Lana 13 ~~Bevis~~ 1 ①

1.2 $V = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. Addition $a \oplus b := ab$, multiplikation med skalär $\alpha \odot a := a^{\alpha}$, $a, b \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Visa att detta ger ett vektorrum.

Lösning $V, \oplus, \odot$ måste uppfylla de tio kriterier som ingår i definitionen av ett vektorrum (def. 1.1. i kursbok).

(1) $a \oplus b$ ger ett entydigt element i V $\forall a, b \in V$.

$a \oplus b = ab$ positivt reellt när a och b är det. $\Rightarrow$ OK

(2) $\alpha \odot a$ ger ett entydigt element i V $\forall \alpha \in \mathbb{R}, a \in V$.

$\alpha \odot a = a^{\alpha}$ positivt reellt när a är positivt. $\Rightarrow$ OK

(3) Addition kommuterar;

$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a \Rightarrow$ OK.

(4) Addition är associativ:

$(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c) \Rightarrow$ OK

(5) Det finns ett element $0 \in V$: $0 \oplus a = 0 \oplus a = a$ $\forall a \in V$.

Testa med 1: $1 \oplus a = 1a = a$ och $a \oplus 1 = a1 = a \Rightarrow$ OK

(ettan, 1, är 0-element)

(6) Varje element har en additiv invers: $\forall a \in V \exists (-a)$: $a \oplus (-a) = 0$.

I vårt fall vill vi ha ett element $(-a)$ sådant att

$a(-a) = 1$. $(-a) = \frac{1}{a}$ går bra. $\Rightarrow$ OK

(7) Multiplikation med skalär är associativt:

$\alpha \odot (\beta \odot a) = \alpha \odot (a^{\beta}) = a^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot a \Rightarrow$ OK.

(8) Distributivitet I: $\alpha \odot (a \oplus b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, a, b \in V$:

$\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot (ab) = (ab)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha} = (a^{\alpha}) \oplus (b^{\alpha}) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)$

(9) Distributivitet II: $(\alpha + \beta) \odot a = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in V$.

$(\alpha + \beta) \odot a = a^{\alpha + \beta} = a^{\alpha} a^{\beta} = a^{\alpha} \oplus a^{\beta} = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a) \Rightarrow$ OK

(10) Multiplikation med 1: $1 \odot a = a$ $\forall a \in V$.

$1 \odot a = a^1 = a \Rightarrow$ OK.

Lana 13 - Remo 1 (2)

1.3 $V = \mathbb{R}^2$ med operationer

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha x_2 - 1).$$

Visa att detta är ett vektorrum. Vilket är 0-elementet?

Lösning: Kontrollera kriterier (1) – (10) för vektorrum enligt definitionen.
Ett exempel: Distributivitet I: Vi vill visa $\alpha \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) =$
$= (\alpha \odot (x_1, x_2)) \oplus (\alpha \odot (y_1, y_2))$.

$$\alpha \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) = \alpha \odot (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) =$$
$$= (\alpha + \alpha(x_1 + y_1 + 1) - 1, \alpha + \alpha(x_2 + y_2 + 1) - 1) = (2\alpha + \alpha(x_1 + y_1) - 1, 2\alpha + \alpha(x_2 + y_2) - 1)$$
$$(\alpha \odot (x_1, x_2)) \oplus (\alpha \odot (y_1, y_2)) = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha x_2 - 1) \oplus (\alpha + \alpha y_1 - 1, \alpha + \alpha y_2 - 1)$$
$$= (\alpha + \alpha x_1 - 1 + \alpha + \alpha y_1 - 1 + 1, \alpha + \alpha x_2 - 1 + \alpha + \alpha y_2 - 1 + 1)$$
$$= (2\alpha + \alpha(x_1 + y_1) - 1, 2\alpha + \alpha(x_2 + y_2) - 1) \qquad \text{OK.}$$

Nollelementet: Antag att (z_1, z_2) är nollelement. Vi kräver för godtyckligt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
$$(z_1, z_2) \oplus (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \Rightarrow (z_1 + x_1 + 1, z_2 + x_2 + 1) = (x_1, x_2)$$
dvs. $z_1 + 1 = z_2 + 1 = 0$ så $(z_1, z_2) = (-1, -1)$, vilket ~~per~~ konstruktion blir ett nollelement.

