

Uppgift 4

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: (**5p**)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_3(t), & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = -2x_2(t) - x_3(t), & x_2(0) = 3 \\ x_3'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 2 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om tredje ekvationen ändras till $x_3'(t) = -x_3(t)$? Motivera ordentligt! (**2p**)

c) Betrakta Trapetsmetoden för att lösa systemet i b)-uppgiften. Metoden är i allmänhet implicit, som bekant. Visa att den kan formuleras explicit i detta fall. (**3p**)

Uppgift 5

Visa hur man kan bestämma integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ genom att formulera och lösa ett lämpligt ODE-problem. Om man använder trapetsmetoden på ODE-problemet, vilken numerisk metod för kvadratur, dvs för att approximera integralen, motsvarar det? (**6p**)

Uppgift 6

Bestäm en QR-faktorisering och en SVD-faktorisering av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (**5p**)

Uppgift 7

a) Ange följande metoder vid optimering i flera variabler:

Steepest Descent (**1p**)

Newtons metod med och utan dämpning (**1p**)

Levenberg-Marquardts metod för icke linjär minsta kvadrat. (**2p**)

b) Härled Gauss-Newtons metod för icke-linjära minsta kvadrat problem. (**3p**)

Uppgift 8

För studium av mekaniska påfrestningar på ryggraden hos människan används följande differentialekvationsmodell

$$y'' = p^2(y + a)(\tfrac{1}{2}(y')^2 - 1), \quad 0 \le x \le L$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = v$$
$$a = -(q\, y'(L) + y(L))$$

där p, q och v är givna parametrar.

a) För över problemet till ett system av första ordningens ekvationer. (**2p**)

b) Om a vore känt vore det inga problem att lösa systemet. Helt analogt med inskjutningsmetoden kan man formulera en ekvation vars lösning ger korrekt a-värde och därmed lösningen. Ange denna ekvation och ange en lämplig metod att lösa den. (**4p**)

Matematik
Chalmers
Ivar Gustafsson

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 25 augusti 2000

1. Se LAT sid 66.

2. a) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ utgör ej linjärt rum : (1) och (2) gäller inte, (3) och (4) gäller, (5) gäller inte ty nollmatrisen är inte med, (6) - (9) gäller, (10) gäller inte eftersom (5) inte gäller.

   $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ utgör linjärt rum.

   b) $u_i = 0$: Med $e_i = (0, 0, .., 0, 1, 0, ..., 0, 0)^T$ (ettan på plats i) får vi: $Ae_i = De_i + 0 = d_i e_i$

   $d_i = d_{i+1}$: Med $f_i = (0, 0, ..., 0, u_{i+1}, -u_i, 0, ..., 0, 0)^T$ (u_i på plats $i + 1$) får vi: $Af_i = Df_i = d_i f_i$

   c) Betrakta matrismultiplikationen $AA^T = E$, som gäller eftersom A är ortogonal. Anta att A är nedåt triangulär, då är A^T uppåt triangulär. Första kolonnen i A måste då ha nollor under diagonalen, annars skulle inte AA^T kunna ha det. Första elementet i kolonn 1 måste ha värdet $+1$ eller -1 eftersom kvadraten blir 1. Fortsätt sedan resonemanget för successivt kolonn 2, kolonn 3 etc. Vi finner att A måste vara diagonal med $+1$ eller -1 i diagonalen.

3. Enligt dimensionssatser är $dimV(A) + dimN(A) = 2$ och eftersom de är lika måste rummens dimension vara 1. Kolonnerna i A ska alltså vara linjärt beroende och enda möjligheten är alltså $p = 1$ och $q = 0$. En ON-bas för $V(A)$ är då $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)^T$. Vidare ser vi direkt att $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$ är en ON-bas för $N(A)$ och dess ortogonala komplement har då ON-basen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$. Slutligen är ortogonala komplementet till $V(A)$ samma som $N(A^T)$ och detta kan bestämmas genom att lösa ett homogent ekvationssystem $A^T x = 0$. Denna lösning blir tre-parametrig och vi kan ta ut följande bas: $(0, 0, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 0, 1)^T$, $(-1, 1, 0, 0)^T$

4. a) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ och vi får $z_1 = c_1 e^{-t}$, $z_2 = c_2 e^{-2t}$, $z_3 = c_3 e^{-3t}$ och $x = Tz = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_3 e^{-3t} \\ c_2 e^{-2t} + 2c_3 e^{-3t} \\ 2c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$. Begynnelsevärdena $x(0) = (2,\ 3,\ 2)^T$ ger

$c = (1,\ 1,\ 1)^T$ och lösningen $x = (e^{-t} + e^{-3t},\ e^{-2t} + 2e^{-3t},\ 2e^{-3t})^T$.

b) $A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ej diagonaliserbar, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är singulär.

c) Trapetsmetoden: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(Ax_k + Ax_{k+1})$. Om vi löser ut x_{k+1} får vi alltså: $x_{k+1} = (E - \frac{h}{2}A)^{-1}(E + \frac{h}{2}A)x_k = B(h)x_k$ där $B(h) = (E - \frac{h}{2})^{-1}(E + \frac{h}{2}A)$ är oberoende av iterationsindex.

5. $I = \int_a^b f(x)\,dx$. ODE: $\begin{cases} F' = f \\ F(a) = 0 \end{cases}$ vars lösning ger $F(b) = I$. Trapetsmetoden: $F_0 = 0,\ F_1 = F_0 + \frac{h}{2}[f_0 + f_1],\ F_2 = F_1 + \frac{h}{2}[f_1 + f_2], ..., F_n = F_{n-1} + \frac{h}{2}[f_{n-1} + f_n] = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + ... + 2f_{n-1} + f_n]$, vilket är trapetsformeln för approximation av I.

6. Vi ser att kolonnerna i A är ortogonala, $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Vi skaffar en tredje ortogonal kolonn med Gram-Schmidt's metod: $e_1 = (1,2,1)^T$, $e_2 = (2,-1,0)^T$, $e_3 = (1,1,1)^T - \frac{4}{6}(1,2,1)^T - \frac{1}{5}(2,-1,0)^T = \frac{1}{15}(-1,-2,5)^T$.

Normering ger $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$ och R blir då $R = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

SVD: $A = U\Sigma V^T$ gäller med $U = Q$ (enligt ovan) och $\Sigma V^T = R$, dvs $\Sigma = R$ och $V^T = V = E$.

7. a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$. SD: $d^{(k)} = -\bigtriangledown f(x^{(k)})$,

Newton: $d^{(k)} = -\alpha H(x^{(k)})^{-1} \bigtriangledown f(x^{(k)}),\ \alpha < 1$ innebär dämpning, $\alpha = 1$ innebär odämpad Newton.

LM: $d^{(k)} = -(J(x^{(k)})^T J(x^{(k)}) + \mu E)^{-1} J(x^{(k)})^T f(x^{(k)})$

b) $min_x \parallel f(x) \parallel \approx min_x \parallel f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \parallel_2$. Ta $x^{(k+1)}$ som lösningen till minproblemet, då får vi Gauss-Newtons metod:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k+1)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$

8. a) Systemet skrivs om som (BVP): $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = p^2(y_1 - a)(\frac{1}{2}y_2^2 - 1) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = v \end{cases}$

   b) Inskjutning på a innebär att lösa ekvationen

   $g(a) = 0$ där $g(a) = a + qy_2(L, a) + y_1(L, a)$

   Sekantmetoden på ekvationen blir: $a^{(k+1)} = a^{(k)} - \frac{g(a^{(k)})(a^{(k)} - a^{(k-1)})}{g(a^{(k)}) - g(x^{(k-1)})}$, $k = 1, 2, ...$ Varje nytt $g(a^{(k)})$ kräver att (BVP) löses, dvs detta görs en gång per iteration i sekantmetoden.

Institutionen för Matematik
Göteborg

LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1

2001-01-09

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671

OBS! NYA KURSEN

DAG: Tisdag 9 januari 2001 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, ankn. 1094
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 29 januari
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL !

Uppgift 1

a) Visa Cauchy-Schwartz' olikhet, dvs

$|<u, v>| \le \| u \| \| v \|$ för alla $u, v \in V$

där V är ett reellt linjärt rum med skalärprodukt. Ange speciellt när likhet inträffar. (**7p**)

b) Visa att $\|xy^t\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2$ för $x \in R^n$, $y \in R^n$.

Ledning: Definition av matrisnorm samt Cauchy-Schwartz olikhet. (**5p**)

Uppgift 2

a) Undersök om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. (**4p**)

b) Ta fram en startvektor sådan att potensmetoden **inte** fungerar på matrisen A. (**2p**)

Uppgift 3

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Bestäm $rang(A)$ (**2p**)

b) Ange en bas för $N(A)$. (**2p**)

c) Ta fram en faktorisering $PA = LU$, där P står för systematiska (stabila) radbyten vid Gausselimineringen. (**4p**)

Uppgift 4
Låt $P : R^3 \rightarrow R^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x + 2y + 3z = 0$.

a) Bestäm standardmatrisen för P. (**4p**)

b) Bestäm genom geometriskt betraktande egenvärdena till P. (**2p**)

c) Är avbildningen inverterbar? (**1p**)

d) Bestäm en bas av egenvektorer till P. (**2p**)

Uppgift 5
Vi önskar bestämma den linjära spline med nod i $x = 2$ som i minsta-kvadrat-mening bäst anpassar till punkterna $(0, 0), (1, 2), (3, 1)$ och $(4, 0)$ i planet. Sätt upp det överbestämda ekvationssystem som ska lösas för att bestämma splinen. Ekvationssystemet behöver **inte** lösas. (**5p**)

Uppgift 6
a) Betrakta approximationen $e^x \approx 1 + x$ för x nära noll. Ange framåt och bakåt-felen då $x = 0.1$. (**2p**)

b) Betrakta algoritmen att beräkna $1 + x$ i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Genomför bakåtanalys av algoritmen. Ta hänsyn till att x måste lagras avrundat, talet 1 däremot lagras exakt. Ange, med tydlig motivering, om algoritmen är stabil eller inte. (**3p**)

Uppgift 7
En modell på formen $\psi(t) = \alpha e^{-\beta t} + \gamma$ ska genom val av parametrarna α, β och γ anpassas till en mätserie (t_i, ψ_i), $i = 1, 2 \cdots, m$, där $m > 3$. Formulera motsvarande icke-linjära minsta-kvadrat problem. Ange residual, Jacobian och teckna en iteration i Gauss-Newtons metod. (**6p**)

Uppgift 8
Betrakta ode-problem $y' = f(t, y), y(t_0) = c_0$.

a) Härled Eulers framåtmetod för problemet genom att använda lämplig approximation av derivatan. (**2p**)

b) Härled trapetsmetoden för problemet genom att använda lämplig approximation av integralformuleringen av problemet. (**2p**)

c) Betrakta problemet $y' = -Ay, y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $0 \le t \le 5$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Är Eulers framåtmetod resp trapetsmetoden stabila för steglängen $h = 0.1$? (**3p**)

d) Räkna fram en approximation till $y(0.1)$ med Eulers framåtmetod och steg $h = 0.1$ för problemet i c-uppgiften. (**2p**)

Matematik
Chalmers
Ivar Gustafsson

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 9 januari 2001

1. a) Se LAT sid 31.

   b) $\| xy^t \|_2 =$ (def)

$$\max_{\| z \|_2 \neq 0} \frac{\| xy^t z \|_2}{\| z \|_2} = \max_{\| z \|_2 \neq 0} \frac{| y^t z | \| x \|_2}{\| z \|_2}$$

   $\leq$ (C-S)

$$\frac{\| y \|_2 \| z \|_2 \| x \|_2}{\| z \|_2} = \| y \|_2 \| x \|_2 .$$

   Om z och y linjärt beroende så likhet i C-S (v.s.v.)

2. a) Egenvärden är $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 1$. Egenvektor till $\lambda_3 = 1$ är $(0,0,1)^t$. Egenvektorer till $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ fås från homogent system med matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Från lösningen kan vi plocka fram basen $(1,0,0)^t$, $(0,0,1)^t$ för egenvektorsrummet. Vi kan alltså inte spänna hela R^3 med egenvektorer. A är inte diagonaliserbar.

   b) $x_0 = (0,0,1)^t$ fungerar inte, det ger $Ax_0 = x_0$ hela tiden och x_0 är inte rätt egenvektor.

3. c) Gausselimination med radbyten ger successivt matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Vi gör alltså radbyten i båda stegen och permutationsmatrisen blir $P = P_2P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare samlar vi ihop multiplikatorerna till $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

a) Rangen för A är antal linjärt oberoende kolonner i U, dvs 2.

b) Bas för $N(A)$ kan fås genom att lösa homogent system $Ux = 0$ och ur lösningen tar vi fram basen $(-2, 1, 1)^t$

4. a) Vi ska projicera standardbasens element e_i på $N(A)$ där $A = [1\ 2\ 3]$. Projektionen på $V(A^t)$ tas med normalekvationerna. För $e_1 = (1, 0, 0)^t$ får vi systemet $AA^tx = Ae_1$ med lösning $x = \frac{1}{14}$ och projektionen $A^tx = \frac{1}{14}(1, 2, 3)^t$. Projektionen av e_1 på $N(A)$ blir sedan $Pe_1 = e_1 - A^tx = \frac{1}{14}(13, -2, -3)^t$. På samma sätt får vi $Pe_2 = \frac{1}{14}(-2, 10, -6)^t$ och $Pe_3 = \frac{1}{14}(-3, -6, 5)^t$. Standardmatrisen för P blir alltså $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

   b) Normalen projiceras på nollvektorn dvs $\lambda_1 = 0$.

   Allt i planet blir oförändrat vid projektionen dvs $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

   c) Nej, ty ett egenvärde är noll.

   d) Egenvektor $(1, 2, 3)^t$ är normalen och hör alltså till egenvärde $\lambda_1 = 0$. Två linjärt oberoende egenvektorer i planet duger för $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vi kan exempelvis ta $(2, -1, 0)^t$ och $(3, 0, -1)^t$.

5. Ansätt splinen som $s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a + bx, & 0 \leq x \leq 2 \\ s_2(x) = c + dx, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$.

   Splinevillkoret $s_1(2) = s_2(2)$ ger ekvationen $a = c + 2d - 2b$.

   Anpassning till punkterna, dvs $s(0) \approx 0,\ s(2) \approx 2,\ s(3) \approx 1,\ s(4) \approx 0$ fås genom det överbestämda systemet: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Lösningen ger $b,\ c,\ d$ och a fås ur sambandet $a = c + 2d - 2b$.

6. a) Framåt: $1 + x - e^x \approx -\frac{x^2}{2} = -\frac{0.1^2}{2} = -0.005$

   Bakåt: $f^{-1}(1 + x) - x = ln(1 + x) - x \approx -\frac{x^2}{2} = -\frac{0.1^2}{2} = -0.005$

b) $y = 1 + x,\ \hat{y} = (1 + x(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2) = 1 + \epsilon_2 + x(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$ dvs $\hat{y} = \hat{1} + \hat{x}$, där $\hat{1} = 1 + \epsilon_2$ och $\hat{x} = x(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$ De relativa felen blir alltså: $\frac{\hat{1}-1}{1} = \epsilon_2$ med $| \frac{\hat{1}-1}{1} | \leq \mu$ och $\frac{\hat{x}-x}{x} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2$ med $| \frac{\hat{x}-x}{x} | \leq 2\mu + \mu^2$. Små störningar, dvs algoritmen är stabil.

7. Det icke-linjära minsta-kvadrat problemet blir

$$\begin{matrix} min \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \parallel f \parallel_2 \text{ där } f_i = \alpha e^{-\beta t_i} + \gamma - \Psi(t_i) \text{ är residualerna.}$$

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e^{-\beta t_i} & -t_i\alpha e^{-\beta t_i} & 1 \\ | & | & | \end{bmatrix}$.

Låt $x = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^t$ Då kan Gauss-Newtons metod skrivas:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{array} \right. ,\ k = 0,\ 1,\ 2\ ...$$

8. a) $y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$, dvs $y(t + h) - y(t) \approx hy'(t) = hf(t,\ y(t))$. Med $y_{k+1} \approx y(t+k)$ och $y_k \approx y(t)$ får vi Eulers metod: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\ y_k)$.

b) Integralform: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\ dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\ y(t))\ dt$ ger $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\ y(t))\ dt \approx$ (trapetsformeln) $\frac{h}{2}[f(t_k,\ y_k) + f(t_{k+1},\ y_{k+1})]$, som är trapetsmetoden.

c) Egenvärdena till $-A$ är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ med $h\lambda_1 = -0.1$ och $h\lambda_2 = -0.2$, båda i stabilitetsområdet för metoderna, som alltså är stabila för problemet.

d) $y_1 = y_0 - hAy_0,\ y_0 = (1,\ 0)^t,\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.1 \end{bmatrix}$

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2001-05-26

DAG: Lördag 26 maj 2001 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Jonas Juel, tel. 0740-459022
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
a) Visa att egenvektorer till en matris A, som hör till olika egenvärden, är linjärt oberoende. **(6p)**
b) Undersök om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(3p)**

Uppgift 2
Låt P_2 vara det linjära rummet av alla polynom av grad ≤ 2. Avbildningarna F och G, från P_2 till P_2, definieras genom

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_0x + (a_0 + a_2)x^2$$

$$G(a_0 + a_1x + a_2x^2) = -a_1 + 2a_0x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2$$

a) Bestäm matrisen till den sammansatta avbildningen FG i basen $\{1,\ x,\ x^2\}$ **(4p)**
b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen FG. **(3p)**
c) Bestäm den omvända (inversa) avbildningen till FG och ange den på samma form som F och G är angivna ovan. **(2p)**

Uppgift 3
Betrakta funktionerna $f = x$ och $g = x^2$ i rummet $C[0\ ,\ 1]$ med skalärprodukt
$< f\ ,\ g >= \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$
a) Bestäm vinkeln mellan f och g. **(2p)**
b) Använd Gramm-Schmidts process för att ortogonalisera g mot f. **(3p)**

Uppgift 4
Anta att Du har en SVD-faktorisering av en $m \times n$ -matris A med $rang(A) = r$ och $m > n > r$.
a) Visa hur man kan få fram nollrummet till A ur SVD-faktoriseringen. **(2p)**
b) Ange hur man kan beräkna en trunkerad minsta-kvadrat-lösning till problemet
$min_x \parallel Ax - b \parallel_2$ ur SVD-faktoriseringen. **(2p)**
c) Ange hur man ur SVD-faktoriseringen kan få fram bästa approximation av $rang = k$ till A. Hur stort blir felet i approxiamtionen? **(2p)**

Uppgift 5
För en harmonisk svängning med amplitud a och fasvinkel v gäller modellen $u(t) = a\ sin(t + v)$. Vi vill bestämma a och v från mätningar $(t_i,\ u_i),\ i = 1,\ \ldots\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att linjär minsta-kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas samt hur a och v kan fås ur lösningen. **(4p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod **(4p)**

Uppgift 6
Vid minimering i flera variabler utan bivillkor används så kallade sökmetoder:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

a) Ange Newtons metod för att bestämma sökriktningen. **(2p)**
b) I en Kvasi-Newton-metod approximeras hessianen med B_k. Visa att sökriktningen blir en descentriktning om B_k är positiv definit. **(3p)**
c) Newtons metod kan även användas vid linjesökningen. Skriv explicit upp hur den metoden ser ut. **(4p)**

Uppgift 7
a) Skriv upp prediktor/korrektor-metoden:
(p) Euler framåt
(k) Euler bakåt
för ett begynnelsevärdesproblem för ett system av ordinära differentialekvationer. **(2p)**
b) Vilken approximationsordning och vilket stabilitetsområde har metoden i a)-uppgiften? **(2p)**
c) Vilken explicit metod får man om man endast gör **en** fixpunktsiteration i korrektorn i a)-uppgiften? **(2p)**
d) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i c)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 8
I samband med ett strömningsproblem med gränsskikt vill man lösa följande randvärdesproblem för en ordinär differentialekvation:

$$f(x)f''(x) + 2f'''(x) = 0, \quad 0 \le x \le b,$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(b) = 1$$

med inskutningsmetoden.
a) Formulera det begynnelsevärdesproblem för ett första ordningens system av ordinära differentialekvationer som man upprepade gånger skall lösa. **(2p)**
b) Ange den funktion q, i en variabel, vars nollställe s svarar mot lösningen till randvärdesproblemet. **(2p)**
c) Skriv upp en lämplig iterationsformel för lösning av ekvationen $q(s) = 0$ och ange det väsentliga arbetet som krävs i varje iteration. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 26 maj 2001

1 a) Se LAT, sid 63.

b) Egenvärden 2, 2, 1 och 1. $\lambda = 2$: $(A - \lambda I)x = 0$ ger system $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Lösningen spänner inte run av dimensionen 2 och därmed är A ej diagonaliserbar.