1.4 $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ med "vanliga" operationer.

(a) Låt $u, v \in V$. Är $u + v$ en vektor i V?

Lösning ~~Om~~ Låt $u = (x_u, y_u)$, $v = (x_v, y_v)$, så $u + v = (x_u + x_v, y_u + y_v)$, då $u, v \in V$ gäller $x_u, x_v, y_u, y_v \geq 0$ så $x_u + x_v, y_u + y_v \geq 0$, dvs. $u + v \in V$.

(b) Om $u \in V$, är cu en vektor i V för alla $c \in \mathbb{R}$?

Lösning: Här hittar vi enkelt ett motexempel: Ta $c = -1$, då blir komponenterna i cu båda negativa, dvs. $cu \notin V$.

(c) Är V ett vektorrum?

Lösning: V måste i så fall uppfylla kriterierna, men kriterium (2) uppfylls inte ty det finns vektorer $u \in V$ och tal $c \in \mathbb{R}$ sådana att cu inte ger ett element i V, enl (b).

Lana 13 - Demo 1 (3)

1.7 Låt $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Visa att M ej är ett underrum till $\mathbb{R}^2$.

Lösning. Då $\mathbb{R}^2$ (med vanliga operationer) är ett vektorrum är M ett underrum om $\alpha u + \beta v \in M$ $\forall u,v \in M$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (sats 1.1). (Det krävs att M är slutet under addition och multiplikation med skalär, alla övriga kriterier uppfylls automatiskt när M är en delmängd till ett vektorrum.)
Här är det dock ganska enkelt att hitta vektorer och skalärer för vilka detta inte uppfylls: Tag $u = (1,0) \in M$, $v = (0,0) \in M$ $\alpha = 2$, $\beta = 0$, dvs. $\alpha u + \beta v = (2,0)$, men $(2,0) \notin M$ $(2^2+0^2 = 4 > 1\,!)$.

1.8 Vilka av delmängderna är underrum till P_n (polynom av grad $\leq n$)? $(n \geq 2)$

(a) $\{p \in P_n : p(t) = at^2, a \in \mathbb{R}\} =: V$

Lösning: Som tidigare räcker det att avgöra om $\alpha p(t) + \beta q(t) \in V$ för alla $p,q \in V$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, enl. sats 1.1.
Låt $p,q \in V$. Då gäller $p(t) = at^2$, $q(t) = bt^2$, $a,b \in \mathbb{R}$ och
$\alpha p(t) + \beta q(t) = \alpha a t^2 + \beta b t^2 = (\alpha a + \beta b)t^2 \in V$ ~~dy~~ $\alpha a + \beta b \in \mathbb{R}$.

(c) $V = \{p \in P_n : p(0) = 0\}$.

Lösning Låt $p,q \in V$ dvs. $p(0) = q(0) = 0$. Då gäller att
$\alpha p(0) + \beta p(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ så $\alpha p(t) + \beta q(t) \in V$, dvs.
V är underrum.

(e) $V = \{p \in P_n : p(t) \geq 0$ då $0 \leq t \leq 1\}$.

Lösning Här kan vi hitta exempel där $\alpha p(t) + \beta q(t) \notin V$.
Tag exempelvis $p(t) = t$, $q(t) = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$ så får vi $\alpha p(t) + \beta q(t) = -t \leq 0$ om $0 \leq t \leq 1$ så $\alpha p(t) + \beta q(t) \notin V$.
Därmed är V ej ett underrum.

(g) $V = \{p \in P_n : p$:s koefficienter är heltal$\}$.