2 a) Matris för F: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matris för G: $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Matrisen för FG blir då: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Egenvärden 2, -2 och 1. $\lambda = 2$ ger system $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenvektor till egenvärdet 2 är alltså $1 + x^2$ och egenvektorerna till egenvärdena -2 och 1 får enkelt till x respektive x^2.

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dvs $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
och därmed $(FG)^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 0.5a_0 - 0.5a_1 x - (0.5a_0 - a_2)x^2$.

3 a) $\cos\alpha = \frac{<f,g>}{\|f\|\|g\|} = \frac{1/4}{\sqrt{1/3}\sqrt{1/5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$

b) $\hat{g} = g - \frac{<f,g>}{<f,f>} f = x^2 - \frac{1/4}{1/3} x = x^2 - 0.75x$.

4 a) $A = U\Sigma V^T = U_1 \Sigma_r V_1^T$ (kompakt), V ortogonal.
$AV_2 = U_1 \Sigma_r V_1^T V_2 = 0$ dvs $N(A) = V(V_2)$
b) Minsta-kvadrat-lösning: $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b = \sum_{i=1}^{r} v_i \sigma_i^{-1} u_i^T b$ och trunkerad: $x_k = \sum_{i=1}^{k} v_i \sigma_i^{-1} u_i^T b$.
c) $A_k = \sum_{i=1}^{k} u_i \sigma_i v_i^T$ med $\| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1}$.

5 a) $u(t) = a\ sin(v)\ cos(t) + a\ cos(v)\ sin(t) = as\ cos(t) + ac\ sin(t)$ med nya parametrar $as = a\ sin(v)$ och $ac = a\ cos(v)$. I dessa parametrar har vi det linjära problemet $\begin{bmatrix} cos(t_1) & sin(t_1) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ cos(t_m) & sin(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} as \\ ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ ... \\ ... \\ u_m \end{bmatrix}$. Med sambandet $as^2 + ac^2 = a^2$ får vi då $a = \sqrt{as^2 + ac^2}$ och $v = \arcsin \frac{as}{a}$.

b) modell: $u(t) = a\ sin(t + v)$, residualer: $f_i = a\ sin(t_i + v) - u_i$,

Jacobian: $J = \begin{bmatrix} sin(t_1 + v) & a\ cos(t_1 + v) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ sin(t_m + v) & a\ cos(t_m + v) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}$, $\left\{ \begin{array}{c} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{array} \right.$.

6 a) $H(x^{(k)})d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$.

b) $-(d^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) = (d^{(k)})^T B_k d^{(k)} > 0$ om B_k är positivt definit, dvs $d^{(k)}$ är en decsentriktning ty spetsig vinkel med $-\nabla f(x^{(k)})$.

c) Linjesökning: $\min_\alpha f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = \min_\alpha g(\alpha)$.

Newtons metod: $\alpha^{(l+1)} = \alpha^{(l)} - \frac{g'(\alpha^{(l)})}{g''(\alpha^{(l)})}$ dvs

$\alpha^{(l+1)} = \alpha^{(l)} - \frac{[\nabla f(x^{(k)} + \alpha^{(l)} d^{(k)})]^T d^{(k)}}{[d^{(k)}]^T H(x^{(k)} + \alpha^{(l)} d^{(k)}) d^{(k)}}, \quad l = 0,\ 1,\ ...$

7 a) (p): $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$, (k): $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$

b) Approximationsordning 1, stabilitetsområde $\{z \in C; \mid z - 1 \mid \geq 1\}$

c) $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$

d) $y_{k+1} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = y_k + h\lambda y_k + (h\lambda)^2 y_k = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2] y_k$.

Stabilitetsområde: $\{z \in C, \mid 1 + z + z^2 \mid \leq 1\}$

8 a) $y_1 = f,\ y_2 = f',\ y_3 = f''$ ger systemet (P):$\left\{ \begin{array}{ll} y_1' = y_2 & ,\ y_1(0) = 0 \\ y_2' = y_3 & ,\ y_2(0) = 0 \\ y_3' = -0.5 y_1 y_3 & ,\ y_3(0) = s \end{array} \right.$

b) $y_2(b, s) - 1 = 0$

c) Sekantmetoden: $s^{(k+1} = s^{(k)} - \frac{[y_2(b, s^{(k)}) - 1](s^{(k)} - s^{(k-1)})}{y_2(b, s^{(k)}) - y_2(b, s^{(k-1)})}, \quad k = 1,\ 2,\ ....$

I varje iteration löses systemet (P).

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2001-08-31

DAG: Fredag 31 augusti 2001 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
Visa att för en reell symmetrisk matris A med minsta egenvärde λ_{min} och största egenvärde λ_{max} gäller att

$\lambda_{min} \parallel x \parallel^2 \leq x^T Ax \leq \lambda_{max} \parallel x \parallel^2$

för alla x. Visa också att likhet gäller (förutom för $x = 0$) då och endast då x är egenvektor hörande till λ_{min} respektive λ_{max}. **(7p)**

Uppgift 2
a) Vid produktionen i en viss fabrik finns begränsningen att förhållandet mellan tre ingående ämnen x, y och z måste uppfylla villkoret $x-y+2z = 0$. Det blir alltså fråga om att välja bästa approximation i detta plan. För att hjälpa företaget att automatisera produktionen ska Du ta fram (standard-)matrisen för den ortogonala projektionen $P : R^3 \to R^3$ på planet $x - y + 2z = 0$. **(4p)**
b) Bestäm alla egenvärden och en bas av egenvektorer till projektionen i a)-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 3
Betrakta avbildningen $F : C(R) \to C(R)$ definierad av $F(f) = \int g(x)f(x)\, dx$, där $g \in C(R)$ och integrationskonstanten tas lika med noll.
a) Visa att F är en linjär avbildning. **(2p)**
b) Låt $g(x) = x$ och betrakta avbildningen F på mängden av polynom av grad högst n, dvs $F : P_n \to P_{n+2}$. Bestäm matrisen för F i lämpliga baser för P_n och P_{n+2}. **(5p)**.

Uppgift 4
a) Visa genom att använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess att man kan faktorisera en m x n-matris A, där $m \geq n$, i en produkt $A = QR$, där Q har ortonormala kolonner och R är uppåt triangulär. **(4p)**
b) Bestäm den kompakta QR-faktoriseringen enligt a)-uppgiften då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. **(2p)**
c) Bestäm kompakt SVD-faktoriseringen av matrisen i b)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 5
a) Definiera vad som menas med konvergensordning för en numerisk metod för ekvationslösning i en variabel. **(2p)**
b) Vilken konvergensordning har Newtons metod vid enkelrot resp vid multipelrot av multiplicitet m? Vad blir den asymptotiska felkonstanten i det senare fallet? **(2p)**
c) Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2 - 3 = 0 \\ x_2^3 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$
Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**

Uppgift 6
Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = 1/(a + be^{-t})$ till mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ ...,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att linjär minsta kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(4p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 7
a) Formulera linjesökningsproblemet vid minimering av en funktion av flera variabler utan bivillkor. **(3p)**
b) Ange två lämpliga metoder för att lösa linjesökningsproblemet. **(2p)**

Uppgift 8
Heuns metod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer definieras av:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$
a) Klassificera metoden - är den enstegs eller flerstegs, är den explicit eller implicit, är den en Runge-Kutta-metod? **(3p)**
b) Visa att stabilitetsområdet för Heuns metod är $\{z \in C; |\ 1 + z + \frac{z^2}{2}\ | \leq 1\}$. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 31 augusti 2001

1 Se LAT, sid 77.

2 a) $A = [1\ \ -1\ 2]$, $\quad P = I - A^T(AA^T)^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) Normalen projiceras till origo: $\lambda_1 = 0$
Allt i planet är oförändrat av projektionen: $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Egenvektorer är normalen= $[1 \quad -1 \quad 2]^T$ samt två linjärt oberoende vektorer i planet, exempelvis $[1\ \ 1\ \ 0]^T$ och $[2\ \ 0\ \ -1]^T$

3 a) $F(f+h) = \int g(x)[f(x)+h(x)]\ dx = \int g(x)f(x)\ dx + \int g(x)h(x)\ dx = F(f) + F(h)$
$F(\alpha f) = \int g(x)\alpha f(x)\ dx = \alpha \int g(x)f(x)\ dx = \alpha F(f)$. Alltså linjär.
b) Bas för P_n: $e_i = x^{i-1},\ i = 1,\ \dots,\ n+1$. Bas för P_{n+2}: $e'_i = x^{i-1},\ i = 1,\ \dots,\ n+3$.
$F(e_i) = \int x x^{i-1}\ dx = \int x^i\ dx = \frac{1}{i+1}x^{i+1} = \frac{1}{i+1}e'_{i+2},\ i = 1,\ \dots,\ n+1$.

Matrisen blir $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1/(n+2) \end{bmatrix}$

4 a) Gramm-Schmidt på kolonnerna i $A = [A_1\ A_2\ \dots\ A_n]$ ger $\tilde{Q} = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_n]$. Kan utökas till Q, $m \times m$ ortogonal matris. Gramm-Schmidt beräknar skalärprodukter $r_{ij} =< Q_i, A_j >$ och om vi låter R vara matris med element r_{ij} så gäller $Q^TA = R$ eller $A = QR$, där $r_{ij} = 0,\ i > j$, ty $< Q_i, A_j >= 0,\ i > j$ enligt Gramm-Schmidt.

b) $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, som är ortogonal. Normalisera $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \end{bmatrix}$ och R är då $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Eftersom R i b)-uppgiften är diagonal så duger den som Σ i SVD och som V kan vi ta enhetsmatrisen, dvs $A = U\Sigma V^T = QRI$.

5 a) Konvergensordning är största q i $\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)}-x^*|}{|x^{(k)}-x^*|^q} = C < \infty$
b) Kvadratisk resp. linjär med $C = \frac{m-1}{m}$.
c) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_2 - 3 \\ x_2^3 - x_3 \\ 2x_1 - x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$, $\quad J(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2 & 0 \\ 0 & 3x_2^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2x_3 \end{bmatrix}$
$x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$, $\quad x^{(1)} = x^{(0)} - J(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)})$ Ekvationssystemet $J(x^{(0)})d^{(0)} = f(x^{(0)})$ blir $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} d^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ med lösning $d^{(0)} = [-0.5 \quad -1.5 \;\; 0]^T$ och därmed
$x^{(1)} = x^{(0)} - d^{(0)} = [0.5 \;\; 1.5 \;\; 0]^T$

6 a) $y(t) = 1/(a + be^{-t})$. Invertera $1/y(t) = a + be^{-t}$.

Ekvationssystem $\begin{bmatrix} 1 & e^{-t_1} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 1 & e^{-t_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/y_1 \\ \dots \\ \dots \\ 1/y_m \end{bmatrix}$.

b) Residualer $f_i = \frac{1}{a+be^{-t_i}} - y_i$, Jacobian $J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(a+be^{-t_1})^2} & -\frac{e^{-t_1}}{(a+be^{-t_1})^2} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{(a+be^{-t_m})^2} & -\frac{e^{-t_m}}{(a+be^{-t_m})^2} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l)} - J(a^{(l)}, b^{(l)})^{-1} f(a^{(l)}, b^{(l)})$.

7 a) Sökmetod: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ för att minimera $f(x)$.
Linjesökning: $\min_\alpha f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$
b) Gyllene snittet, polynomapproximation, Newtons metod med varianter.

8 a) Enstegs, explicit och Runge-Kutta-metod.
b) Testproblem för stabilitet: $y' = \lambda y$, dvs $f = \lambda y$.
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k = \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}]y_k$. Begränsade lösningar för $z = h\lambda$ i stabilitetsområdet: $\{z \in C; |\ 1 + z + \frac{z^2}{2}\ | \leq 1\}$.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2002-01-14

DAG: Måndag 14 januari 2002 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 28 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1

a) Visa spektralsatsen: Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt linjärt rum V. Då finns det en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. **(7p)**

b) Den reella symmetriska 3×3 - matrisen A har egenvärdena $2,\ 5$ och 7. Dessutom gäller att $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ange en egenvektor till egenvärdet 7. **(3p)**

Uppgift 2

a) Låt $u \in V$, ett linjärt rum med skalärprodukt och låt $\{e_i\}_{i=1}^k$ vara ON-bas för ett underrum U till V. Visa att $\sum_{i=1}^k < u, e_i >^2 \quad \leq \quad \| u \|^2$. **(3p)**

b) Betrakta det linjära rummet $C[-\pi, \pi]$ med skalärprodukt $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt$ samt funktionen $f(t) = t, \ -\pi \leq t \leq \pi$. Bestäm bästa approximationen till f i underrummet Span $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin(t),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)\}$. **(4p)**

Uppgift 3

Betrakta den reella matrisen $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm p och q så att $dim\ V(A) = dim N(A)$ och ange baser för rummen $V(A)$ och $N(A)$ samt för ortogonala komplementen till dessa rum, för dessa värden på p och q. **(6p)**

Uppgift 4

Låt A vara en $n \times 1$-matris (bara en kolonn).

a) Ange explicit den kompakta QR-faktoriseringen av A. **(2p)**

b) Ange minstakvadratlösningen till det överbestämda ekvationssystemet $Ax = b$, där b är en n-vektor. **(2p)**

c) Bestäm explicit den kompakta SVD-faktoriseringen av A. **(2p)**

d) Bestäm explicit den kompakta SVD-faktoriseringen av A^T. **(2p)**

Uppgift 5

En funktion är given genom tabellen

x	0	1	2	3	4
f	-1.2	0.3	1.2	2.4	3.0

Beräkna en approximation till $\int_0^4 f(x)\ dx$ genom att använda trapetsformeln och ett stegs Richardsonextrapolation. Gör feluppskattning. Tabellvärdena antas vara korrekt avrundade. **(6p)**

Uppgift 6

a) Definiera vad som menas med fixpunktsiteration vid ekvationslösning och skriv upp ett villkor för konvergens för fallet en variabel. **(3p)**

b) Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1^3 + 3x_2 - 4 = 0 \\ x_2^2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3^3 + 2 = 0 \end{cases}$

Gör en iteration med Newtons metod och start i origo. **(4p)**

Uppgift 7

Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = \frac{1}{ae^{-bt}}$ till mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ ...,\ m$ med $m > 2$.

a) Formulera om modellen så att linjär minsta kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(4p)**.

b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 8
Rörelseekvationen för en vertikalt upphängd kedja av längd 1, som sätts i rörelse med ett distinkt slag med hastighet 1 m/sek på mitten, kan modelleras av differentialekvationen

$$\begin{cases} x\ y''_{xx} + y'_x = g^{-1}\ y''_{tt},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ y(x,0) = 0 \\ y'_t(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1,\ x = 0.5 \\ 0,\ x \neq 0.5 \end{cases} \\ y(0,t) = 0 \\ y(1,t) = 0 \end{cases}$$

där g är gravitationen. Vi vill lösa problemet med linjemetoden. Sätt upp det system av första ordningens ordinära differentialekvationer som ska lösas. Använd centraldifferens vid rumsdiskretiseringen. **(8p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 14 januari 2002

1 a) Se LAT, sid 66.
b) Egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala. $[1\ \ 1\ \ 0]^T$ är egenvektor till $\lambda = 2$ och $[1\ \ -1\ \ 0]^T$ är egenvektor till $\lambda = 5$. Egenvektor till $\lambda = 7$ är då $[1\ \ 1\ \ 0]^T \times [1\ \ -1\ \ 0]^T = [0\ \ 0\ \ -2]^T$.

2 a) Bästa approximation till u i U är $\hat{u} = \sum_{i=1}^{k} < u, e_i > e_i$, med $u - \hat{u}$ ortogonal mot $\hat{u}$. Pythogoras sats ger $\| \hat{u} \| \leq \| u \| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} < u, e_i >^2 \leq \| u \|^2$.
b) De angivna funktionerna $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin(t)$ och $e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)$ är ON-bas ty $\int_{-\pi}^{\pi} e_i^2\ dt = 1, \quad i = 1,\ 2,\ 3$ och $\int_{-\pi}^{\pi} e_i e_j\ dt = 0, \quad i \neq j$. Bästa approximation blir då $\sum_{i=1}^{3} < f, e_i > e_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ t\ dt + \frac{sin(t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ t\ sin(t)\ dt + \frac{cos(t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ t\ cos(t)\ dt = 0 + 2sin(t) + 0 = 2sin(t)$.

3 $dim\ V(A) + dim\ N(A) = 2 \Rightarrow dim\ V(A) = dim\ N(A) = 1$. Kolonnerna ska alltså vara parallella dvs $p = 2,\ q = 2$. $V(A) = Span([2\ \ 1\ \ 2\ \ 1]^T)$, dvs $[2\ \ 1\ \ 2\ \ 1]^T$ är bas för $V(A)$. Vidare är $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ dvs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in N(A)$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är bas för $N(A)$. $N(A)^\perp$ spänns av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som alltså är bas för $N(A)^\perp$. Slutligen fås $V(A)^\perp = N(A^T)$ ur homogena systemet $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med lösning $x = [\frac{1}{2}(-u - 2s - t)\ \ u\ \ s\ \ t]^T$, dvs $[-\frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$, $[-\frac{1}{2}\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$ och $[-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T$ är bas för $V(A)^\perp$.

4 a) $A = Q_1 R, \quad Q_1 = A / \| A \|_2$ har norm $= 1 \Rightarrow \ R = \| A \|_2$
b) $Rx = Q_1^T b \Rightarrow x = Q_1^T b / \| A \|_2 = A^T b / \| A \|_2^2$
c) $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T, \quad U_1 = A / \| A \|_2$ har norm $= 1 \Rightarrow \Sigma_1 = \| A \|_2, \quad V_1 = 1$ har norm $= 1$.
d) $A^T = V_1 \Sigma_1 U_1^T$, dvs $A^T = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ med $U_1 = 1, \quad \Sigma_1 = \| A \|_2, \quad V_1 = A / \| A \|_2$

5 $T(4) = 4(-1.2/2 + 3.0/2) = 3.6, \quad T(2) = 2(-1.2/2 + 1.2 + 3.0/2) = 4.2$
$T(1) = 1(-1.2/2 + 0.3 + 1.2 + 2.4 + 3.0/2) = 4.8$
$R(2) = 4.2 + \frac{4.2 - 3.6}{3} = 4,4, \quad R(1) = 4.8 + \frac{4.8 - 4.2}{3} = 5$
$| R_T | \leq | R(1) - R(2) | = 0.6, \quad | R_f | \leq 4 \cdot 0.05 = 0.2$. Svar: $\int_0^4 f(x)\ dx \approx 5 \pm 0.8$

6 a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$. Fixpunktsiteration: $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \quad k = 0,\ 1,\ ...$
Konvergens om $\mid g'(x) \mid < 1$ i en omgivning av lösningen och om man startar i den omgivningen.

b) $f = \begin{bmatrix} x_1^3 + 3x_2 - 4 \\ x_2^2 - 2x_3 \\ x_1 - x_3^3 + 2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 3 & 0 \\ 0 & 2x_2 & -2 \\ 1 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x^{(1)} = x^{(0)} - d^{(0)}$, där $J(x^{(0)})d^{(0)} = f(x^{(0)})$. Ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} d^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow d^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7 a) Invertera: $\frac{1}{y} = ae^{-bt}$. Logaritmera : $ln\ \frac{1}{y} = ln\ a - b\ t$ eller $ln\ a - b\ t = -ln\ y$.

Linjärt ekvationssystem $\begin{bmatrix} 1 & -t_1 \\ ... & ... \\ ... & ... \\ 1 & -t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ln\ y_1 \\ ... \\ ... \\ -ln\ y_m \end{bmatrix}$ ger $ln\ a$ och b och sedan $a = e^{ln\ a}$.

b) Residualer $f_i = \frac{1}{ae^{-bt_i}} - y_i$, Jacobian: $J = \begin{bmatrix} -\frac{e^{bt_1}}{a^2} & \frac{t_1 e^{bt_1}}{a} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{e^{bt_m}}{a^2} & \frac{t_m e^{bt_m}}{a} \end{bmatrix}$

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{(l)} - J(a^{(l)}, b^{(l)})^{-1} f(a^{(l)}, b^{(l)})$.

8 Linjemetoden: $y''_{tt} = g(x\ y''_{xx} + y'_x)$. Låt $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$, och $W = Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ ... \\ ... \\ y'_n \end{bmatrix}$, där $y_i(t)$ är linjefunktioner motsvarande en diskretisering i rummet (x-led).

Vi får då följande system av första ordning: $\begin{cases} Y' = W & , \ Y(0) = 0 \\ W' = AY & , \ W(0) = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} \end{cases}$

Matrisen A kommer från rumsdiskretiseringen som vi gör med centraldifferens och steglängd h. Vi får se till att diskretiseringen görs så att $x_i = 0.5$ för något i. För detta i-värde tar vi då $f_i = 1$ och alla övriga $f_j = 0, \quad j \neq i$ (distinkt slag).

Centraldifferensmatrisen blir $A = \frac{g}{h^2} \begin{bmatrix} -2x_1 & x_1 + \frac{h}{2} & 0 & 0 & 0 \\ x_2 - \frac{h}{2} & -2x_2 & x_2 + \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & x_{n-1} - \frac{h}{2} & -2x_{n-1} & x_{n-1} + \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x_n - \frac{h}{2} & -2x_n \end{bmatrix}$

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2002-05-31

DAG: Fredag 31 maj 2002 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 17 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
Låt A vara en $m \times n$-matris.
a) Visa dimensionssatsen: $dimN(A) + dimV(A) = n$. **(6p)**
Anta nu att $m \geq n$ och att A har full rang.
b) Ange matrisen för spegling i $V(A)$, värderummet till A. **(2p)**
c) Ange matrisen för spegling i $N(A)$, nollrummet till A. **(2p)**
d) Matriserna i b) och c) är ortogonala. Visa det för matrisen i b). **(2p)**

Uppgift 2
Låt $V = Span\{x,\ sin^2x,\ cos^2x\}$ vara underrum i $C(R)$, rummet av kontinuerliga funktioner på R, med de angivna elementen som standardbas. Visa att även $\{1,\ x,\ sin^2x\}$ är bas och bestäm koordinaterna i denna bas för den vektor som i standardbasen har koordinaterna $[2,\ 4,\ 1]$. **(5p)**

Uppgift 3
Undersök för vilka värden på $\alpha \geq 0$ som matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(6p)**

Uppgift 4

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en full QR-faktorisering av A. **(5p)**
b) Bestäm de singulära värdena till A. **(3p)**

Uppgift 5

Bestäm den kvadratiska spline s, med nod i punkten $\pi/2$, som interpolerar $f(x) = cos(x)$ i punkterna 0, $\pi/2$ och π och som uppfyller villkoret $s'(0) = f'(0)$. **(5p)**

Uppgift 6

Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$ med $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi önskar lösa systemet med fixpunktsiteration. Ekvationssystemet formuleras om genom att x_1 löses ut ur första ekvationen, x_2 löses ut ur andra ekvationen och x_3 löses ut ur tredje ekvationen. Då blir systemet på form $x = Bx + c$, för en matris B och vektor c, och fixpunktsiterationen utförs sedan på vanligt sätt. Visa att fixpunktsiterationen konvergerar och gör två iterationer med start i origo. **(5p)**

Uppgift 7

En modell på formen $\Psi(t) = \alpha\ sin(\beta t)$ ska genom val av parametrarna α och β anpassas till en mätserie $(t_i,\ \Psi_i),\ i = 1,\ ...,\ m$. Formulera motsvarande icke-linjära minsta-kvadrat problem. Ange residual, Jacobian och teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(6p)**

Uppgift 8

Betrakta ett system av första ordningens differentialekvationer:
(*) $y' = f(t,\ y),\quad y(t_0) = c_0$.
a) Härled trapetsmetoden för lösning av systemet genom att använda lämplig approximation av integralformuleringen av problemet. **(3p)**
b) Bestäm approximationsordningen för trapetsmetoden. **(2p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för trapetsmetoden. **(2p)**
d) Betrakta följande två-punkts randvärdesproblem med given funktion $f(x)$:
$y'' + 2y' - 3y = f(x),\quad 0 \leq x \leq 1$
$y'(0) = 1,\ y'(1) = 2$
Överför med inskjutningsteknik problemet på formen (*) och formulera en lämplig iterativ metod för att lösa den ekvation som uppkommer. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 31 maj 2002

1 a) Se LAT, sid 17.
b) $P_1 = 2A(A^TA)^{-1}A^T - I$, ("dubbla" projektionen).
c) $P_2 = -I$, ($N(A) = O$, spegling i origo).
d) $P_1^TP_1 = (2A(A^TA)^{-1}A^T - I)^2 = 4A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T + I - 4A(A^TA)^{-1}A^T = I$

2 $1 = sin^2x + cos^2x$, Överföringsmatris $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. T är reguljär så nya basen är okey. Ekvationssystem $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger svaret $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3 Egenvärden: $\lambda_1 = 3$ och egenvärdena till delmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$, dvs $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2\alpha}$. Olika egenvärden om $\alpha \neq 0$ och $\alpha \neq 0.5$ Då diagonaliserbar.
Undersök $\alpha = 0$ som ger $\lambda_{2,3} = 2$. Homogena systemet $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger parameterlösningen $v_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, som tillsammans med egenvektorn $v_1 = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ till egenvärdet $\lambda_1 = 3$ inte spänner hela R^3, alltså är matrisen inte diagonaliserbar då $\alpha = 0$.
Undersök $\alpha = 0.5$ som ger $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Homogent system $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger parameterlösningen $v_3 = \begin{bmatrix} s/2 \\ s \\ t \end{bmatrix}$. Vidare ger på motsvarande sätt $\lambda_2 = 1$ en parameterlösning $v_2 = \begin{bmatrix} -u/2 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}$. Tillsammans spänner dessa R^3 och matrisen är därför diagonaliserbar. Slutsatsen blir att matrisen är diagonaliserbar för alla $\alpha \neq 0$.

4 a) Gram-Schmidt: $q_1,\ q_2$ okey som första kolonnerna i A ty ortogonala.

$$q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}.$$

Normering ger $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ och $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ har egenvärden 1 och 5. Singulära värdena till A är då $\sqrt{1} = 1$ och $\sqrt{5}$.

5 $s = \begin{cases} s_1, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ s_2, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ och ansätt $s_1 = 1 + ax + bx^2$ och $s_2 = c(x - \pi/2) + d(x - \pi/2)^2$.

Villkoren $s_1(0) = cos(0) = 1$ och $s_2(\pi/2) = cos(\pi/2) = 0$ har då redan utnyttjats vid ansatsen.

Vi har $s_1' = a + 2bx$ och ändpunktsvillkoret $s_1'(0) = f'(0) = 0$ ger $a = 0$ och interpolationsvillkoret $s_1(\pi/2) = cos(\pi/2) = 0$ ger $1 + b\frac{\pi^2}{4} = 0$ dvs $b = -\frac{4}{\pi^2}$.

Vidare blir $s_2' = c + 2d(x - \pi/2$ och splinevillkoret $s_2'(\pi/2) = s_1'(\pi/2) = -\frac{4}{\pi}$ ger $c = -\frac{4}{\pi}$.

Interpolationsvillkoret $s_2(\pi) = cos(\pi) = -1$ ger $-2 + \frac{\pi^2}{4}d = -1$ dvs $d = \frac{4}{\pi^2}$.

Splinen blir alltså $s = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\frac{4}{\pi}(x - \pi/2) + \frac{4}{\pi^2}(x - \pi/2)^2, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

6 Det omskrivna systemet blir $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(1 + x_2) \\ x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{4}(2 + x_2) \end{cases}$ med Jacobian av högersidan

$J = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ med $\| J \|_\infty = 1/2$.

Eftersom Jacobianens norm är mindre än 1 så har vi konvergens. Två iterationer ger

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},\ x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

7 Problemet formuleras: $min_{\alpha,\beta} \| f \|_2$ där $f_i = \alpha\ sin(\beta\ t_i) - \Psi_i$ är residualerna.

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} sin(\beta\ t_1) & \alpha\ t_1\ cos(\beta\ t_1) \\ .. & .. \\ .. & .. \\ sin(\beta\ t_m) & \alpha\ t_m\ cos(\beta\ t_m) \end{bmatrix}$

Gauss-Newtons metod: $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$

8 a) $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'\,dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)\,dt, \quad t_{k+1} = t_k + h$
Trapetsregeln ger: $y(t_{k+1}) - y(t_k) \approx \frac{h}{2}\,[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$
och så metoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$.

b) Tillämpad på testproblemet $y' = \lambda y$ blir metoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,[\lambda y_k + \lambda y_{k+1}]$
Om vi löser ut y_{k+1} får vi: $y_{k+1} = (\frac{1+h\lambda/2}{1-h\lambda/2})y_k$
och tillväxtfaktorn utvecklad blir $(1+h\lambda/2)(1+h\lambda/2+(h\lambda/2)^2+(h\lambda/2)^3+...) = 1+h\lambda+(h\lambda)^2/2+(h\lambda)^3/4+....$
Detta stämmer med tre termer i utvecklingen av $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + (h\lambda)^2/2 + (h\lambda)^3/6 + ...$
Alltså har metoden ordning 2.

c) Stabilitetsområde: $\{z \in C; |\ \frac{1+z/2}{1-z/2}\ | \leq 1\}$, där $z = h\lambda$. Med $z/2 = a + ib$ får vi $(1+a)^2 + b^2 \leq (1-a)^2 + b^2$ dvs $a \leq 0$ eller $Re(z) \leq 0$.

d) Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Då system: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f - 2y_2 + 3y_1 \\ y_2(0) = 1 \\ y_2(1) = 2 \end{cases}$

Inskjutning: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f - 2y_2 + 3y_1 \\ y_1(0) = s \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$. Beteckna lösningen $y(x, s)$.
Ekvationen är då: $y_2(1, s) - 2 = 0$.
Kan lösas med sekantmetoden: $s^{(k+1)} = s^{(k)} - \frac{(y_2(1,s^{(k)})-2)(s^{(k)}-s^{(k-1)})}{y_2(1,s^{(k)})-y_2(1,s^{(k-1)})},\ k = 1,\ 2,\ ...$

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2002-08-30

DAG: Fredag 30 augusti 2002 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 23 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1
a) Låt U vara ett underrum till det linjära rummet V och låt $U^\perp$ vara ortogonala komplementet till U. Visa att följande två egenskaper är ekvivalenta för vektorer $u \in V$ och $u' \in U$:
(i) $u - u' \in U^\perp$
(ii) $\| u - u' \| \leq \| u - w \|, \forall w \in U$ **(6p)**
b) Tillämpning på a-uppgiften: Låt U vara det underrum i R^4 som definieras av
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
Bestäm map standardskalärprodukten bästa approximation $u' \in U$ till
$u = (2,\ 0.25\ ,\ 0,\ -1)$. **(3p)**

Uppgift 2. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Ta fram en faktorisering $PA = LU$, där P står för systematiska (stabila) radbyten vid Gausselimineringen. Ange explicit P, L och U. **(4p)**
b) Bestäm $rang(A)$, gärna med hjälp av resultatet i a)-uppgiften. **(2p)**
c) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$, gärna med hjälp av resultatet från a)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 3. Låt P_n var det linjära rummet av polynom p av grad $\leq n$, med bas $\{1,\ x,\ ...\ ,\ x^n\}$. Betrakta avbildningarna F och G definierade genom
$(Fp)(x) = x^2 p(\frac{1}{x})$
$Gp = p'$ (derivering)
a) Visa att F är en linjär avbildning från P_2 till P_2. **(2p)**
b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen GF från P_2 till P_1 (i angiven bas). **(5p)**
c) Är den sammansatta avbildningen GF inverterbar? Motivera! **(1p)**

Uppgift 4
a) Ange hur en singulärvärdesuppdelning (SVD) av en $m \times n$-matris A med rang $r < n < m$ ser ut. **(3p)**
b) Visa genom att betrakta diagonalisering av $A^T A$ att de singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^T A$. **(3p)**
c) Hur kan det största singulära värdet av A bestämmas med potensmetoden? Hur hänger den vektor, som potensmetoden itererar fram, ihop med SVD-faktorerna? **(3p)**

Uppgift 5. En kalkylator arbetar med sexsiffrig decimal aritmetik och korrekt avrundning. Kalkylatorn klarar även att ge sex korrekta siffror i värdena för enkla matematiska funktioner bland annat $\sqrt{x}$.
a) Vad blir på denna kalkylator $\sqrt{4318} - \sqrt{4317}$? Uppskatta absoluta och relativa felens gränser. **(2p)** Hjälpresultat: Följande korrekt avrundade värden gäller: $\sqrt{4318} = 65.7115$, $\sqrt{4317} = 65.7039$
b) Skriv om uttrycket i a)-uppgiften så att det kan beräknas med bättre noggrannhet och genomför uträkningen så som kalkylatorn skulle ha gjort det. Uppskatta absoluta och relativa felen samt ange svar med felgräns. **(4p)** Hjälpresultat: Följande korrekt avrundade värde gäller: $\frac{1}{131.415} = 0.00760948$

Uppgift 6
a) Gör två iterationer med Steepest Descent-metoden på problemet att minimera funktionen $f(x) = 5x_1^2 + x_1 x_2 + 0.5x_2^2 - x_1$. Starta i origo. **(4p)**
b) Hur många iterationer skulle det krävas med Newtons metod på problemet i a)-uppgiften om man startar i origo? Motivera! **(1p)**
c) Härled Gauss-Newtons metod för lösning av överbestämda icke-linjära ekvationssystem. **(4p)**

Uppgift 7
a) Skriv upp prediktor/korrektor-metoden:
(p) Euler framåt (k) Trapetsmetoden
för ett begynnelsevärdesproblem för ett system av ordinära differentialekvationer. **(2p)**
b) Vilken explicit metod får man om man endast gör en fixpunktsiteration i korrektorn i a)-uppgiften? **(3p)**

Uppgift 8. Betrakta följande två-punkts randvärdesproblem med given funktion $f(x)$:
$y'' + 2y' - 3y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$
$y'(0) = 1, \; y'(1) = 2$
Formulera en numerisk metod att lösa problemet som bygger på centraldifferens av derivatorna. Skissa det linjära ekvationssystem som man ska lösa för att få fram approximationen. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 30 augusti 2002

1 a) Se LAT, sid 35.
b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $Au = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.5 \end{bmatrix}$.
Systemet $AA^Tx = Au$ har lösning $x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ med $u'' = A^Tx = (3/2,\ 1,\ 1/2,\ -1/2)$ och svaret $u' = u - u'' = (1/2,\ -3/4,\ -1/2,\ -1/2)$.

2 a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{P_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{elim}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{P_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
$\overset{elim}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.
$P = P_2 \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
b) $rang(A) = dim\ V(A) = 2$ ty 2 linjärt oberoende kolonner i U.
c) Lös $Ux = 0$: Ger parameterlösning $x = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dvs som bas kan vi ta $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3 a) $p = a + bx + cx^2 \in P_2$, $\quad Fp = ax^2 + bx + c \in P_2$
Avbildningens matris: $Fe_1 = e_3,\ Fe_2 = e_2,\ Fe_3 = e_1$ dvs $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
A är en (linjär) matris så avbildningen är linjär.
b) Avbildningen G's matris: $Ge_1 = 0,\ Ge_2 = e_1,\ Ge_3 = 2e_2$, dvs $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Sammansatta avbildningens matris $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
c) BA ej inverterbar matris alltså är avbildningen inte inverterbar.

4 a) $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$, där U och V är ortogonala $m \times m$ resp $n \times n$ matriser. U_1 och V_1 har lika många kolonner som rangen r av A. Σ_r är en diagonalmatris med de positiva singulära värdena $\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad ..., \quad \sigma_r$ i diagonalen.
b) $A^TA = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$, diagonalisering med egenvärdena till A^TA i $\Sigma^T\Sigma$, dvs egenvärdena till A^TA är $\sigma_i^2, \ i = 1, \ 2, \ ..., \ n$.
c) Potensmetoden på A^TA ger σ_1^2, där σ_1 är största singulära värde. Vektorn blir motsvarande kolonn i V, dvs den första.

5 a) $y = \sqrt{4318} - \sqrt{4317} = 65.7115 - 65.7039 = 0.0076 \pm 10^{-4}$ med relativt fel $10^{-4}/0.0076 < 1.3 \cdot 10^{-2}$.
b) Förläng med konjugatkvantiteten: $y = \frac{(\sqrt{4318}-\sqrt{4317})(\sqrt{4318}+\sqrt{4317})}{\sqrt{4318}+\sqrt{4317}} = \frac{1}{\sqrt{4318}+\sqrt{4317}} = \frac{1}{131.413} = 0.00760948$.
Relativ felgräns $\approx 0.6 \cdot 10^{-3}/131 \leq 4.6 \cdot 10^{-6}$
Absolut felgräns $\approx 0.0076 \cdot 4.6 \cdot 10^{-6} \leq 3.5 \cdot 10^{-8}$
Svaret kan anges: $y = 0.00760948 \pm 4 \cdot 10^{-8}$

6 a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}, \quad \alpha_k$ är steglängd och $d^{(k)}$ är sökriktning.
SD: $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$. Kvadratisk funktion: Steglängd enligt sluten formel.
$\nabla f = \begin{bmatrix} 10x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_0 = -\frac{\nabla f^{(0)} \cdot d^{(0)}}{d^{(0)} \cdot Hd^{(0)}} = 0.1$
$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}$.
$\alpha_1 = -\frac{\nabla f^{(1)} \cdot d^{(1)}}{d^{(1)} \cdot Hd^{(1)}} = -\frac{-0.1}{0.1} = 1, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$.
b) Kvadratisk funktion gör att det blir endast en iteration oavsett startpunkt med Newtons metod.
c) $f(x) = 0, \quad f: R^n \to R^m, \quad m > n$.
Minstakvadratlösning: $min_x \parallel f(x) \parallel_2$.
Stegvis linjärisering enligt Taylor: $f(x) \approx f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})$
Approximation: $min_x \parallel f(x) \parallel_2 \approx min_x \parallel f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \parallel_2$
Detta är nu ett linjärt minstakvadratproblem. Ta $x^{(k+1)}$ som lösning till detta problem och iterera vidare, så har vi Gauss-Newtons metod.