Lösning. Detta är inte heller ett underrum. Tag $p(t) = 1$, $q(t) = t$ och $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ så får vi $\alpha p(t) + \beta q(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$ som inte har heltalskoefficienter.

Lana 13 Demo 1 4

1.9 Avgör om den givna delmängden är underrum till $\mathbb{R}^4$.
Vilka är affina mängder (dvs. ett underrum + någon konstant vektor).

(a) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

Lösning: Låt $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
För $z = \alpha x + \beta y$ gäller då $3z_1 - 2z_2 + z_3 - z_4 =$

$3(\alpha x_1 + \beta y_1) - 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) - (\alpha x_4 + \beta y_4) =$

$= \alpha \underbrace{(3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)}_{=0 \text{ då } x \in V} + \beta \underbrace{(3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4)}_{=0 \text{ då } y \in V} = 0$

så $\alpha x + \beta y \in V$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in V \Rightarrow V$ är underrum (därmed också affin mängd)

(c) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = s\underbrace{(2,3,4,5)}_{=:u} + t\underbrace{(6,7,8,9)}_{=:v}, \; s, t \in \mathbb{R}\}$

Lösning: Låt $x = s_x u + t_x v$, $y = s_y u + t_y v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Då gäller $\alpha x + \beta y = \alpha s_x u + \alpha t_x v + \beta s_y u + \beta t_y v =$

$= \underbrace{(\alpha s_x + \beta s_y)}_{\text{reellt tal}} u + \underbrace{(\alpha t_x + \beta t_y)}_{\text{reellt tal}} v \in V. \Rightarrow V$ underrum (och affin mängd).

(e) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (1,2,0,1) + t(0,1,2,2), \; t \in \mathbb{R}\}$

Lösning: Tag $x = y = (1,2,0,1) \in V$, $\alpha = \beta = 1$. Vi får
$\alpha x + \beta y = (2,4,0,2) \notin V$ (alla element i V har 1:a komponent 1)
$\Rightarrow V$ är ej underrum.
Däremot är $W := \{x \in \mathbb{R}^4 : x = t(0,1,2,2), \; t \in \mathbb{R}\}$
ett underrum (kontrollera att $\alpha x + \beta y \in W$ om $x, y \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
och varje element i V kan skrivas som $(1,2,0,1) + w$
där $w \in W$. Alltså är V en affin mängd.

(g) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

Lösning: Eftersom x_1, x_2 är reella tal kan vi skriva V som
$\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = 0\}$. Låt $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och bilda
$z = \alpha x + \beta y$. Då gäller $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$
och $z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ så $z \in V$. $\Rightarrow V$ är underrum.

Lana 13 Demo 1 (5)

1.10 Är M underrum till V i följande fall:

(a) $V = C(\mathbb{R})$, $M = \{f \in V : f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Lösning Låt $f, g \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h = \alpha f + \beta g$. Då gäller

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = h(-x) \Rightarrow h \in M \Rightarrow M \text{ underrum.}$$

(c) $V = C([0,1])$, $M = \{f \in V : f(0) = 1\}$

Lösning Tag $f \in V$, $\alpha = 2$. Vi får $\alpha f(0) = 2 \cdot 1 = 2$ så $\alpha f \notin M$
$\Rightarrow$ M ej underrum.

(e) $V = C([a,b])$, $M = \{f \in V : f(a) = f(b)\}$.

Lösning $f, g \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h = \alpha f + \beta g$. Då gäller

$$h(a) = \alpha f(a) + \beta g(a) = \alpha f(b) + \beta g(b) = h(b) \Rightarrow h \in M \Rightarrow M \text{ underrum.}$$

(g) $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $M = \{A \in V : \operatorname{sp} A = 0\}$.

Lösning Spåret av en matris definieras som summan av diagonalelementen, dvs $\operatorname{sp} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Låt $A, B \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$\operatorname{sp}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \operatorname{sp} A + \beta \operatorname{sp} B = 0$$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in M \Rightarrow$ M underrum.