7 a) $(p): \ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad (k): \ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$
b) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)\right]$

8 Diskretisering i punkterna $x_0 = 0, \ x_1 = x_0 + h, \ x_2 = x_1 + h, \ ..., \ x_n = x_{n-1} + h = 1$ och $y_i \approx y(x_i), \ i = 0, \ 1, \ ,..., \ n.$
Låt vidare $f_i = f(x_i), \ i = 1, \ 2, \ ..., \ n$ och inför hjälppunkterna $x_{-1} = -h$ och $x_{n+1} = 1+h.$
Centraldifferenser: $y''_i \approx \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \ 2, \ ..., \ n-1, \quad y'_i \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \quad i = 0, \ 1, \ ..., \ n$
Diskretiseringen ger följande linjära ekvationssystem för de obekanta $y_{-1}, \ ..., \ y_{n+1}$:

$$\begin{bmatrix} -h & 0 & h & & & \\ 1-2h & -3h^2-2 & 1+2h & & & \\ & .. & .. & .. & & \\ & & .. & .. & .. & \\ & & & 1-2h & -3h^2-2 & 1+2h \\ & & & -h & 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ .. \\ .. \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ f_0 \\ .. \\ .. \\ f_n \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2003-01-13

DAG: Måndag 13 januari 2003   TID: 8.45 - 12.45   SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 27 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
	Resultatet kan får per telefon 772 3509, dagligen efter kl 14
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att det linjära rummet av polynom av grad $\leq n$ har dimensionen $n+1$. **(4p)**
b) Visa att mängden av polynom av exakt grad n inte är ett linjärt rum då $n > 0$. **(2p)**
c) Undersök om mängden av symmetriskt positivt definita $n \times n$-matriser med operationerna

$A \oplus B$ vanlig matrisaddition
$\alpha \odot A = A^{\alpha}$

är ett linjärt rum (ett vektorrum). **(3p)**

Uppgift 2.
a) Visa spektralsatsen: Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt reellt linjärt rum V. Då finns det en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. **(7p)**

b) Undersök om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(3p)**

Uppgift 3. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och vektorn $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm nollrummet och värderummet till matrisen A. **(4p)**
b) Lös ekvationssystemet $Ax = b$ i minstakvadratmening med hjälp av normalekvationerna. Ange residualens (felvektorns) norm. **(3p)**
c) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av A. **(3p)**
d) Lös ekvationssystemet $Ax = b$ med hjälp av QR-faktoriseringen i c)-uppgiften. **(3p)**

Uppgift 4. Anta att A är en symmetrisk positivt definit matris. Ange hur man lämpligen beräknar $x^T A^{-1} x$. **(4p)**

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. Ge en gräns för relativa felet i lösningen om man räknar med tre korrekta decimaler i $\sqrt{2}$. **(4p)**

Uppgift 6. Betrakta följande tabell över funktionsvärden:

x	0	1	2	3
f	0	1	1	-1

a) Beräkna en approximation till $\int_0^3 f(x)\ dx$ med hjälp av tabellen och trapetsformeln. **(3p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet till punkterna i tabellen. **(3p)**
c) Undersök om $s = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1 + 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med knutpunkt (nod) i $x = 1$ och som interpolerar tabellvärdena. **(2p)**

Uppgift 7. En modell på formen $\Psi(t) = a\ sin(b\ t) + c\ cos(d\ t)$ ska genom val av parametrarna a, b, c och d anpassas till en mätserie $(t_i,\ \Psi_i),\ i = 1,\ ...,\ m$. Formulera motsvarande icke-linjära minsta-kvadrat problem. Ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(6p)**

Uppgift 8.
a) Betrakta differentialekvationen $y' = -2y^3,\ y(0) = 1$. Antag att vi vill använda Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 0.1$ för att approximera $y(0.1)$. Skriv upp den ickelinjära ekvation som metoden leder till. **(3p)**
b) Antag att vi vill lösa den ickelinjära ekvationen i a)-uppgiften med fixpunktsiteration. Skriv formellt upp hur en sådan iteration ser ut och ange ett lämpligt sätt att bestämma en startapproximation. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 13 januari 2003

1 a) Betrakta mängden $B = \{x^j\}_{j=0}^n$. B spänner rummet P_n, mängden av polynom av grad $\leq n$, eftersom $p \in P_n$ kan skrivas $p = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Vidare är B linjärt oberoende ty $q = \sum_{j=0}^n \beta_j x^j = 0,\ \forall x \Rightarrow \beta_j = 0, \forall j$. Detta följer genom upprepad derivering av q och insättning av $x = 0$.
b) $q = 0$ tillör inte mängden och nollelementet ska tillhöra varje linjärt (under)rum.
c) $(\alpha+\beta)\odot A = A^{\alpha+\beta} = A^\alpha \cdot A^\beta \neq$ (α och β positiva heltal t.ex.) $\neq A^\alpha \oplus A^\beta = \alpha\odot A \oplus \beta\odot A$. Alltså gäller inte räknelag (8) (distributivitet). Slutsats: Ej linjärt rum.

2 a) se LAT, sid 66.
b) Alla egenvärden =1 (på diagonalen).

Beräkna egenvektorer: Lös homogena systemet $(A - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

med parameterlösning $x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$. Lösningsrummet har dimensionen 2 och spänner alltså inte hela R^3. Slutsats: Matrisen ej diagonaliserbar.

3 a) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, dvs nollrummet består av endast nollelementet och dimensionen 0.

Värderummet spänns av $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dessa är inte parallella och spänner ett plan, dimensionen är alltså 2.

b) Normalekvationerna $A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

c) Gram-Schmidt: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ och $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

d) $Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

4 $A = LL^T$, dvs Cholesky-faktorisering. (Då gäller formellt $A^{-1} = L^{-T}L^{-1}$)
Lös triangulärt system (framåtsubstitution) $Ly = x$. (Formellt är då $y = L^{-1}x$)
Beräkna y^Ty. Detta är svaret ty formellt gäller $y^Ty = x^TL^{-T}L^{-1}x = x^TA^{-1}x$.

5 Följande uppskattning gäller: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$, där $\kappa(A) =\| A \|\| A^{-1} \|$ är konditionstalet till matrisen A.
Här har vi $\| A \|_\infty = 9$, $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. $\| A^{-1} \|_\infty = 0.9$, $\kappa(A) = 8.1$
Vidare enligt förutsättning: $\| \delta b \|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$ (tre korrekta decimaler) och $\| b \|_\infty = 2$.
Uppskattningen blir alltså: $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 8.1\frac{0.5\cdot 10^{-3}}{2} \leq 2 \cdot 10^{-3}$.

6 a) $\int_0^3 f(x)\,dx \approx 1\left[\frac{1}{2}\cdot 0 + 1 + 1 + \frac{1}{2}(-1)\right] = \frac{3}{2}$.
b) Newtons form med villkoret $p_3(0) = 0$ utnyttjat vid ansatsen:
$p_3 = ax + bx(x-1) + cx(x-1)(x-2)$
Villkoret $p_3(1) = 1$ ger $p_3(1) = a = 1$
Villkoret $p_3(2) = 1$ ger $p_3(2) = 2 + 2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$.
Villkoret $p_3(3) = -1$ ger $p_3(3) = 3 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 + c\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{6}$.
Polynomet blir alltså $p_3 = x - \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$.
c) s är en kvadratisk spline eftersom $s_1(1) = s_2(1) = 1$ och $s_1'(1) = s_2'(1) = 2$.
Den interpolerar dock inte tabellvärdet $f(2) = 1$ ty $s_2(2) = \frac{3}{2} \neq 1$.

7 Problem: $\min_{a,b,c,d} \| f \|_2$ där $f_i = a\ sin(b\ t_1) + c\ cos(d\ t_i) - \Psi_i$ är residualerna.

$$\text{Jacobian: } J = \begin{bmatrix} sin(b\ t_1) & t_1\ a\ cos(b\ t_1) & cos(d\ t_1) & -t_1\ c\ sin(d\ t_1) \\ sin(b\ t_2) & t_2\ a\ cos(b\ t_2) & cos(d\ t_2) & -t_2\ c\ sin(d\ t_2) \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ sin(b\ t_m) & t_m\ a\ cos(b\ t_m) & cos(d\ t_m) & -t_m\ c\ sin(d\ t_m) \end{bmatrix}$$

$$\text{Gauss-Newton: } x\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$$

8 a) $y_0 = 1$, $y_1 = y_0 - 0.2y_1^3 = 1 - 0.2y_1^3$, dvs ekvationen $0.2y_1^3 + y_1 - 1 = 0$.
b) Fixpunktsiteration: $y_1^{(l+1)} = 1 - 0.2\left[y_1^{(l+1))}\right]^3$.
Startapproximation $y_1^{(0)}$ med Euler framåt dvs $y_1^{(0)} = y_0 - 0.2y_0^3 = 1 - 0.2\cdot 1^3 = 0.8$.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2003-05-30

DAG: Fredag 30 maj 2003 TID: 14.15 - 18.15 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 19 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att $m \times n$ matrisen A har rang=1 då och endast då $A = vu^T$ för vektorer $v \in R^m$ och $u \in R^n$ med $v \neq 0$ och $u \neq 0$. **(4p)**
b) Låt $A = vu^T$ för $v \in R^n$ och $u \in R^n$ med $v \neq 0$. Visa att ett egenvärde till A är $u^T v$. Vad är motsvarande egenvektor? Bestäm alla övriga egenvärden till A. Ange en bas av egenvektorer till A. **(4p)**

Uppgift 2.
Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm en full QR-faktorisering av A. **(4p)**
b) Bestäm de singulära värdena till A. **(2p)**
c) Låt $b = [1\ 1\ 1\ 1]^T$. Lös ekvationssystemet $Ax = b$ i minstakvadratmening. Ange felets (residualens) storlek. **(2p)**
d) Avgör hur känsligt normalekvationssystemet är genom att bestämma konditionstalet till $A^T A$. **(2p)**

Uppgift 3. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (2a_1 - a_2) + 2a_0 t + (a_0 - 2a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Ta fram matrisen för avbildningen i standardbasen för P_2 : $\{1,\ t,\ t^2\}$. **(2p)**
b) Ta fram inversen till avbildningen F och beskriv den på samma sätt som avbildningen F är beskriven. **(4p)**
c) Är avbildningen F "på" ("onto")? Är avbildningen F "ett till ett" ("one to one")? Motivera ordentligt! **(2p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ då $x^T x = 1$. Bestäm en vektor u med $u^T u = 1$ så att $Q(u)$ blir maximal. **(4p)**
b) Bestäm $max\ Q(x)$ under villkoren $x^T x = 1,\ x^T u = 0$, där u är vektorn från a-uppgiften. Ange en vektor v så att $Q(v)$ blir maximal under de givna villkoren. **(2p)**
c) Vilken typ av objekt i R^3 representerar ekvationen $Q(x) = 1$? **(1p)**

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 - x_1x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ x_1^3 - x_2x_3 - 2x_3 = 0 \\ x_1^2 - 2x_2 - 2 = 0 \end{cases}$.
a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Ge en formel för hur felet efter en iteration skulle kunna uppskattas. Några beräkningar behöver inte göras. **(2p)**

Uppgift 6.
a) Bestäm den kvadratiska spline s(x) med inre nod i 1, som interpolerar $f(x) = x^3 + x$ i punkterna 0, 1, 2 och som uppfyller villkoret $s'(2) = 12$. **(4p)**
b) Bestäm integralen av s i a-uppgiften över intervallet (0,2) **exakt** med en numerisk metod. **(2p)**

Uppgift 7.
a) Definiera vad som menas med en tillåten riktning resp. en descentriktning i samband med optimering. Ge ett användbart villkor för att en riktning ska vara en descentriktning. **(3p)**
b) Skriv upp sökmetoden Steepest Descent samt diskutera hur steglängden kan bestämmas. **(3p)**

Uppgift 8. Heuns metod för begynnelsevärdesproblem, $y' = f(t, y),\quad y(0) = y_0$, är enstegsmetoden
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$
a) Bestäm approximationsordningen för Heuns metod **(3p)**
b) Bestäm stabilitetsområdet för Heuns metod. Är den A-stabil? **(3p)**
c) Heuns metod uppstår ur en prediktor/korrektormetod med **en** fixpunktsiteration i korrektorn. Prediktorn är Eulers framåtmetod. Vilken metod är korrektorn? Förklara ordentligt! **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 30 maj 2003

1a) $\Leftarrow)$ $A = vu^T \Rightarrow Ax = vu^Tx = (u^Tx)v \in Span(v), u \neq 0 \Rightarrow \exists\ x$ med $u^Tx \neq 0, v \neq 0$. Alltså har V(A) dimensionen 1.
$\Rightarrow)$ $dim\ V(A) = 1$, någon kolonn $\neq 0$ säg den första. Då är $A = [v\ \alpha_2 v\ \alpha_3 v\ ...\ \alpha_n v]$ för $\alpha_j \in R$, dvs $A = vu^T$ med $u = [1\ \alpha_2\ ...\ \alpha_n]^T$.
b) $Av = vu^Tv = (u^Tv)v$ dvs u^Tv egenvärde med motsvarande egenvektor v. Om $u = 0$ så är $A = 0$ med alla egenvärden 0. Om $u \neq 0$ så finns ON-bas i R^n : $\{u,\ u_2,\ ...\ , u_n\}$. Då $Au_j = vu^Tu_j = 0u_j$, $j = 2,\ ...\ ,\ n$ dvs A har egenvärde 0 med multiplicitet n-1. $\{v,\ u_2,\ ...\ ,\ u_n\}$ är bas av egenvektorer, om $u^Tv \neq 0$.

2a) Gram-Schmidt: Kolonnerna a_1, a_2, a_3 är ortogonala, behöver bara normeras. Vi skaffar en fjärde kolonn med G-S utgående från $v = [0\ 1\ 0\ 0]^T \notin Span\{a_j\}_{j=1}^3$:
$a_4 = v - 0a_1 - \frac{1}{4}a_2 - 0a_3 = [0\ 0.5\ 0\ \ -0.5]^T$. Med normerade kolonner får vi då

$$Q = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{17} & 0 & 1/\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 0 & -4/\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{8} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \text{ Sedan } R = Q^TA = \begin{bmatrix} \sqrt{17} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$ Egenvärden 17, 8 och 17, dvs singulära värden $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{8}$.

c) $A^TAx = A^Tb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 5/17 \\ 1/2 \\ -3/17 \end{bmatrix}$
$r = Ax - b = 0, \quad \| r \| = 0.$

d) $(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/17 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 \end{bmatrix}$, $\kappa(A^TA) = \| A^TA \| \cdot \| (A^TA)^{-1} \| = 17/8$.
Inte speciellt känsligt.

3a) $F(e_1) = 2t + t^2 = 2e_2 + e_3,\ F(e_2) = 2 = 2e_1,\ F(e_3) = -1 - 2t^2 = -e_1 - 2e_3.$

$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$

b) $M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$F^{-1}(e_1) = 0.5t,\ F^{-1}(e_2) = 0.5 + 0.125t + 0.25t^2,\ F^{-1}(e_3) = -0.25t - 0.5t^2$

$F^{-1}(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \frac{1}{2}a_1 + (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{8}a_1 - \frac{1}{4}a_2)t + (\frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{2}a_2)t^2.$

c) Avbildningen F är både ”på” och ”ett-till-ett” eftersom den är inverterbar, kolonnerna i M utgör bas för R^3.

4a) $Q(x) = x^TAx$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Egenvärden $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, egenvektorer $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$

Största värde på $Q(x)$ är lika med största egenvärde, dvs 3. Antas för motsvarande egenvektor $u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[0,\ 1,\ 1]^T$.

b) Enligt sats i Lay, så är maximum lika med näst största egenvärde dvs 2, och maximum antas för motsvarande egenvektor, dvs $v = \pm[1,\ 0,\ 0]^T$.

c) Ellipsoid med halvaxlar längs egenvektorerna p_i och med längd $1/\sqrt{\lambda_i}$ där λ_i är egenvärdet motsvarande p_i.

5a) $f = \begin{cases} 2x_1 - x_1x_2 + x_3 - 3 \\ x_1^3 - x_2x_3 - 2x_3 \\ x_1^2 - 2x_2 - 2 \end{cases} \quad J = \begin{bmatrix} 2 - x_2 & -x_1 & 1 \\ 3x_1^2 & -x_3 & -x_2 - 2 \\ 2x_1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad f_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\quad J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b) $\| \mathbf{x}_1 - x^* \| \approx \| J(\mathbf{x}_1)^{-1}f(\mathbf{x}_1) \|$ eller $\| \mathbf{x}_1 - x^* \| \lesssim \| J(\mathbf{x}_1)^{-1} \| \| f(\mathbf{x}_1) \|.$

6a) Ansätt $s_2 = 10 + a(x-2) + b(x-2)^2$. Då gäller $s_2(2) = f(2) = 10$.
$s_2' = a + 2b(x-2)$, $\quad s_2'(2) = 12 \Rightarrow a = 12$
$s_2 = 10 + 12(x-2) + b(x-2)^2$, $s_2(1) = 10 - 12 + b = f(1) = 2 \Rightarrow b = 4$
$s_2 = 10 + 12(x-2) + 4(x-2)^2 = 4x^2 - 4x + 2$. klar!
Ansätt $s_1 = 2 + c(x-1) + d(x-1)^2$. Då gäller $s_1(1) = f(1) = 2$.
$s_1' = c + 2d(x-1)$, $s_1'(1) = s_2'(1) = 4 \Rightarrow c = 4$
$s_1 = 2 + 4(x-1) + d(x-1)^2$, $s_1(0) = 2 - 4 + d = f(0) = 0 \Rightarrow d = 2$
$s_1 = 2 + 4(x-1) + 2(x-1)^2 = 2x^2$. klar!

$$s(x) = \begin{cases} 2x^2, \ 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^2 - 4x + 2, \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b) Simpsons formel är exakt för andragradspolynom. Simpsons formel över de två delintervallen ger $I = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0.5 + 2) + \frac{1}{6}(2 + 4 \cdot 5 + 10) = 6$. Här använder vi splinevärdena $s_1(0.5) = 0.5$ och $s_2(1.5) = 5$.

7 a) s är en tillåten riktning i x om $x + \alpha s$ är tillåtna punkter för $0 < \alpha < \delta_1$.
s är en descentriktning till funktionen f i x om $f(x + \alpha s) < f(x)$ för $0 < \alpha < \delta_2$.
s är en descentriktning i x om $\nabla f(x)^T s < 0$.
b) Steepest Descent: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$.
Steglängden α_k väljs genom linjesökning dvs genom problemet
$min_\alpha \ f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$, ett endimensionellt optimeringsproblem.

8 a) Heuns metod på testproblemet (T): $y' = \lambda y$:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)\} = y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = (1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}) y_k$.
Tillväxtfaktorn stämmer med tre termer till exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda}$.
Metodens approximationsordning är 2.
b) $\mid 1 + z + \frac{z^2}{2} \mid \leq 1$ med $z = h\lambda$. Ej A-stabil ty t.ex $z = h\lambda = -3$ ger $\mid 1 - 3 + \frac{9}{2} \mid > 1$.
c) Prediktor är Euler framåt: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$.
Korrektor är trapetsmetoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}\}$
En fixpunktsiteration i korrektorn: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\}$, vilket är Heuns metod enligt ovan.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2003-08-29

DAG: Fredag 29 augusti 2003 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt U_1 och U_2 vara underrum i det linjära rummet V.
Visa att $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2;\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ är ett underrum i V. **(4p)**
b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$. Undersök om $Nul(A)$ och $Nul(B)$ har någon gemensam vektor $\neq 0$ i R^4. **(4p)**

Uppgift 2.
a) Låt $u \in V$, ett linjärt rum med skalärprodukt $< \cdot, \cdot >$ och motsvarande norm $\| \cdot \|$. Låt $\{e_i\}_{i=1}^k$ vara ON-bas för ett underrum U till V. Visa att $\sum_{i=1}^k < u, e_i >^2 \leq \| u \|^2$. **(3p)**
b) Låt $u \neq 0$ och $v \neq 0$ vara två vektorer i ett linjärt rum med skalärprodukt, sådana att $\| u \| = \| v \| = \| u - v \|$. Bestäm vinkeln mellan u och v. **(3p)**
c) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **(3p)**

Uppgift 3. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_2 + (a_0 + a_1 - a_2)t + 2a_0 t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Betrakta basen $B = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ för P_2. Bestäm transformationsmatrisen mellan baserna B och E och bestäm med hjälp av den koordinaterna för $q = 3 - 2t + 4t^2$ i basen B. **(3p)**
c) Bestäm matrisen för avbildningen F i basen B och bestäm koordinaterna för $F(q)$ i basen B, där q är given i b-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden. **(4p)**.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - x_2(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 2 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om andra ekvationen i a-uppgiften ändras till $x_2'(t) = -2x_2(t)$? Motivera ordentligt! **(2p)**
c) Föreslå en numerisk metod som klarar av att lösa b-uppgiften. Välj en steglängd för metoden och beräkna ett steg. Blir det några stabilitetsproblem? **(4p)**

Uppgift 5. Betrakta algoritmen $y = \frac{a}{b+c}$ i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Indata a, b och c antas vara flyttal dvs Du behöver inte ta hänsyn till felen då dessa lagras i flyttalssystemet. Genomför framåtanalys och bakåtanalys för algoritmen samt konstatera om den är stabil eller inte. **(6p)**

Uppgift 6.
a) Definiera vad som menas med konvergensordning och asymptotisk felkonstant hos en metod för ekvationslösning i en variabel. **(3p)**
b) Ange konvergenshastighet och asymptotisk felkonstant hos Newtons metod, dels för enkelrot, dels för multipelrot med multiplicitet m. **(2p)**

Uppgift 7. Vid studiet av en viss larv är man intresserad av sambandet mellan larvens vikt W och dess syrekonsumtion R. Av biologiska skäl gäller sambandet $R = bW^a$ och man önskar bestämma parametrarna a och b genom att anpassa till uppmätta data
$(R_i,\ W_i),\ i = 1,\ ...,\ m$.
a) Linjärisera modellen och ange hur linjär minsta-kvadrat anpassning kan användas. Skriv upp ekvationssystemet som man får att lösa. **(3p)**
b) Behåll den ursprungliga modellen och använd icke-linjär minsta-kvadrat anpassning. Ange residual och Jakobian, med explicit angivande av ingående derivator. Sätt upp Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Hur kan man få lämplig startapproximation? **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' = [y - 2y'(5) + y(5)][(y')^2 - 2],\ 0 \le t \le 5 \\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Skriv om problemet som system av första ordningen och lös problemet med inskjutningsmetoden map randvärdena $y'(5)$ och $y(5)$. Ange den ekvation som ska lösas och formulera en lämplig iterativ lösningsmetod för ekvationen. **(6p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 29 augusti 2003

1a) 1. $0 \in U_1 + U_2$ ty $0 = 0 + 0$ med $0 \in U_1$ och $0 \in U_2$.
2. Låt $u \in U_1 + U_2$ och $v \in U_1 + U_2$ dvs $u = u_1 + u_2$ med $u_1 \in U_1$ och $u_2 \in U_2$ och $v = v_1 + v_2$ med $v_1 \in U_1$ och $v_2 \in U_2$. Då är $u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$ med $u_1 + v_1 \in U_1$ och $u_2 + v_2 \in U_2$ dvs $u + v \in U_1 + U_2$.
3. Med $\alpha \in R$ har vi $\alpha u = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2$ där $\alpha u_1 \in U_1$ och $\alpha u_2 \in U_2$ dvs $\alpha u \in U_1 + U_2$.

b) Radreducering av A ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Homogena systemet $Ax = 0$ har lösning $x = [s, -2s-t, t, s]$. Radreducering av B ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Homogena systemet $By = 0$ har lösning $y = [-2t + 3s, -3s, t, s]$. Gemensam vektor finns om s och t kan väljas, inte båda $= 0$, så att $x = y$. Vi får ett ekvationssystem med de två ekvationerna $s = 3s - 2t$ och $-2s - t = -3s$ som är singulärt, alltså finns icke-trivial lösning. Exempelvis kan vi ta $s = t = 1$. Den gemensamma vektorn för de båda nollrummen är då $x = y = [1, -3, 1, 1]$.

2a) Bästa approximation till u i U är $\hat{u} = \sum_{i=1}^{k} < u, e_i > e_i$, med $u - \hat{u}$ ortogonal mot $\hat{u}$. Pythagoras sats ger $\| \hat{u} \| \leq \| u \| \Leftrightarrow \| \hat{u} \|^2 = \sum_{i=1}^{k} < u, e_i >^2 \leq \| u \|^2$, ty ON-bas.
b) $\| u - v \|^2 = < u - v, u - v > = \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2 < u, v >$
dvs $2 < u, v > = \| u \|^2 + \| v \|^2 - \| u - v \|^2 = \| u \|^2 = \| u \| \| v \|$, enligt förutsättningen.
Definition av vinkel ger $cos\ \theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}$ och $\theta = \frac{\pi}{3}$.
c) Ortogonalisera den andra kolonnen mot den första med Gram-Schmidt's metod:
$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$. Normalisering av kolonnerna ger då $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$
och $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

3a) $F(e_1) = t + 2t^2 = e_2 + 2e_3,\ F(e_2) = t = e_2,\ F(e_3) = 1 - t = e_1 - e_2.$

$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

b) $b_1 = e_1,\ b_2 = e_1 + e_2,\ b_3 = e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow P_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. För q gäller $[q]_E = [3\ \ -2\ \ 4]^T$ och koordinattransformationen blir $P_B[q]_B = [q]_E$. Detta är ett uppåt triangulärt system som lätt löses till $[q]_B = [5\ \ -6\ \ 4]^T$.

c) $F(b_1) = t+2t^2 = 2b_3 - b_2 - b_1,\ F(b_2) = 2t+2t^2 = 2b_3 - 2b_1,\ F(b_3) = 1+t+2t^2 = 2b_3 - b_2.$

$M' = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Alternativt kan M' bestämmas genom $M' = P_B^{-1} M P_B$.

$[F(q)]_B = M'[q]_B = [7\ \ -9\ \ 6]^T.$

4a) Systemet kan skrivas $x' = Ax$ med $A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Egenvärden i $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, egenvektorer i $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösningen kan skrivas $x = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Begynnelsevillkoret $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger ekvationssystem $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och lösningen blir då $x = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) $A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ med $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som inte är inverterbar.

c) Eulers framåtmetod går bra. Välj steglängd $h = 0.1$. Vi får då $x_{k+1} = x_k + hAx_k$

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 1.4 \end{bmatrix}.$

Det blir inga stabilitetsproblem om h väljs tillräckligt litet, $h \le \frac{2}{3}$.

5) Framåtanalys: $fl(\frac{a}{b+c}) = \frac{a(1+\epsilon_2)}{(b+c)(1+\epsilon_1)}$ med $\mid \epsilon_i \mid \leq \mu,\ i = 1,\ 2$ där μ är avrundningsenheten (maskintalet). Vi får då $fl(\frac{a}{b+c}) = \frac{a}{b+c}(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_1)^{-1} = \frac{a}{b+c}(1+\epsilon_2)(1-\epsilon_1+O(\mu^2))$.
För relativa framåtfelet F_r får vi alltså $F_r = \frac{fl(\frac{a}{b+c})-\frac{a}{b+c}}{\frac{a}{b+c}} = \epsilon_2 - \epsilon_1 + O(\mu^2)$ och uppskattningen i norm blir $\mid F_r \mid \leq 2\mu + O(\mu^2)$, dvs framåtfelet är alltid litet.
Bakåtanalys: $fl(\frac{a}{b+c}) = \frac{a(1+\epsilon_2)}{(b+c)(1+\epsilon_1)} = \frac{a(1+\epsilon_2)}{b(1+\epsilon_1)+c(1+\epsilon_1)} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}+\hat{c}}$,
där $\hat{a} = a(1+\epsilon_2)$, $\hat{b} = b(1+\epsilon_1)$ och $\hat{c} = c(1+\epsilon_1)$.
Resultatet motsvarar alltså de relativa felen i indata enligt: $\mid \frac{\hat{a}-a}{a} \mid = \mid \epsilon_2 \mid \leq \mu$,
$\mid \frac{\hat{b}-b}{b} \mid = \mid \epsilon_1 \mid \leq \mu$, $\mid \frac{\hat{c}-c}{c} \mid = \mid \epsilon_1 \mid \leq \mu$. Bakåtfelen är alltså små och algoritmen är stabil.

6a) Största möjliga tal q så att $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^q} \leq C < \infty$, där x^* är exakta lösningen och x_k approximationer, är metodens konvergensordning och C är asymptotiska felkonstanten.
b) Newtons metod har konvergensordning 2 med felkonstant $\frac{1}{2} \mid \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \mid$ för enkelrot och konvergensordning 1 med felkonstant $\frac{m-1}{m}$ vid multipelrot med multiplicitet m.

7 a) $R_i = bW_i^a$. Linjärisering: $ln(R_i) = \hat{b} + a\ ln(W_i)$, med $\hat{b} = ln(b)$

Överbestämt linjärt ekvationssystem: $\begin{bmatrix} ln(W_1) & 1 \\ ln(W_2) & 1 \\ ... & ... \\ ln(W_m) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln(R_1) \\ ln(R_2) \\ ... \\ ln(R_m) \end{bmatrix}$. Återtransformera $b = e^{\hat{b}}$.

b) Residualer $f_i = R_i - bW_i^a$, $F = [f_1\ f_2\ ...\ f_m]^T$. Jakobian $J = \begin{bmatrix} -b\ ln(W_1)W_1^a & -W_1^a \\ -b\ ln(W_2)W_2^a & -W_2^a \\ ... & ... \\ -b\ ln(W_m)W_m^a & -W_m^a \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $F_k = F(a_k, b_k)$.
Starta med lösningen från linjäriserat problem enligt a-uppgiften.

8) Sätt $a = -2y'(5) + y(5)$ och skriv på systemform genom $y_1 = y$, $y_2 = y'$: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = (y_1 + a)(y_2^2 - 2) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

Inskjutning på a innebär att lösa ekvationen $q(a) = 0$ där $q(a) = a + 2y_2(5,a) - y_1(5,a)$.
Ekvationen $q(a) = 0$ kan lösas med sekantmetoden, som blir
$a_{k+1} = a_k - \frac{q(a_k)(a_k - a_{k-1})}{q(a_k) - q(a_{k-1})}$, $k = 1,\ 2,\ ....$ I varje iteration i sekantmetoden måste man lösa ode-problemet för att få nya värden på $y_2(5, a_k)$ och $y_1(5, a_k)$.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2004-01-12

DAG: Måndag 12 januari 2004 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 23 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt $\{v_i\}_{i=1}^m$ vara linjärt oberoende i ett linjärt rum V. Anta att $u \in V$ och $u \notin Span\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_m\}$. Visa att då är mängden $\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_m,\ u\}$ linjärt oberoende. **(4p)**
b) Låt $V = P_n$ vara rummet av polynom av grad $\leq n$. Visa att $B = \{1,\ t,\ t^2,\ ...,\ t^n\}$ är en bas i V. **(4p)**

Uppgift 2.
a) För vilka värden på a är vektorerna $(a,\ 1,\ 1)$ och $(a,\ 1,\ a)$ ortogonala med avseende på skalärprodukten $< x,\ y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ i R^3. **(2p)**
b) Ange samtliga vektorer i R^4 som är ortogonala mot de båda vektorerna $u_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$ och $u_2 = (2,\ 5,\ 1,\ 4)$ (med avseende på standardskalärprodukten). **(3p)**
c) Visa att $\int_0^{\pi/2} \sqrt{sin(t)\ cos(t)}\ dt \leq 1$ genom att använda skalärprodukten $< f,\ g >= \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)\ dt$ i $V = C[0,\ \pi/2]$. **(4p)**

Uppgift 3. Undersök för vilka reella a och b som matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. **(6p)**

Uppgift 4. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en LU-faktorisering av A. **(3p)**
b) Bestäm en QR-faktorisering av A. **(5p)**

Uppgift 5.
a) Anta att $arctan(x)$ approximeras med Taylorpolynomet av grad 3 nära $x = 0$. Teckna bakåtfelet i approximationen i punkten $x = 0.1$ **(2p)**
b) Betrakta ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. Ge en gräns för relativa felet i lösningen om man räknar med tre korrekta decimaler i $\sqrt{2}$. **(4p)**

Uppgift 6. Beräkna en approximation till integralen $\int_1^2 f(x)\, dx$ där f går exakt genom punkterna $(1,\ 2)$, $(1.25,\ 3)$, $(1.5,\ 3.5)$, $(1.75,\ 4.5)$ och $(2,\ 4)$. Använd trapetsformeln med steglängd 0.5 och 0.25. Ta fram ett extrapolerat värde med Richardsons teknik och uppskatta trunkeringsfelet. **(6p)**

Uppgift 7. Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = \frac{1}{ae^{-bt}}$ tilll mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ \dots\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att **linjär** minstakvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(3p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta en prediktor/korrektor-metod för begynnelsevärdesproblem,
$y' = f(t, y),\quad y(0) = y_0$.
Låt prediktorn vara Eulers framåtmetod och korrektorn Eulers bakåtmetod.
a) Skriv upp metoden man får vid fixpunktsiteration i korrektorn. **(2p)**
b) Bestäm stabilitetsområdet för metoden om man itererar till konvergens i korrektorn. **(2p)**
c) Anta att man gör **en** iteration i korrektorn. Vilken approximationsordning får metoden då? **(3p)**
d) Bestäm stabilitetsområdet för metoden om man gör **två** fixpunktsiterationer i korrektorn. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 12 januari 2004

1a) Anta $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i + du = 0$. Vi vill visa att $c_1 = c_2 = ... = c_m = d = 0$ Om $d \neq 0$ så gäller $u = -\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m} c_i v_i$ dvs $u \in Span\{v_i\}_{i=1}^{m}$ som motsäger antagandet, alltså är $d = 0$. Men då är $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$. Antagandet att $\{v_1\}_{i=1}^{m}$ är linjärt oberoende ger då att $c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$.
b) 1. B spänner V ty $p \in V$ kan skrivas $p = c_1 + c_2 t + ... + c_{n+1} t^n$.
2. B är linjärt oberoende ty låt $c_1 + c_2 t + ... + c_{n+1} t^n = 0,\ \forall t$ och ta $t = 0$ så får vi $c_1 = 0$.
Derivering ger $c_2 + 2c_3 t + ... + nc_{n+1} t^{n-1} = 0,\ \forall t$ och $t = 0$ ger nu $c_2 = 0$.
Upprepa att derivera och sätta $t = 0$ ger $c_j = 0, j = 1, ...,\ n + 1$.

2a) $< (a, 1, 1), (a, 1, a) >= a^2 + 2 + 3a$ och lösning av kvadratiska ekvationen $a^2 + 2 + 3a = 0$ ger $a = -2$ eller $a = -1$.
b) Vektorerna ska alltså vara ortogonala mot raderna i matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vi löser homogena systemet $Ax = 0$ med radreduktion och får $x = s[-7\ 2\ 0\ 1]^T + t[-3\ 1\ 1\ 0]^T$.
c) Låt $u = \sqrt{sin(t)}$ och $v = \sqrt{cos(t)}$. Då är $\parallel u \parallel = \int_0^{\pi/2} sin(t)\ dt = 1$, $\parallel v \parallel = \int_0^{\pi/2} cos(t)\ dt = 1$ och $< u, v >= \int_0^{\pi/2} \sqrt{sin(t)cos(t)}\ dt$. Enligt Cauchys olikhet gäller $\frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} \leq 1$ och därmed $\int_0^{\pi/2} \sqrt{sin(t)cos(t)}\ dt \leq 1$.

3 Genom att blockindela A ser vi att egenvärdena är 1 och egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ och de senare fås ur karakteristiska ekvationen $(1-\lambda)^2 - ab = 0$ dvs $\lambda = 1 \pm \sqrt{ab}$.
Om $ab \neq 0$ så är alla egenvärden olika och A är diagonaliserbar.
Om $ab = 0$ så är alla egenvärden $= 1$. Vi kan anta att $b = 0$ ty $a = 0$ analogt (A diagonaliserbar $\Leftrightarrow A^T$ diagonaliserbar).
Om även $a = 0$ så är A redan diagonal. För $a \neq 0$ löser vi systemet $(A - I)x = 0$, med lösning $x = [t\ 0\ s]^T$, som inte spänner hela R^3, dvs A är inte diagonaliserbar. Slutsatsen blir att A inte är diagonaliserbar om antingen $a \neq 0$ eller $b \neq 0$.

4a) Pivotering med $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ger $PA = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Två stegs Gausselimination ger uppåt triangulär matris $U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ och multiplikatorerna på plats ger den nedåt triangulära matrisen $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$ så att $PA = LU$.

b) De två första kolonnerna är redan ortogonala. Ortogonalisering med Gramm-Schmidts metod av den tredje mot de två första ger den nya kolonnen $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och normering av kolonnerna ger matrisen $Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{24}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{24}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{20}} & -\frac{2}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$. Därefter fås R genom matrismultiplikationen $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{20} & 0 & \frac{12}{\sqrt{20}} \\ 0 & \sqrt{24} & \frac{6}{\sqrt{24}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$.

5a) $arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$. Bakåtfelet $x = 0.1$ blir $tan(0.1 - \frac{0.1^3}{3}) - 0.1$

b) Störningsformeln är $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$, där $\kappa(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$.

Vi har $\| A \|_\infty = 9$, $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\| A^{-1} \|_\infty = 0.9$ och $\kappa = 8.1$. Vidare gäller enligt förutsättningarna att $\| \delta b \|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\| b \|_\infty = 2$. Detta ger $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 8.1 \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{2} \leq 2.1 \cdot 10^{-3}$

6) $T(0.5) = 0.5(1 + 3.5 + 2) = 3.25$, $T(0.25) = 0.25(1 + 3 + 3.5 + 4.3 + 2) = 3.5$. Extrapolation ger $T^{(2)}(0.25) = 3.5 + \frac{3.5 - 3.25}{3} = 3\frac{7}{12}$. Trunkeringsfelet uppskattas med $| R_T | \leq | 3.5 - 3.25 | = \frac{1}{4}$. Svaret blir $3\frac{7}{12} \pm \frac{1}{4}$

7 a) Invertera $\frac{1}{y} = ae^{-bt}$ och logaritmera $ln(\frac{1}{y}) = ln(a) - bt$, som är linjärt i parametrarna $ln(a)$ och b. Systemet kan skrivas $ln(a) - bt_i = -ln(y_i),\ i = 1, ..., m$ eller på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & -t_1 \\ ... & ... \\ ... & ... \\ 1 & -t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln(a) \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ln(y_1) \\ ... \\ ... \\ -ln(y_m) \end{bmatrix}.$$

b) Residualvektor $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_m \end{bmatrix}$ där $f_i = \frac{1}{ae^{-bt_i}} - y_i$. Jakobian $J = \begin{bmatrix} -\frac{e^{bt_1}}{a^2} & \frac{t_1 e^{bt_1}}{a} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{e^{bt_m}}{a^2} & \frac{t_m e^{bt_m}}{a} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k),\quad F_k = F(a_k, b_k)$.

8a) prediktor: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$,
korrektor med fixpunktsiteration: $y_{k+1}^{(l+1)} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}^{(l)})$.
b) Då får vi Euler bakåt med stabilitetsområde: $\{z \in C; \mid z - 1 \mid \geq 1\}$ (enligt föreläsning och lärobok).
c) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k,\quad y_{k+1}^{(1)} = y_k + h\lambda y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]y_k$
Stämmer med två termers Taylorutveckling av $e^{h\lambda}$ dvs metoden är av ordning 1.
d) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(2)} = y_k + h\lambda(y_{k+1}^{(1)}) = y_k + h\lambda[y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k + h\lambda y_k + (h\lambda)^2 y_k + (h\lambda)^3 y_k = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2 + (h\lambda)^3]y_k$.
Stabilitetområdet blir alltså $\{z \in C; \mid 1 + z + z^2 + z^3 \mid \leq 1\}$.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2004-06-01

DAG: Tisdag 1 juni 2004 TID: 14.15 - 18.15 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 070-5335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 22 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Avgör om $H \subseteq V$ är ett underrum till det linjära rummet V om
(i) $V = C(R)$, mängden av kontinuerliga funktioner på R och
$H = \{f \in V;\ f(-t) = f(t)\ \forall t \in R\}$ **(1p)**
(ii) $V = R^{n\times n}$, mängden av alla reella $n \times n$-matriser och
H är mängden av uppåt triangulära reella matriser **(1p)**
(iii) $V = C([0, 1])$ och $H = \{f \in V;\ f(0) = 1\}$ **(1p)**
(iv) $V = R^{n\times n}$ och $H = \{A \in V;\ \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$ (diagonalelementen summerar till 0). **(1p)**
b) Låt H_1 och H_2 vara underrum i det linjära rummet V med skalärprodukt. Visa att $(H_1 + H_2)^{\perp} = H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$ **(4p)**
Anm. Rummet $H_1 + H_2$ definieras som $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2; h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$

Uppgift 2.
Låt $T:\ P_2 \to P_2$ vara den linjära avbildningen $T(p(t)) = tp'(t + 1) + p(t),\ \forall p \in P_2$.
a) Bestäm matrisen för avbildningen T i basen $\{1,\ t,\ t^2\}$. **(3p)**
b) Ange alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T. **(2p)**

Uppgift 3.

a) Gör en full QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(5p)**

b) Använd QR-faktoriseringen i a-uppgiften för att ange en bas för $Col(A)$ och en bas för $Nul(A^T)$. **(2p)**

Uppgift 4.

a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: **(4p)**

$$\begin{cases} {x_1}'(t) = -2x_1(t), & x_1(0) = 1 \\ {x_2}'(t) = -4x_1(t) - 6x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ {x_3}'(t) = -3x_3(t), & x_3(0) = 1 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om första ekvationen ändras till ${x_1}'(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$? **(2p)**

c) Undersök om problemet i a-uppgiften är stabilt. **(1p)**

d) Antag att du vill använda Eulers framåtmetod för att lösa problemet i b-uppgiften. Ge ett villkor på steglängden h så att metoden blir stabil. **(3p)**

Uppgift 5. Vi vill lösa ekvationen $2x^2 + x - 2.99 = 0$ med Newtons metod.