(i) $V = C(\mathbb{R})$, $M = \{f \in V : \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx < \infty\}$.

Lösning En nyttig olikhet:

$$\left.\begin{aligned} 2ab &= a^2 + b^2 - (a-b)^2 \le a^2 + b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \end{aligned}\right\} \Rightarrow (a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2 \quad (*)$$

Låt $f, g \in M$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Låt $h = \alpha f + \beta g$. Då gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))^2 e^{-x^2} dx \le \int_{-\infty}^{\infty} (2\alpha^2 f(x)^2 + 2\beta^2 g(x)^2) e^{-x^2} dx$$

$$\le \underbrace{2 \max\{\alpha^2, \beta^2\}}_{<\infty} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 e^{-x^2} dx}_{<\infty} \Big) < \infty$$

så $h \in M \Rightarrow$ M underrum.

Lana 2013 - Demo 1 ⑥

1.11. Finn gemensamma punkter för de affina mängderna (x sådana att)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 75,\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 50,\\
-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 25.
\end{aligned}
$$

Lösning. Vi repeterar Gausselimination! Utökad matris:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 50 \\ -4 & 3 & 2 & -4 & 25 \end{array}\right) \boxed{-1}\ \boxed{+2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & -25 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & 175 \end{array}\right) \times \tfrac{1}{5}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & -25 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 35 \end{array}\right) \boxed{-2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & -25 \\ 0 & -1 & -5 & -13 & 125 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 35 \end{array}\right) \boxed{1} \times(-1) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & -25 \\ 0 & 1 & 5 & 13 & -125 \\ 0 & 0 & -5 & -15 & 160 \end{array}\right) \times\left(-\tfrac{1}{5}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & -25 \\ 0 & 1 & 5 & 13 & -125 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -32 \end{array}\right)
$$

Inför parametrisering $x_4 = t$:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & -25 \\ 0 & 1 & 5 & 13 & -125 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \boxed{-3}\ \boxed{-13}\ \boxed{-5} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -25-5t \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -125-13t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \boxed{-5}\ \boxed{-2}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -39+t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -4-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)
$$

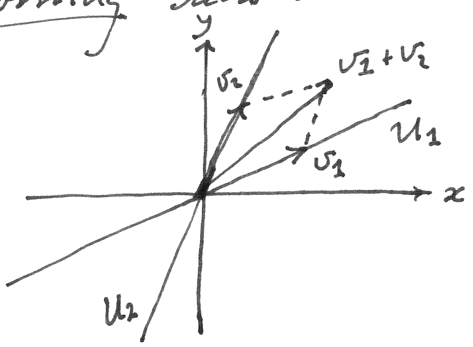
$\therefore$ De sökta punkterna är

$$
x \in \mathbb{R}^4 : \quad x = \begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ -32 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Lana 2013 - Demo 2 (1)

1.29 Låt U_1, U_2 vara underrum till V sådana att det existerar $v_1 \in U_1$ men $v_1 \notin U_2$ och $v_2 \in U_2$ men $v_2 \notin U_1$.
Visa att $U_1 \cup U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \text{ eller } v \in U_2\}$ inte är ett underrum till V.

Lösning: Skiss i $\mathbb{R}^2$:



Vi ser i denna skiss att $v_1 + v_2 \notin U_1 \cup U_2$ även om såväl v_1 som $v_2 \in U_1 \cup U_2$.

I allmänhet kan vi visa att $v_1 + v_2 \notin U_1 \cup U_2$ genom motsägelse:

Antag att $v_1 + v_2 \in U_1$. Eftersom U_1 är ett vektorrum och $v_1 \in U_1$ så gäller även $-v_1 \in U_1$ så att $v_1 + v_2 + (-v_1) \in U_1$, men $v_1 + v_2 + (-v_1) = v_2 \notin U_1$. Motsägelse! Slutsats: $v_1 + v_2 \notin U_1$.
Antar vi att $v_1 + v_2 \in U_2$ kan vi på samma sätt få $v_1 \in U_2$, vilket ~~ger~~ ger en motsägelse som ger $v_1 + v_2 \notin U_2$.
$v_1 + v_2 \notin U_1, U_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \notin U_1 \cup U_2$, men $v_1, v_2 \in U_1 \cup U_2$ så $U_1 \cup U_2$ kan inte vara ett underrum.