a) En rot ligger nära $x^* = 1$. Använd den informationen för att bestämma konvergensordning och (approximativt) asymptotisk felkonstant vid konvergens mot roten. **(3p)**

b) Mer noggrant gäller att $x^* = 0.99800$ med fem korrekta decimaler. Använd den informationen och a-uppgiften för att avgöra hur många iterationer det kommer att behövas från startapproximation $x_0 = 1$ för att bestämma x^* med 10 korrekta decimaler. **(3p)**

Uppgift 6. Låt $(t_i, y_i),\ i = 1,\ 2,\ 3$ vara tre olika punkter i planet.

a) Visa att det finns exakt ett polynom p av grad $<= 2$ dvs $p \in P_2$ som går genom punkterna, dvs sådant att $p(t_i) = y_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$. Detta polynom kallas interpolationspolynomet. **(5p)**

Ledning: Visa att polynomen $p_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$, $p_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$ och $p_3(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$ är bas för P_2.

b) Ta fram interpolationspolynomet på Newtons form då punkterna är $(0,0),\ (1,2)$ och $(2,3)$. **(4p)**

Uppgift 7. Betrakta problemet att minimera funktionen $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4$ utan bivillkor, med känd lösning $x^* = (0, 0)$.
a) Ange formeln för Steepest Descent-metoden för att lösa problemet, tala speciellt om vad som är sökriktning och vad som är steglängd. **(2p)**
b) Gör en iteration från $x_0 = (1, 1)$. Bestäm steglängden exakt genom att använda aktuell formel för kvadratisk objektfunktion. **(4p)**
c) Ta fram en startpunkt, som ger lösningen med **en** iteration av Steepest Descent-metoden på aktuellt problem. **(2p)**

Uppgift 8. Vi vill lösa följande differentialekvation numeriskt:
$y'' + 2y = 2t, y(0) = 0,\ y'(1) = 1.$
a) Skriv om problemet till ett system av första ordningen. **(1p)**
b) Formulera inskjutningsmetoden för att lösa problemet. **(3p)**
c) Skriv upp en lämplig metod att lösa den ekvation som inskjutningsmetoden ger upphov till. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 1 juni 2004

1a) (i) Ja, summan av två jämna funktioner är jämn, konstant gånger jämn funktion är jämn, nollfunktionen är jämn.
(ii) Ja, summan av två uppåt triangulära matriser är uppåt triangulär, konstant gånger uppåt triangulär matris är uppåt triangulär, nollmatrisen är uppåt triangulär.
(iii) Nej, summan av två funktioner som är 1 i punkten 0 är inte 1 i punkten 0.
(iv) Ja, med $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ gäller $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B) = 0 + 0 = 0$,
$Sp(cA) = cSp(A) = 0,\ Sp(\mathbf{0}) = 0$.
b) Ta $x \in (H_1 + H_2)^{\perp}$. Då är x ortogonal mot $h_1 + h_2$ där $h_1 \in H_1$ och $h_2 \in H_2$.
dvs $< x, h_1 + h_2 >= 0 \Leftrightarrow < x, h_1 > + < x, h_2 >= 0, \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2$.
Speciellt gäller för $h_1 = 0$ att $< x, h_2 >= 0$ dvs $x \in H_2^{\perp}$ och
för $h_2 = 0$ gäller att $< x, h_1 >= 0$ dvs $x \in H_1^{\perp}$.
x ligger alltså i både $H_1^{\perp}$ och $H_2^{\perp}$ dvs $x \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$.
Omvändningen; att $x \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} \Rightarrow x \in (H_1 + H_2)^{\perp}$ visas på analogt sätt.

2a) $T(1) = 1,\ T(t) = t + t = 2t,\ T(t^2) = t \cdot 2(t+1) + t^2 = 3t^2 + 2t$.

Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Egenvärden till M finns på diagonalen dvs 1, 2 och 3.
Egenvektorer till matrisen M är resp. $(1,0,0)^T,\ (0,1,0)^T$ och $(0,2,1)^T$, som motsvarar resp. egenvektorer till avbildningen T: 1, t och $2t + t^2$.

3a) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(0,1,1,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^T - \frac{1}{2}(0,1,0,1)^T = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)^T$.
Utgå från en fjärde kolonn som är linjärt oberoende med de tre givna exempelvis $(1,0,0,0)^T$ och ortogonalisera den mot de tre givna med Gram-Schmidt:
$(1,0,0,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^T + \frac{1}{4}(-1,1,1,-1)^T = \frac{1}{4}(1,1,-1,-1)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ och } R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) De tre första kolonnerna i Q utgår bas för $Col(A)$ och den sista kolonnen i Q utgör bas för $Nul(A^T)$

4a) Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är på diagonalen,
$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -6$ och $\lambda_3 = -3$
med egenvektorer, som fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem
$(A - \lambda_i I)v_i = 0$: $v_1 = (1, -1, 0)^T,\ v_2 = (0, 1, 0)^T$ och $v_3 = (0, 0, 1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{-6t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Egenvärdena blir nu $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = -3$. Det dubbla egenvärdet $\lambda = -4$ har egenvektor $(1, -2, 0)^T$, som spänner rum av dimension $= 1 < 2 =$ multipiciteten hos egenvärdet. Matrisen är då inte diagonaliserbar.

4c) Alla egenvärden har realdel ≤ 0, alltså är problemet stabilt.

4d) Stabilitetsområdet för Eulers framåtmetod är en cirkelskiva i komplexa planet med centrum i $(-1, 0)$ och med radie 1. För stabilitet krävs att $h\lambda_i$ tillhör stabilitetsområdet för alla egenvärden λ_i. Störst krav ställer här $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ och villkoret blir $h\lambda_1 \geq -2$ som ger $h \leq 0.5$.

5a) $f' = 4x + 1$ med $f' \neq 0$ nära $x^* = 1$ dvs enkelrot. Konvergensordningen är då 2.
Asymptotiska felkonstanten $C = \frac{1}{2} \frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 0.4$
b) Successiva fel i approximationerna blir enligt förutsättningar och a-uppgiften:
$\epsilon_0 \approx 0.2 \cdot 10^{-2},\quad \epsilon_1 \approx 0.4 \cdot \epsilon_0^2 \approx 0.016 \cdot 10^{-4} = 1.6 \cdot 10^{-6},\quad \epsilon_2 \approx 0.4 \cdot \epsilon_1^2 \approx 1.024 \cdot 10^{-12}$ dvs två iterationer räcker.

6a) Bevis av ledningen: Vi har tre funktioner i ett tredimensionellt rum, det räcker att visa att de är linjärt oberoende. Vi vill alltså visa att om $c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) + c_3 p_3(t) = 0\ \forall t$ så är $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Välj $t = t_1$ så följer $c_1 p_1(t_1) + c_2 p_2(t_1) + c_3 p_3(t_1) = c_1 + 0 + 0$ och för att detta uttryck ska vara 0 så måste $c_1 = 0$. På samma sätt visas att $c_2 = 0$ genom att sätta in $t = t_2$ och att $c_3 = 0$ genom att sätta in $t = t_3$.
Nu gäller från definitionen av basfunktionerna att $p(t) = y_1 p_1(t) + y_2 p_2(t) + y_3 p_3(t)$ uppfyller interpolationskraven $p(t_i) = y_i,\ i = 1, 2, 3$ och att p är entydigt följer av att $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ är bas.

6b) Ansätt enligt Newton: $p = c_1 + c_2(t - t_1) + c_3(t - t_1)(t - t_2)$. Interpolationskraven ger ekvationsssystem:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ med lösning $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = -0.5$ och polynomet blir alltså $p(t) = 2t - 0.5t(t-1)$.

7 a) Sökmetod: $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \\ d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) \end{cases}$. Här är $d^{(k)}$ sökriktning och α_k steglängd.

b) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 4,\quad \nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
För första iterationen har vi
$x^{(0)} = (1,1)^T,\quad \nabla f(x^{(0)}) = (4,2)^T,\quad d^{(0)} = (-4,-2)^T,\quad Hd^{(0)} = (-16,-4)^T$.
Optimal steglängd enligt formel: $\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x^{(0)})^T d^{(0)}}{d^{(0)T} H d^{(0)}} = -\frac{-20}{72} = \frac{5}{18}$.
Första iterationen blir alltså: $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = (1,1)^T + \frac{5}{18}(-4,-2)^T = \frac{1}{9}(-1,4)^T$.
7c) Nivåkurvorna är ellipser centrerade kring origo med halvaxlarna längs koordinataxlarna. Om man startar någonstans på halvaxlarna så pekar negativa gradienten till origo och **en** iteration krävs. Man kan t.ex. starta i $x^{(0)} = (1,0)^T$.

8a) Systemet blir $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2t - 2y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(1) = 1 \end{cases}$

b) Inskjutningsmetoden innebär att skriva problemet som $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2t - 2y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = s \end{cases}$

och lösa ekvationen: $q(s) \equiv y_2(1,s) - 1 = 0$.
c) Sekantmetoden för att lösa $q(s) = 0$ blir:
$s_{k+1} = s_k - \frac{(y_2(1,s_k)-1)(s_k - s_{k-1})}{y_2(1,s_k) - y_2(1,s_{k-1})},\ k = 1, 2, ...$ med två startskott s_0 och s_1

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2004-08-27

DAG: Fredag 27 augusti 2004 TID: 8.45 - 12.45 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, även mobil: 0705-335450
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Definiera addition $\oplus$ och muliplikation med skalär $\odot$ i $V = R^2$ enligt
$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$
$c \odot (x_1, x_2) = (c + cx_1 - 1, c + cx_2 - 1)$.
Visa att V är ett vektorrum med avseende på de givna operationerna. **(4p)**
b) Visa att om M_1 och M_2 är två tvådimensionella plan i $R^n,\ n \geq 2$ så finns ett plan av dimension ≤ 5 som innehåller både M_1 och M_2. **(4p)**

Uppgift 2.
Låt $T:\ P_2 \to P_2$ vara den linjära avbildningen $T(p(t)) = p''(t) + tp'(t-1),\ \forall p \in P_2$.
a) Bestäm matrisen för avbildningen T i basen $\{1,\ t,\ t^2\}$. **(3p)**
b) Ange alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T. **(2p)**

Uppgift 3.
a) Låt u och v vara element i ett vektorrum med skalärprodukt $< \cdot, \cdot >$ och motsvarande norm $\| \cdot \|$, sådana att $\|u\| > \|v\|$. Visa att u och $u - v$ inte är ortogonala. **3p**

b) Gör en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(4p)**

c) Ange med hjälp av b-uppgiften en ON-bas för $Col(A)$. **(1p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ då $x^T x = 3$. Bestäm en vektor u med $u^T u = 3$ så att $Q(u)$ är maximal. **(4p)**
b) Bestäm $max\ Q(x)$ under villkoren $x^T x = 3$ och $x^T u = 0$, där u är vektorn enligt a-uppgiften. För vilka x antas maxvärdet? **(3p)**

Uppgift 5.
a) Definiera vad som menas med en kubisk spline med naturliga ändpunktsvillkor. **(3p)**
b) Bestäm en kvadratisk spline $s(x)$ som interpolerar $f(x) = x^3$ i noden $x = 0$ och i punkterna $x = -1$ och $x = 1$ samt uppfyller villkoret $s'(1) = f'(1)$. **(4p)**
c) Bestäm integralen $\int_{-1}^{1} s(x)\, dx$ med en **numerisk** metod som är **exakt** för denna integral. **(3p)**

Uppgift 6. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 2x_1x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2x_3 + x_3 = 0 \\ x_1^3 + 2x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$.
a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Det visar sig att efter fyra iterationer enligt a-uppgiften är felet $\|x^{(4)} - x^*\| \approx 0.013$ och roten x^* är reguljär. Hur många ytterligare iterationer kan du förväntas få göra innan felet $\|x^{(k)} - x^*\| \leq 10^{-10}$? **(2p)**

Uppgift 7. Du ska anpassa parametrarna a och b i modellen $y(t) = \frac{t}{asin(t)+bcos(t)}$ till mätningar $(t_i,\ y_i),\ i = 1,\ \ldots\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att **linjär** minstakvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas. **(3p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(4p)**

Uppgift 8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' = -y^2 + ty,\ y(0) = 1$.
a) Använd Eulers framåtmetod med $h = 0.1$ för att bestämma en approximation till $y(0.1)$. **(2p)**
b) Bestäm en ny approximation till $y(0.1)$ genom att utgående från approximationen i a-uppgiften utföra **en** fixpunktsiteration i trapetsmetoden. **(3p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i b-uppgiften. **(3p)**
d) Vad blir stabilitetsområdet om man itererar till konvergens i fixpunktsiterationen enligt b-uppgiften? **(1p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 27 augusti 2004

1a) Vi visar de minst triviala av de 10 reglerna som ska gälla:
4. $\mathbf{0} \oplus x = x \oplus \mathbf{0} = x$ om $\mathbf{0} = (-1,-1)$.
5. $-x = (x_1 - 2, x_2 - 2) \Rightarrow x \oplus -x = (-1,-1) = \mathbf{0}$.
7. $c \odot (x \oplus y) = c \odot (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (c + c(x_1 + y_1 + 1) - 1, c + c(x_2 + y_2 + 1) - 1) = (c + cx_1 - 1 + c + cy_1 - 1 + 1, c + cx_2 - 1 + c + cy_2 - 1 + 1) = (c \odot x) \oplus (c \odot y)$.
8. $(c + d) \odot x = (c + d + (c + d)x_1 - 1, c + d + (c + d)x_2 - 1) = (c + cx_1 - 1 + d + dx_1, c + cx_2 + d + dx_2 - 1) = (c \odot x) \oplus (d \odot x)$.
9. $c \odot (d \odot x) = c \odot (d + dx_1 - 1, d + dx_2 - 1) = c + c(d + dx_1 - 1) - 1, c + c(d + dx_2 - 1) - 1) = (cd + cdx_1 - 1, cd + cdx_2 - 1) = (cd) \odot x$.
10. $1 \odot x = (1 + x_1 - 1, 1 + x_2 - 1) = x$.

b) Planen kan skrivas:
$M_1 : x_0 + sx_1 + tx_2,\ x_i \in R^n,\ s,t \in R$
$M_2 : y_0 + uy_1 + vy_2,\ y_i \in R^n,\ u,v \in R$
Bilda nu $M_3 : \lambda x_0 + sx_1 + tx_2 + (1-\lambda)y_0 + uy_1 + vy_2$. Detta plan innehåller M_1 och M_2 och har 5 parametrar, är alltså av dim ≤ 5 (Dimensionen kan bli mindre än 5 om några av x_i och y_i är samma.)

2a) $T(1) = 0;\ T(t) = t,\ T(t^2) = 2 + 2t(t-1)$.
Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
b) Egenvärden till M finns på diagonalen dvs 0, 1 och 2.
Egenvektorer till matrisen M är resp. $(1,0,0)^T,\ (0,1,0)^T$ och $(1,-2,1)^T$, som motsvarar resp. egenvektorer till avbildningen T: 1, t och $1 - 2t + t^2$.

3a) $< u, u - v > = < u, u > - < u, v > \geq$ (Cauchy-Schwartz)$\|u\|^2 - \|u\|\|v\| >$ (förutsättning) $\|u\|^2 - \|u\|^2 = 0$. Aktuell skalärprodukt är alltså inte noll.
b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1,0,0,1)^T - \frac{1}{5}(1,0,2,0)^T - \frac{1}{5}(0,2,0,1)^T = \frac{2}{5}(2,-1,-1,2)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \text{ och } R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

b) Kolonnerna i Q utgör bas för $Col(A)$.

4a) $Q(x) = x^T A x$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Egenvärden $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, egenvektor $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Största värde på kvoten $\frac{Q(x)}{x^T x}$ är är lika med största egenvärde, dvs 3. Största värde på $Q(x)$ då $x^T x = 3$ är alltså 9 och det antas för motsvarande egenvektor dvs $u = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1, 1, 0)^T$.

4b) Enligt sats i Lay blir maxvärdet på kvoten $\frac{Q(x)}{x^T x}$ lika med näst största egenvärde dvs 1, och därmed $max\ Q(x)$ lika med 3. Maxvärdet antas för egenvektorer hörande till egenvärdet 1, dvs vektorer på formen $x = c_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T + c_2(0, 0, 1)^T$ med längd $\|x\| = \sqrt{3}$. Koefficienterna c_1 och c_2 ska alltså ligga på cirkeln $c_1^2 + c_2^2 = 3$.

5a) Om $s(x)$ är splinen så ska s, s' och s'' överensstämma i alla noder. I ändpunkterna ska andraderivatorna s'' var lika med 0.

b) Ansätt $s_1 = ax + bx^2$, $0 \leq x \leq 1$. Då är $s_1' = a + 2bx$ och villkoren ger ekvationssystem i de obekanta a och b: $s_1'(1) = a + 2b = 3$ och $s_1(1) = a + b = 1$. Ekvationssystemet har lösning $a = -1$, $b = 2$ och därmed är splinedelen $s_1 = -x + 2x^2$. Den andra splinedelen ansätts $s_2 = cx + dx^2$, $-1 \leq x \leq 0$. Då är $s_2' = c + 2dx$. Villkoret $s_1'(0) = s_2'(0)$ ger då $c = a = -1$ och slutligen ger villkoret $s_2(-1) = -c + d = -1$ att $d = -2$ och splinedelen $s_2 = -x - 2x^2$.

b) Simpsons formel eller trapetsformeln plus Richardsonextrapolation är exakt på delintervallen ty s kvadratisk spline. Integralen blir alltså $\int_{-1}^{1} s(x)\ dx = \int_{-1}^{0} s_2(x)\ dx + \int_0^1 s_1(x)\ dx = \frac{1}{6}(-1 + 4 \cdot 0 + 0) + \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0 + 1) = 0$.

6a) $f = \begin{cases} x_1 + 2x_1x_2 - x_3 + 1 \\ x_1^2 - x_2^2 x_3 + x_3 \\ x_1^3 + 2x_2 - x_3 - 2 \end{cases} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 + 2x_2 & 2x_1 & -1 \\ 2x_1 & -2x_2x_3 & -x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) 3 iterationer ytterligare ty kvadratisk konvergens och $0.013^{2^3} \leq 10^{-10}$.

7 a) Invertera $\frac{1}{y} = a\frac{sin(t)}{t} + b\frac{cos(t)}{t}$, som är linjärt i parametrarna a och b. Systemet kan skrivas på matrisform $\begin{bmatrix} \frac{sin(t_1)}{t_1} & \frac{cos(t_1)}{t_1} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ \frac{sin(t_m)}{t_m} & \frac{cos(t_m)}{t_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_1} \\ ... \\ ... \\ \frac{1}{y_m} \end{bmatrix}$.

b) Residualvektor $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_m \end{bmatrix}$ där $f_i = \frac{t_i}{asin(t_i)+bcos(t_i)} - y_i$.

Jakobian $J = \begin{bmatrix} -\frac{t_1 sin(t_1)}{(asin(t_1)+bcos(t_1))^2} & -\frac{t_1 cos(t_1)}{(asin(t_1)+bcos(t_1))^2} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ -\frac{t_m sin(t_m)}{(asin(t_m)+bcos(t_m))^2} & -\frac{t_m cos(t_m)}{(asin(t_m)+bcos(t_m))^2} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $\quad F_k = F(a_k, b_k)$.

8a) $y_0 = 1, \; y_1 = y_0 + 0.1(-1^2 + 0 \cdot 1) = 1 - 0.1 = 0.9$

b) $y_1^{(0)} = 0.9, \quad y_1^{(1)} = 1 + \frac{0.1}{2}(-1^2 - 0.9^2 + 0.1 \cdot 0.9) = 1 - 0.086 = 0.914.$

c) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k, \quad y_{k+1}^{(1)} = y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_k + \lambda y_{k+1}^{(0)})$
$= y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}]y_k.$

Stabilitetområdet blir alltså $\{z \in C; \mid 1 + z + \frac{z^2}{2} \mid \leq 1\}$.

d) Då får vi stabilitetsområdet för korrektorn dvs Trapetsmetoden som är $\{z \in C; Re(z) \leq 0\}$.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2005-01-10

DAG: Måndag 10 januari 2005 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94 (ankn. 1094)
Förfrågningar:	Christoffer Cromvik, tel: 073-9779268
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 24 januari
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Vektorerna $v_1,\ v_2,\ ...\ ,\ v_k$ i ett linjärt rum V är linjärt oberoende. Bestäm dimensionen hos det rum som spänns av vektorerna $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ ...\ ,\ v_{k-1} - v_k$ och $v_k - v_1$. **(4p)**
b) Låt M vara ett multiplan i R^n och $x,\ y$ två olika punkter i planet. Visa att M innehåller linjen genom x och y, dvs alla punkter på formen $x + t(y - x),\ t \in R$. **(4p)**

Uppgift 2. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = 2a_1 + (a_0 - a_2)t + (a_1 - a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Betrakta basen $B = \{1,\ 1 + t,\ 1 + t + t^2\}$ för P_2. Bestäm transformationsmatrisen mellan baserna B och E och bestäm med hjälp av den koordinaterna för $q = 2 - t + 3t^2$ i basen B. **(3p)**
c) Bestäm matrisen för avbildningen F i basen B och bestäm koordinaterna för $F(q)$ i basen B , där q är given i b-uppgiften. **(4p)**

Uppgift 3.