1.33 Bestäm en matris A som har det givna värderummet:

(a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2s + 3t \\ r + s - 2t \\ 4r + s \\ 3r - s - t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

(b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} b - c \\ 2b + c + d \\ 5c - 4d \\ d \end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Lana 13 – Demo 2 (2)

1.34 Sök matris A som har det givna nollrummet:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ s-t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$. ~~$\forall s, t \in \mathbb{R}$~~

Lösning $\forall s, t \in \mathbb{R}$ $\quad A \begin{pmatrix} t \\ s \\ s-t \end{pmatrix} = 0$

Skriv $A = (a_1, a_2, a_3)$. $\quad (a_1, a_2 \; a_3) \begin{pmatrix} t \\ s \\ s-t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \quad t a_1 + s a_2 + (s-t) a_3 = 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad t(a_1 - a_3) + s(a_2 + a_3) = 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad a_3 = a_1, \quad a_2 = -a_3 = -a_1$

dvs. $A = (a_1 \quad -a_1 \quad a_1)$ för vilken vektor a_1 som tillåt $\neq 0$.

t. ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t+u \\ -s \\ s-u \end{pmatrix} : s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösning $\forall s, t, u \in \mathbb{R}$ $\quad A \begin{pmatrix} t \\ t+u \\ -s \\ s-u \end{pmatrix} = 0$

Skriv $A = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)$.

Vi får $\quad t a_1 + (t+u) a_2 - s a_3 + (s-u) a_4 = 0$

$s(-a_3 + a_4) + t(a_1 + a_2) + u(a_2 - a_4) = 0 \quad \forall s, t, u \in \mathbb{R}$.

så $-a_3 + a_4 = 0, \quad a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 - a_4 = 0$

vilket ger $\quad a_2 = -a_1, \quad a_4 = a_2 = -a_1, \quad a_3 = a_4 = -a_1$

så $A = (a_1 \quad -a_1 \quad -a_1 \quad -a_1)$ för godtycklig vektor $a_1 \neq 0$

har önskat nollrum.

Ex: $A = (1 \quad -1 \quad -1 \quad -1)$ eller $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Lana 2013 – Demo 2 (3)

1.36 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

(a) Finns någon gemensam vektor i $N(A)$ och $N(B)$ (utöver 0)?

$A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Parametrisera $x_3 = s$, $x_4 = t$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & t \\ & 1 & & & -s-2t \\ & & 1 & & s \\ & & & 1 & t \end{array}\right)$$

ger nollrum $N(A) = \left\{ s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

$B \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Med samma parametrisering som för A:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -2s+3t \\ & 1 & & & -3t \\ & & 1 & & s \\ & & & 1 & t \end{array}\right)$$

ger $N(B) = \left\{ s\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

Gemensamma icke-triviala vektorer finns om basvektorerna för $N(A)$ och $N(B)$ är linjärt beroende, dvs om matrisen $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

är radekvivalent med en matris med en nollrad, men

$$C \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så enda gemensamma vektorn är 0.

Lana 2013 – Demo 2 4

1.36 (b) Finns någon gemensam vektor i $V(A)$ och $V(B)$ (utöver 0)?

Lösning Söker baser för $V(A)$ och $V(B)$ genom kolonnoperationer:

$$A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kolonn-} \\ \text{ekvivalent}}}{\overset{KE}{\sim}} \cdots \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(A) = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B \overset{KE}{\sim} \cdots \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(B) = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Totalt innehåller baserna för $V(A)$ och $V(B)$ fyra vektorer i $\mathbb{R}^3$, men inte fler än tre vektorer kan vara linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$, alltså finns gemensamma vektorer.