Vi vill lösa problemet $min_x \|Ax - b\|_2$, med $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Lös problemet med normalekvationerna. **(2p)**
b) Lös problemet med QR-faktorisering. **(4p)**
c) Om tredje kolonnen i A ändras till $[\ 1 \quad -2 \quad 2 \quad -1\ ]^T$ så fungerar inte metoderna i a) eller b). Ange en metod som ger lösningen till problemet med minsta norm $\|x\|_2$. Skriv formellt upp lösningen utan att göra några numeriska beräkningar. **(2p)**
d) Bestäm de singulära värdena till matrisen A. **(3p)**

Uppgift 4. Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden. **(5p)**.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), & x_1(0) = 0 \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t), & x_2(0) = 2 \\ x_3'(t) = -2x_3(t), & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

Uppgift 5.
a) Anta att $arctan(x)$ approximeras med $x - \frac{x^3}{3}$ nära $x = 0$. Teckna framåt- och bakåtfelet i approximationen då $x = 0.1$. **(2p)**
b) I beräkningen i a)-uppgiften ingår delalgoritmen $y = x^3$. Betrakta denna i ett flyttalssystem med IEEE-standard. Undersök om algoritmen är stabil. Du kan anta att x är ett exakt flyttal dvs $fl(x) = x$. **(3p)**.

Uppgift 6. Betrakta följande punkter i (x, y)-planet: $(0, -2),\ (1, 0),\ (2, 0),\ (3, -1)$.
a) Låt y-värdena representera funktionsvärden av en funktion $y = f(x)$ och bestäm en approximation till integralen $\int_0^3 f(x)dx$ med trapetsformeln och steg $h = 1$. **(2p)**
b) Bestäm interpolationpolynomet genom punkterna. **(3p)**
c) Bestäm en kvadratisk spline med noder i $x = 1$ och $x = 2$ och som går genom alla punkterna. **(4p)**

Uppgift 7. Du ska anpassa parametrarna a och b i den ickelinjära modellen $y(t) = e^{-at} + sin(bt)$ till mätningar $(t_i,\ y_i)$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ m$ med $m > 2$. Ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. **(5p)**

Uppgift 8.
a) Betrakta differentialekvationen $y' = -y^3 + t^2$, $y(0) = 1$. Använd Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ för att approximera lösningen i punkten $t = 0.1$. Visa att detta leder till en ekvation på formen $0.1x^3 + x - 1.001 = 0$. **(3p)**
b) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften om man gör **en** fixpunktsiteration i aktuell ekvation med start från det värde som Eulers framåtmetod ger. Avgör genom en (grov) uppskattning om metoden är stabil för problemet i a-uppgiften med vald steglängd. **(5p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 10 januari 2005

1a) Totala mängden är linjärt beroende eftersom summan av dem $(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+\ ...\ +(v_k-v_1)=0$, dimensionen är alltså $\leq k-1$. De $k-1$ första är linjärt oberoende ty $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i(v_i-v_{i+1})=0 \Leftrightarrow \alpha_1 v_1+(\alpha_2-\alpha_1)v_2+\ ...\ +(\alpha_{k-1}-\alpha_{k-2})v_{k-1}-\alpha_{k-1}v_k=0$ och eftersom $v_1,\ v_2,\ ...\ ,\ v_k$ är linjärt oberoende så gäller $\alpha_1=0,\ \alpha_2-\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_2=0,\ (\alpha_3-\alpha_2)=0 \Rightarrow \alpha_3=0,\ ...\ ,\ \alpha_{k-1}=0$ v.s.v.

b) $x \in M \Leftrightarrow x=x_0+x_1,\ x_1 \in U$ och $y \in M \Leftrightarrow x_0+y_1,\ y_1 \in U$ där U är ett underrum. Då gäller $x+t(y-x)=x_0+x_1+t(x_0+y_1-x_0-x_1)=x_0+x_1+t(y_1-x_1)=x_0+z$ med $z=x_1+t(y_1-x_1)\in U$ ty $z=(1-t)x_1+ty_1$ med x_1 och y_1 i underrummet U.

2a) $F(e_1)=t=e_2,\ F(e_2)=2+t^2=2e_1+e_3,\ F(e_3)=-t-t^2=-e_2-e_3$.

Matrisen blir $M=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $b_1=e_1,\ b_2=e_1+e_2,\ b_3=e_1+e_2+e_3 \Rightarrow P_B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. För q gäller $[q]_E=[2\ \ -1\ \ 3]^T$ och koordinattransformationen blir $P_B[q]_B=[q]_E$. Detta är ett uppåt triangulärt system som lätt löses till $[q]_B=[3\quad -4\ \ 3]^T$.

c) $F(b_1)=t=b_2-b_1,\ F(b_2)=2+t+t^2=b_1+b_3,\ F(b_3)=2=2b_1$.

$M'=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alternativt kan M' bestämmas genom $M'=P_B^{-1}MP_B$.

$[F(q)]_B=M'[q]_B=[-1\ \ 3\quad -4]^T$.

3a) $A^TA=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ A^Tb=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ A^TAx=A^Tb \Leftrightarrow x=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1,0,0,-1)^T-\frac{1}{5}(1,0,2,0)^T+\frac{1}{5}(0,2,0,1)^T=\frac{2}{5}(2,1,-1,-2)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix},\ R=Q^TA=\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ och $Q^Tb=\begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$. Lösningen ges av triangulära systemet $Rx=Q^Tb$ och blir $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c) Kompakt SVD: $A = U_1 \Sigma_r V_1^T$. Lösning $x = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T b$ där $r = 2$ eftersom $rang(A) = 2$.
d) De singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^T A$, given i svaret till a-uppgiften. Karakteristiska ekvationen blir
$(5-\lambda)^2(2-\lambda) - (5-\lambda) - (5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 8)$ med rötter 5, $\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$. Singulära värdena är alltså $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}}$, $\sqrt{\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}$.

4) Systemet kan skrivas $x' = Ax$ med $A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Egenvärden i $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, egenvektorer i $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Lösningen kan skrivas $x = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Begynnelsevillkoret $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger ekvationssystem $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
och lösningen blir då $x = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5a) Framåtfelet $0.1 - \frac{0.1^3}{3} - arctan(0.1)$, bakåtfelet $tan(0.1 - \frac{0.1^3}{3}) - 0.1$
b) $fl(x^2) = x^2(1+\delta_1)$, $fl(x^3) = x^3(1+\delta_1)(1+\delta_2)$, $fl(x^3) = \bar{x}^3$ där $\bar{x} = x((1+\delta_1)(1+\delta_2))^{1/3}$, med $|\delta_i| \leq \mu$. Eftersom $(1+\delta)^{1/3} = 1 + \delta/3 + O(\mu^2)$ kan vi skriva $\bar{x} = x(1+\delta_1/3)(1+\delta_2/3) + O(\mu^2) = x(1 + \delta_1/3 + \delta_2/3) + O(\mu^2)$. Vi får alltså $|\frac{\bar{x}-x}{x}| \leq \frac{2}{3}\mu$ och algoritmen är därmed visad vara stabil.

6a). $T(1) = 1(-2/2 - 1/2) = -3/2$
b) Ansätt $p_3(x) = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2)$, $p_3(0) = -2 \Rightarrow a = -2$
$p_3(1) = 0 \Rightarrow b = 2$, $p_3(2) = 0 \Rightarrow c = -1$, $p_3(3) = -1 \Rightarrow d = 1/6$
dvs $p_3(x) = -2 + 2x - x(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$.
c) Låt splinen vara $s(x) = s_1,\ 0 \leq x \leq 1,\ s(x) = s_2,\ 1 \leq x \leq 2,\ s(x) = s_3,\ 2 \leq x \leq 3$. Vi väljer $s_2 = 0$ och bestämmer de andra delarna. Låt $s_1 = a(x-1) + b(x-1)^2$ med $s_1'(x) = a + 2b(x-1)$. Villkoren ger $s_1'(1) = 0 \Rightarrow a = 0$, $s_1(0) = -2 \Rightarrow b = -2$ dvs $s_1 = -2(x-1)^2$. På liknande sätt ger ansatsen $s_3 = c(x-2) + d(x-2)^2$ och villkoren att $c = 0$ och $d = -1$ dvs $s_3 = -(x-2)^2$ och alla spline-delarna är bestämda.

7. Residualvektor $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ f_m \end{bmatrix}$ där $f_i = e^{-at_1} + sin(bt_i) - y_i$.

Jakobian $J = \begin{bmatrix} -t_1 e^{-at_1} & t_1 cos(bt_1) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ -t_m e^{-at_m} & t_m cos(bt_m) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$, där $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k$ är lösning till överbestämt linjärt ekvationssystem: $J_k \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_k = -F_k$, där $J_k = J(a_k, b_k)$, $\quad F_k = F(a_k, b_k)$.

8a) $y_1 = y_0 + 0.1(-y_1^3 + 0.1^2) = 1 - 0.1y_1^3 + 0.001$ dvs med $y_1 = x$ har vi ekvationen $0.1x^3 + x = 1.001 = 0$.

b) På testproblemet får vi: $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda y_k$, $\quad y_{k+1}^{(1)} = y_k + h\lambda y_{k+1}^{(0)} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k) = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]y_k$.

Stabilitetområdet blir alltså $\{z \in C; \mid 1 + z + z^2 \mid \leq 1\}$.

$f_y' = -3y^2$ med $y \leq 1$ dvs $-3 \leq f_y' \leq 0$ med $-0.3 \leq z = hf_y' \leq 0 \Rightarrow |1 + z + z^2| \leq |1 - 0.3 + 0.09| < 1$ dvs stabilt.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2005-05-28

DAG: Lördag 28 maj 2005 TID: 14.15 - 18.15 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Johan Jansson, tel: 0762-721860
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 juni
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Låt H_1 och H_2 vara underrum till ett linjärt rum V. Undersök om $H_1 \cup H_2$ alltid är ett underrum till V. **(3p)**
b) Visa att om A och B är ortogonala matriser och $det(A) = -det(B)$ så är $A+B$ singulär (ej inverterbar).
Ledning: Definitioner och produktregel för determinant. **(4p)**

Uppgift 2. Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_1 + (a_1 - a_2)t + (a_0 - a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Visa att $B = \{1+t,\ 1-t,\ 1+t+t^2\}$ är bas för P_2 och ange transformationsmatrisen $P_{E\leftarrow B}$ mellan baserna B och E **(2p)**
c) Bestäm matrisen M' för avbildningen F i basen B och verifiera formeln $M' = P_{E\leftarrow B}^{-1} M P_{E\leftarrow B}$. **(3p)**

Uppgift 3.

Vi vill lösa problemet $min_x \|Ax - b\|_2$, med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Lös problemet med normalekvationerna. **(2p)**
b) Lös problemet med QR-faktorisering. **(4p)**
c) Om tredje kolonnen i A ändras till $[\ 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0\ ]^T$ så fungerar inte metoderna i a) eller b). Ange en metod som ger lösningen till problemet med minsta norm $\|x\|_2$. Skriv formellt upp lösningen utan att göra några numeriska beräkningar. **(2p)**

Uppgift 4. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 6x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3$.
a) Bestäm största värde på $Q(x)$ då $x^Tx = 2$. Bestäm alla vektorer u med $u^Tu = 2$ sådana att $Q(u)$ är maximal. **(4p)**
b) Bestäm största värde på $Q(x)$ under villkoren att $x^Tx = 2$ och $x^Tu = 0$ för alla u enligt a)-uppgiften. För vilka x antas detta maxvärde? **(3p)**

Uppgift 5. Vi vill lösa ekvationen $3x^3 - 2x^2 - 0.99 = 0$ med Newtons metod.
a) En rot x^* till ekvationen ligger nära 1. Använd den informationen för att bestämma konvergenshastighet och (approximativt) asymptotisk felkonstant vid konvergens mot roten. **(3p)**
b) Mer noggrant gäller $x^* = 0.99799$ med fem korrekta decimaler. Använd den informationen och a)-uppgiften för att avgöra hur många iterationer det kommer att behövas från startapproximation $x_0 = 1$ för att bestämma x^* med åtta korrekta decimaler. **(3p)**

Uppgift 6. Betrakta följande tabell över funktionsvärden:

x	0	1	2	3
f	1	2	3	2

a) Beräkna en approximation till $\int_0^3 f(x)\,dx$ med hjälp av tabellen och trapetsformeln. **(2p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet till punkterna i tabellen. **(3p)**
c) Undersök om $s = \begin{cases} 1 + x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3 + (x-2) - 2(x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ är en kvadratisk spline med knutpunkt (nod) i $x = 2$ och som interpolerar tabellvärdena. **(2p)**

Uppgift 7.
a) Formulera linjesökningsproblemet vid minimering av en funktion f av flera variabler utan bivillkor. **(3p)**
b) Visa att om f är en kvadratisk funktion dvs $f = \frac{1}{2}x^THx + b^Tx$ så ges linjesökningsproblemets lösning dvs steglängden av formeln $\alpha_k = -\frac{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}{(d^{(k)})^T H d^{(k)}}$ där $d^{(k)}$ är vald sökriktning i punkten $x^{(k)}$. **(4p)**.
c) Hur väljer man sökriktning i Steepest Descent-metoden? **(1p)**

Uppgift 8. Man vill lösa följande andra ordningens randvärdesproblem för en funktion $y(x)$:

$$\begin{cases} y'' = -4y + a(y' - 1), 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

där a är en parameter.

a) Skriv om problemet som ett system av första ordningens ekvationer. **(2p)**

b) Bestäm för vilka a-värden som problemet i a)-uppgiften är stabilt. Är Eulers framåtmetod stabil för $a = -5$ och steglängd $h = 0.5$? **(4p)**

c) Man vill nu att parametern a skall uppfylla sambandet $a = -(2y'(1) + y(1))$. Sätt, i analogi med inskjutningsmetoden, upp en ekvation vars lösning ger korrekt a-värde och därmed lösningen till problemet. Formulera en lämplig iterativ metod att lösa ekvationen. Vari består det mesta arbetet vid en iteration med metoden? **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 28 maj 2005

1a) Nej! Exempelvis $V = R^2,\ H_1 = \{(x, y);\ y = 2x\},\ H_2 = \{(x, y);\ y = 3x\}$. Då gäller $(1, 2) \in H_1,\ (1, 3) \in H_2$ men $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin H_1 \cup H_2$.

b) $A^T(A + B) = I + A^TB = B^TB + A^TB = (B + A)^TB$. En matris och dess transponat har samma determinant: $det(A) \cdot det(A + B) = det(B + A) \cdot det(B)$. Förutsättningen $det(A) = -det(B)$ ger nu att $det(A + B) = 0$ dvs $A + B$ singulär.

2a) $F(e_1) = t^2 = e_3,\ F(e_2) = 1 + t = e_1 + e_2,\ F(e_3) = -t - t^2 = -e_2 - e_3$.

Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $P_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är reguljär alltså är B en bas.

c) $F(b_1) = 1 + t + t^2 = b_3,\ F(b_2) = -1 - t + t^2 = -2b_1 + b_3,\ F(b_3) = 1 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2$

$M' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ med $P_{E\leftarrow B}M' = MP_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3a) $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A^TAx = A^Tb \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1, 1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0)^T - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0)^T = (0, 1, 0, 1)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = Q^TA = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ och $Q^Tb = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Lösningen ges av triangulära systemet $Rx = Q^Tb$ och blir $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Kompakt SVD: $A = U_1\Sigma_rV_1^T$. Lösning $x = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^Tb$ där $r = 2$ eftersom $rang(A) = 2$.

4) $Q(x) = x^TAx$ med $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Egenvärden i $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, egenvektorer i

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Största värde på kvoten $Q(x)/x^T x = 6$ dvs största värdet på $Q(x)$ är 12 och antas för $u = c_1[1\ 0\ 0]^T + c_2[0\ 1\ 2]^T$ med längd $\sqrt{2}$ dvs c_1 och c_2 ska ligga på cirkeln $c_1^2 + c_2^2 = 2$.
b) Enligt sats i Lay blir maxvärdet på $Q(x)/x^T x$ under givna villkor det näst största egenvärdet dvs 1 och därmed $Q(x) = 2$ som antas för $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}[0\ \ -2\ 1]^T$

5a) $f' = 9x^2 - 4x,\ f''(x) = 18x - 4$ med $f'(1) = 5 \neq 0$ dvs enkelrot, konvergensordning 2 och asymptotisk felkonstant $C \approx \frac{1}{2}\frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \approx \frac{14}{10} = 1.4$.
b) $\epsilon_0 \approx 0.2 \cdot 10^{-2},\ \epsilon_1 \approx 1.4\epsilon_0^2 \approx 5.6 \cdot 10^{-6},\ \epsilon_2 \approx 1.4\epsilon_1^2 \approx 4.4 \cdot 10^{-11}$. Två iterationer räcker.

6a). $T(1) = 1(1/2 + 2 + 3 + 2/2) = 6.5$
b) Ansätt $p_3(x) = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2),\ p_3(0) = 1 \Rightarrow a = 1$
$p_3(1) = 2 \Rightarrow b = 1,\ p_3(2) = 3 \Rightarrow c = 0,\ p_3(3) = 2 \Rightarrow d = -1/3$
dvs $p_3(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$.
c) Ja, ty båda delarna är polynom av grad ≤ 2 och villkoren $s_1(0) = 1,\ s_1(1) = 2,\ s_1(2) = s_2(2) = 3,\ s_1'(2) = s_2'(2)$ och $s_2(3) = 2$ gäller.

7a) $min_\alpha\ f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$, där $d^{(k)}$ är vald sökriktning i punkten $x^{(k)}$.
b) Låt $g(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$. Vi söker $min\ g(\alpha)$. $g'(\alpha) = \nabla f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})^T d^{(k)}$.
$\nabla f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = H(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) + b = Hx^{(k)} + b + \alpha H d^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) + \alpha H d^{(k)}$.
$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow [\nabla f(x^{(k)}) + \alpha H d^{(k)}]^T d^{(k)} = 0$ som ger $\alpha = -\frac{\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}}{(d^{(k)})^T H d^{(k)}}$.

8a) $$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 + a(y_2 - 1) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

b) $y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & a \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}$. Stabilt om $Re(\lambda) \leq 0$. Vi får $\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-16}{4}}$. $Re(\lambda) \leq 0$ om $a \leq 0$. $-4 < a \leq 0$ ger komplexkonjugerat par med realdel ≤ 0 och $a \leq -4$ ger två negativa egenvärden. $a = -5$ ger minsta egenvärde $\lambda = -4$ med $h\lambda = -2$ som ligger i stabilitetsområdet för Euler framåt och som därmed är stabil.
c) Ekvationen kan skrivas $g(a) = 0$ med $g(a) = a + 2y_2(1, a) + y_1(1, a)$. Sekantmetoden blir $a_{k+1} = a_k - \frac{g(a_k)(a_k - a_{k-1})}{g(a_k) - g(a_{k-1})}$. I varje iteration skall ODE-systemet i a)-uppgiften lösas och det är det som kostar på.

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2005-08-26

DAG: Fredag 26 augusti 2005 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Anslås på institutionen senast 15 september
	Tentan kan hämtas i mottagningsrummet dagligen mellan 12.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1. En kvadratisk matris A är skevsymmetrisk om $A^T = -A$.
a) Visa att mängden av skevsymmetriska matriser är ett linjärt rum. **(2p)**
b) Bestäm dimensionen av rummet i a)-uppgiften. **(2p)**
c) Visa att om T är en ortogonal matris och $T+I$ är inverterbar, så är $A = (T-I)(T+I)^{-1}$ skevsymmetrisk. **(4p)**

Uppgift 2. Låt F vara avbildningen som deriverar polynom av grad ≤ 3,
dvs $F(p(t)) = p'(t),\quad p \in P_3$.
a) Visa utgående från definitionen att F är en linjär avbildning. **(2p)**
b) Bestäm nollrum och värderum för avbildningen F. **(3p)**
c) Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $\{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ **(2p)**

Uppgift 3.
a) Låt $u \neq 0$ och $v \neq 0$ vara två vektorer i ett linjärt rum med skalärprodukt sådana att $\|u\| = \|v\| = \|u - v\|$. Bestäm vinkeln mellan u och v. **(3p)**

b) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **(4p)**

c) Ange med hjälp av b)-uppgiften en ON-bas för $Col(A)$. **(1p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden: **(4p)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - 4x_2(t), & x_2(0) = -3 \\ x_3'(t) = x_1(t) - 3x_3(t), & x_3(0) = 2 \end{cases}$$

b) Vad blir det för problem med diagonaliseringsmetoden om första ekvationen ändras till $x_1'(t) = -4x_1(t)$? **(2p)**
c) Undersök om problemet i a-uppgiften är stabilt. **(1p)**
d) Antag att du vill använda Eulers framåtmetod för att lösa problemet i b-uppgiften. Ge ett villkor på steglängden h så att metoden blir stabil. Vad gäller för motsvarande villkor om du använder Eulers bakåtmetod i stället? **(3p)**

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 2x_1x_3 + 2 = 0 \\ x_1^3x_2 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1x_3^3 - 1 = 0 \end{cases}$.

a) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Det visar sig att efter fem iterationer enligt a-uppgiften är felet $\|x^{(5)} - x^*\| \approx 0.0113$ och roten x^* är reguljär. Hur många ytterligare iterationer kan du förväntas få göra innan felet $\|x^{(k)} - x^*\| \leq 10^{-10}$? **(2p)**

Uppgift 6. Betrakta en kvadraturformel för approximativ beräkning av en intgral: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$.
a) Visa att $\sum_{i=1}^n \alpha_i = b - a$ för en rimlig kvadraturformel. **(2p)**
b) I Simpsons regel gäller för intervallet $(a, b) = (0, 1)$ att $n = 3,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{6},\ \alpha_2 = \frac{4}{6},\ \alpha_3 = \frac{1}{6}$. Visa att Simpsons regel är identisk med trapetsregeln följd av ett stegs Richardsonextrapolation med steglängderna 1 och $\frac{1}{2}$. **(4p)**

Uppgift 7. Betrakta problemet att minimera funktionen $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6$ utan bivillkor, med känd lösning $x^* = (0, 0)$.
a) Ange formeln för Steepest Descent-metoden för att lösa problemet, tala speciellt om vad som är sökriktning och vad som är steglängd. **(2p)**
b) Gör en iteration från $x^{(0)} = (1, 1)$. Bestäm steglängden exakt genom att använda aktuell formel för kvadratisk objektfunktion. **(4p)**
c) Ta fram en startpunkt $x^{(0)} \neq x^*$, som ger lösningen med **en** iteration av Steepest Descent-metoden på aktuellt problem. **(2p)**
Ledning till c)-uppgiften: Nivåkurvor.

Uppgift 8. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' = -2y^2 + ty,\ y(0) = 1$.
a) Anta att du vill använda Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ för att bestämma en approximation till $y(0.1)$. Skriv upp den andragradsekvation som du får att lösa. **(3p)**
b) Man kan slippa att lösa andragradsekvation om man använder Eulers framåtmetod som prediktor och gör fixpunktsiteration i Eulers bakåtmetod (korrektorn). Gör två fixpunktsiterationer på problemet i a)-uppgiften. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 26 augusti 2005

1a) A och B skevsymmetriska ger $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$ dvs summan är skevsymmetrisk, c skalär ger $(c*A)^T = c*A^T = c*(-A) = -(c*A)$ dvs skalär gånger matris är skevsymmetrisk, speciellt är nollmatrisen skevsymmetrisk.
b) En skevsymmetrisk matris är kvadratisk med nolldiagonal och är entydigt bestämd av värdena i strikt övre triangulära delen, som har $n(n-1)/2$ element för en $n \times n$-matris. Dimensionen är alltså $n(n-1)/2$.
c) $A = (T-I)(T+I)^{-1} = (-2I + I + T)(T+I)^{-1} = -2(T+I)^{-1} + I$ och
$A^T = (T^T + I)^{-1}(T^T - I) = \{T^T T = I\} = [T^T(I+T)]^{-1}[T^T(I-T)] =$
$(I+T)^{-1}(T^T)^{-1}(T^T)(I-T) = (I+T)^{-1}(I-T) = -(I+T)^{-1}(-2I + I + T)$
$= 2(I+T)^{-1} - I = -A.$

2a) För p och q i P_3 gäller $F((p+q)(t)) = (p+q)'(t) = p'(t) + q'(t) = F(p(t)) + F(q(t))$ och med c skalär gäller $F((cp)(t)) = (cp)'(t) = cp'(t) = cF(p(t))$.
b) Nollrummet är alla polynom som deriveras till nollpolynomet, dvs nollrummet är alla polynom av grad $= 0$, dvs P_0. Derivatan av ett polynom i P_3 är ett polynom av grad ≤ 2 dvs i P_2. Vidare har varje polynom i P_2 en primitiv funktion i P_3, alltså är värderummet av F rummet P_2.
c) $F(1) = 0,\ F(t^p) = pt^{p-1},\ p = 1,\ 2,\ 3$. Matrisen blir $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3a) $\|u-v\|^2 =< u-v, u-v >= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 < u, v >$, dvs $2 < u, v >= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2 = \|u\|^2 = \|u\|\|v\|$ (enligt givna förutsättningar). Definition av vinkel ger nu $cos(\theta) = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} = \frac{\|u\|\|v\|}{2\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}$, dvs $\theta = \frac{\pi}{3}$.
b) De två första kolonnerna är ortogonala. Gram-Schmidt på tredje ger
$(1,0,-1,1)^T - \frac{2}{2}(1,0,-1,0)^T - \frac{1}{5}(0,2,0,1)^T = \frac{1}{5}(0,-2,0,4)^T$.
Med normerade kolonner får vi matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix},\ R = Q^T A = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 5/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

c) Kolonnerna i Q utgör ON-bas för $Col(A)$

4a) Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är på diagonalen,
$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = -3$
med egenvektorer, som fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem
$(A - \lambda_i I)v_i = 0$: $v_1 = (1, -2, 1)^T,\ v_2 = (0, 1, 0)^T$ och $v_3 = (0, 0, 1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$ med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4b) Egenvärdena blir nu $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = -3$. Det dubbla egenvärdet $\lambda = -4$ har egenvektor $(0, 1, 0)^T$, som spänner rum av dimension $= 1 < 2 =$ multipiciteten hos egenvärdet. Matrisen är då inte diagonaliserbar.

4c) Alla egenvärden har realdel ≤ 0, alltså är problemet stabilt.

4d) Stabilitetområde för Eulers framåtmetod är: $\mid 1 + h\lambda \mid \leq 1$. Egenvärdet $\lambda = -4$ ställer högst krav och ger stabilitetsvillkoret $h \leq \frac{1}{2}$. Eulers bakåtmetod är A-stabil och ställer inget stabilitetsvillkor på h.

5a) $f = \begin{cases} 2x_1 + 2x_1 x_3 + 2 \\ x_1^3 x_2 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1^2 + x_2 - x_1 x_3^3 - 1 \end{cases} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 + 2x_3 & 0 & 2x_1 \\ 3x_1^2 x_2 & -4 + x_1^3 & 1 \\ -2x_1 - x_3^3 & 1 & -3x_3^2 x_1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

b) Det krävs tre iterationer ytterligare ty kvadratisk konvergens och $0.0113^{2^3} \leq 10^{-10}$.

6a) En rimlig kvadraturformel bör vara exakt för den triviala integranden $f(x) = 1$. Sätter man in den så får man villkoret $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = b - a$.
6b) $T(1) = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1),\quad T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{2} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} f(1)$. Richardsonextrapolation ger då: $T(\frac{1}{2}) + \frac{T(\frac{1}{2}) - T(1)}{3} = \frac{4}{3} T(\frac{1}{2}) - \frac{1}{3} T(1) = \frac{1}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{6} f(0) - \frac{1}{6} f(1)$
$= \frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6} f(1)$ som är Simpsons formel.

7 a) Sökmetod: $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \\ d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) \end{cases}$. Här är $d^{(k)}$ sökriktning och α_k steglängd.

b) $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6, \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$

För första iterationen har vi

$x^{(0)} = (1,1)^T, \quad \nabla f(x^{(0)}) = (6,4)^T, \quad d^{(0)} = (-6,-4)^T, \quad Hd^{(0)} = (-36,-16)^T.$

Optimal steglängd enligt formel: $\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x^{(0)})^T d^{(0)}}{d^{(0)T} H d^{(0)}} = -\frac{-52}{280} = \frac{13}{70}.$

Första iterationen blir alltså: $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = (1,1)^T + \frac{13}{70}(-6,-4)^T = \frac{1}{35}(-4,9)^T.$

7c) Nivåkurvorna är ellipser centrerade kring origo med halvaxlarna längs koordinataxlarna. Om man startar någonstans på halvaxlarna så pekar negativa gradienten till origo och **en** iteration krävs. Man kan t.ex. starta i $x^{(0)} = (1,0)^T$.

8a) Eulers bakåtmetod ger: $y_1 = y_0 + 0.1(-2y_1^2 + 0.1y_1) = 1 - 0.2y_1^2 + 0.01y_1$ dvs andragradsekvationen $0.2y_1^2 + 0.99y_1 - 1 = 0$.

b) Eulers framåtmetod ger $y_1^{(0)} = 1 + 0.1(-2+0) = 0.8$.

Två successiva fixpunktsiterationer korrektorn (Eulers bakåtmetod) ger nu:

$y_1^{(1)} = 1 + 0.1(-2 \cdot 0.8^2 + 0.1 \cdot 0.8) = 0.88$

$y_1^{(2)} = 1 + 0.1(-2 \cdot 0.88^2 + 0.1 \cdot 0.88) = 0.8539.$

Institutionen för
Matematik
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2006-01-09

DAG: Måndag 9 januari 2006 TID: 8.30-12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 772 10 94
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Fås på institutionen efter tentamen
Resultat:	Fås på institutionen senast 20 januari
	Tentan kan därefter hämtas på expeditionen, mån-fre 8.30-13
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Visa att det linjära rummet av polynom av grad $\leq n$ har dimensionen $n+1$. **(4p)**
b) Undersök om mängden av symmetriskt positivt definita $n \times n$-matriser med operationerna
$A \oplus B$ vanlig matrisaddition
$\alpha \odot A = A^{\alpha}$
är ett linjärt rum (ett vektorrum). **(3p)**

Uppgift 2.
Betrakta avbildningen $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_2 + (a_0 + a_1)t + (a_1 - a_2)t^2$ från P_2 till P_2.
a) Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $E = \{1,\ t,\ t^2\}$ för P_2. **(2p)**
b) Visa att $B = \{1+t^2,\ 1-t^2,\ 1+t+t^2\}$ är bas för P_2 och ange transformationsmatrisen $P_{E \leftarrow B}$ mellan baserna B och E **(2p)**
c) Bestäm matrisen M' för avbildningen F i basen B. **(3p)**

Uppgift 3.

Betrakta rotationsmatrisen $G = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ där $c = \cos\alpha,\ \ s = \sin\alpha$ för en vinkel α.

a) Visa att G är ortogonal. **(2p)**
b) Bestäm egenvärdena till G och G^T samt visa att egenvektorerna till G och G^T, som hör till samma egenvärde, är ortogonala. **(5p)**

Uppgift 4.

Betrakta problemet att lösa ett överbestämt ekvationssystem $Ax = b$ med $A \in R^{m \times n},\ \ m > n$ i minstakvadratmening. Matematiskt sett ges lösningen av normalekvationerna $A^T Ax = A^T b$.
a) Visa att lösningen ges av $Rx = Q^T b$, där $A = QR$ är kompakt QR-faktorisering av A, då A har full rang. Nämn en fördel med denna metod jämfört med normalekvationerna. **(4p)**
b) Visa att en lösning ges av $x = V\Sigma_r^{-1}U^T b$ där $A = U\Sigma_r V^T$ är kompakt SVD-faktorisering med Σ_r diagonal, då A har rang = r. **(3p)**
c) Nämn två fördelar med trunkerad SVD i samband med minstakvadratproblemet jämfört med icke trunkerad SVD. **(2p)**

Uppgift 5.

a) Betrakta ekvationssystemet $\left\{ \begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3^3 + 1 = 0 \\ -2x_1^2 + x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ x_2^2 - 2x_3 + 1 = 0 \end{array} \right.$.

Gör en iteration med Newtons metod med start i origo. **(4p)**
b) Vad menas med en kvasi-Newtonmetod? Skriv upp formellt utan att göra några beräkningar. **(3p)**

Uppgift 6.

Betrakta följande tabell över funktionsvärden $f(x)$ i fyra punkter.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	0	1

a) Bestäm en approximation till $\int_0^3 f(x)\,dx$ med trapetsformeln. **(2p)**

b) Bestäm en linjär spline som interpolerar i punkterna. **(2p)**

c) Vilket gradtal har interpolationspolynomet till punkterna? Motivera ordentligt! **(2p)**

Uppgift 7

För en harmonisk svängning med amplitud a och fasvinkel v gäller modellen
$u(t) = a\ \sin(t+v)$.
Vi vill bestämma a och v från mätningar $(t_i,\ u_i),\ i = 1,\ \dots\ ,\ m$ med $m > 2$.
a) Formulera om modellen så att linjär minsta-kvadrat kan användas och skriv upp det ekvationssystem som ska lösas samt ange hur a och v kan fås ur lösningen. **(4p)**
b) Använd den olinjära modellen som den står och ange residual och Jacobian samt teckna en iteration med Gauss-Newtons metod. Hur får man lämplig startapproximation? **(4p)**

Uppgift 8.

Heuns metod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer definieras av:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$.
a) Bestäm stabilitetsområdet för Heuns metod. **(3p)**
b) Bestäm approximationsordningen för Heuns metod **(3p)**
c) Gör ett steg med Heuns metod och steglängd $h = 0.1$ för problemet
$y' = -2y^2 + t,\ t > 0$ med begynnelsevärde $y(0) = 1$. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 9 januari 2006

1 a) Betrakta mängden $B = \{x^j\}_{j=0}^n$. B spänner rummet P_n, mängden av polynom av grad $\leq n$, eftersom $p \in P_n$ kan skrivas $p = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Vidare är B linjärt oberoende ty $q = \sum_{j=0}^n \beta_j x^j = 0,\ \forall x \Rightarrow \beta_j = 0, \forall j$. Detta följer genom upprepad derivering av q och insättning av $x = 0$.
c) $(\alpha+\beta)\odot A = A^{\alpha+\beta} = A^\alpha \cdot A^\beta \neq$ (α och β positiva heltal t.ex. $\neq A^\alpha \oplus A^\beta = \alpha\odot A \oplus \beta \odot A$. Alltså gäller inte räknelag (8) (distributivitet). Slutsats: Ej linjärt rum.

2 a) $F(e_1) = t = e_2,\quad F(e_2) = t + t^2 = e_2 + e_3,\quad F(e_3) = 1 - t^2 = e_1 - e_3 \quad \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $b_1 = 1 + t^2 = e_1 + e_3,\quad b_2 = 1 - t^2 = e_1 - e_3,\quad b_3 = 1 + t + t^2 \ \Rightarrow P_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Matrisen ickesingulär alltså är B en bas.
c) $M' = P_{E\leftarrow B}^{-1} M P_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M P_{E\leftarrow B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1.5 \\ 1 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3 a) $G^T G = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & sc - cs \\ cs - sc & s^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, alltså är G ortogonal.
b) Karakteristiska ekvationen $(c-\lambda)^2 + s^2 = 0$ har lösningarna $\lambda = c \pm is$, med motsvarande egenvektorer, från lösning av homogent ekvationssystem, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}$. På samma sätt får vi för G^T egenvärdena $\lambda = c \pm is$ med egenvektorer $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$ Skalärprodukten blir $u^* v = 1 - 1 = 0$, alltså är egenvektorerna ortogonala.

4 a) $A = QR$ där Q har ortonormala kolonner och R är reguljär, uppåt triangulär. $A^T A = R^T Q^T Q R = R^T R,\quad A^T = R^T Q^T$ ger att $A^T A x = A^T b \Leftrightarrow R^T R x = R^T Q^T b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$. Systemet $Rx = Q^T b$ är (oftast) bättre konditionerat än normalekvationerna.
b) $A = U\Sigma_r V^T$ där U och V har ortonormala kolonner och Σ_r är positiv och diagonal. Vi får $A^T A = V\Sigma_r U^T U \Sigma_r V^T = V\Sigma_r^2 V^T$ och $A^T = V\Sigma_r U^T$. Normalekvationerna övergår alltså i $A^T A x = A^T b \Leftrightarrow V\Sigma_r^2 V^T x = V\Sigma_r U^T b$ och vi ser att $x = V\Sigma_r^{-1} U^T b$ löser detta system.
c) Bättre konditionering och mindre arbete.

5 a) $F = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3^3 + 1 \\ -2x_1^2 + x_2 - x_3 + 2 \\ x_2^2 - 2x_3 + 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3x_3^2 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 4x_2 & -2 \end{bmatrix}$, $F_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $x_1 = x_0 - J_0 \backslash F_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Iteration enligt $H_k d_k = F_k,\ x_{k+1} = x_k - d_k,\ \ k = 0,\ 1,\ ...,$ där H_k är en approximation av $J(x_k)$.

6 a) $T(1) = 1[0.5 - 1 + 0 + 0.5] = 0.$

b) Elementär ansats ger direkt $s(x) = \begin{cases} s_1 = 1 - 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_2 = -2 + x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

c) Gradtal tre. Genom de tre sista punkterna går räta linjen $-2 + x$, som är interpolationspolynomet till dessa tre punkter. Denna räta linje går inte genom den första punkten. Alltså kan inte interpolationspolynomet till de fyra punkterna ha lägre gradtal än tre.

7 a) $u(t) = a\ sin(v)\ cos(t) + a\ cos(v)\ sin(t) = \alpha\ cos(t) + \beta\ sin(t)$ med nya parametrar $\alpha = a\ sin(v)$ och $\beta = a\ cos(v)$. I dessa parametrar har vi det linjära problemet $\begin{bmatrix} cos(t_1) & sin(t_1) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ cos(t_m) & sin(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ ... \\ ... \\ u_m \end{bmatrix}$. Med sambandet $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ får vi då $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ och $v = \arcsin \frac{\alpha}{a}$.

b) modell: $u(t) = a\ sin(t + v)$, residualer: $f_i = a\ \sin(t_i + v) - u_i$,

Jacobian: $J = \begin{bmatrix} \sin(t_1 + v) & a\ \cos(t_1 + v) \\ ... & ... \\ ... & ... \\ \sin(t_m + v) & a\ \cos(t_m + v) \end{bmatrix}$.

Gauss-Newton: $x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)} \\ J(x^{(k)}) d^{(k)} = -f(x^{(k)}) \end{cases}$.

Startapproximation kan tas från linjäriseringen i a)-uppgiften.

8 a) Testpoblem för stabilitet: $y' = \lambda y$, dvs $f = \lambda y$.

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k + h\lambda y_k + \frac{(h\lambda)^2}{2} y_k = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}] y_k$. Begränsade lösningar för $z = h\lambda$ i stabilitetsområdet: $\{z \in C; |\ 1 + z + \frac{z^2}{2}\ | \leq 1\}$.

b) Jämför tillväxtfaktorn $1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$ med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \ ...$. Stämmer alltså med tre termer och approximationsordningen är då 2.

c) $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[-2y_0^2 + t_0 - 2\{y_0 + h(-2y_0^2 + t_0)\}^2 + t_1] =$
$= 1 + \frac{0.1}{2}[-2 \cdot 1^2 + 0 - 2\{1 + 0.1(-2 \cdot 1^2 + 0)\}^2 + 0.1] = 1 + \frac{0.1}{2}[-2 - 1.28 + 0.1] = 0.841.$