(Hur hittar man dem? $V(A)$, $V(B)$ beskriver plan i rummet. Finn skärningslinjen mellan dessa plan.)

1.41 Vilka av avbildningarna, $T_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, är linjära?

$$T_1(x) = (x_1^2, x_2)$$
$$T_2(x) = (x_1 + x_2, x_1)$$
$$T_3(x) = (x_1, 1).$$

Lösning Undersök huruvida $T_i(\alpha x + \beta y) = \alpha T_i(x) + \beta T_i(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

T_1 är knappast linjär. Tag t.ex. någon vektor x sådan att $x_1 \neq 0$ och bilda $2x$. Vi får $T_1(2x) = ((2x_1)^2, 2x_2) = (4x_1^2, 2x_2)$ medan $2T_1(x) = 2(x_1^2, x_2) = (2x_1^2, 2x_2) \neq T_1(2x)$.

T_2: $T_2(\alpha x + \beta y) = ((\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2), \alpha x_1 + \beta y_1) =$
$$= \alpha(x_1 + x_2, x_1) + \beta(y_1 + y_2, y_1) = \alpha T_2(x) + \beta T_2(y)$$
$\Rightarrow T_2$ är linjär.

T_3: Tag någon vektor x och bilda $2x$:
$T_3(2x) = (2x_1, 1)$ medan $2T_3(x) = 2(x_1, 1) = (2x_1, 2) \neq T_3(2x)$.
$\Rightarrow T_3$ är ej linjär.

Lana 2013 - Demo 2 (5)

1.42 Visa att mängden $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ av alla linjära avbildningar från ett vektorrum $\mathcal{U}$ till ett vektorrum $\mathcal{V}$ i sig bildar ett vektorrum med operationer

$$(F_1 \oplus F_2)(u) = F_1(u) + F_2(u) \quad \text{operationer i } \mathcal{V}$$

operationer i $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$

$$(\alpha \odot F)(u) = \alpha F(u)$$

$u \in \mathcal{U}$, $F, F_1, F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

Lösning Vi kontrollerar kriterier (1) - (10) i definition 1.1. (Särskilt viktiga är (1) och (2)).

(1): Visa att $F_1 \oplus F_2$ är en linjär avbildning från $\mathcal{U}$ till $\mathcal{V}$!

Låt $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vi har att visa

$$(F_1 \oplus F_2)(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha (F_1 \oplus F_2)(u_1) + \beta (F_1 \oplus F_2)(u_2).$$

$$\begin{aligned}(F_1 \oplus F_2)(\alpha u_1 + \beta u_2) &= F_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + F_2(\alpha u_1 + \beta u_2) \\ &= \alpha F_1(u_1) + \beta F_1(u_2) + \alpha F_2(u_1) + \beta F_2(u_2) \\ &= \alpha\big(F_1(u_1) + F_2(u_1)\big) + \beta\big(F_1(u_2) + F_2(u_2)\big) \\ &= \alpha (F_1 \oplus F_2)(u_1) + \beta (F_1 \oplus F_2)(u_2).\end{aligned}$$

OK.

(2) Visa att $\alpha \odot F$ är en linjär avbildning från $\mathcal{U}$ till $\mathcal{V}$.

Låt $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha \odot F)(\beta u_1 + \gamma u_2) = \alpha F(\beta u_1 + \gamma u_2) = \alpha \beta F(u_1) + \alpha \gamma F(u_2)$$
$$= \beta \alpha F(u_1) + \gamma \alpha F(u_2) = \beta (\alpha \odot F)(u_1) + \gamma (\alpha \odot F)(u_2).$$

OK.

(3) - (10) är uppfyllda på samma sätt som för funktioner definierade på ett intervall (se exempel 1.1. d), och kontrolleras lätt.

Ex: (3) $F_1 \oplus F_2 = F_2 \oplus F_1$ ty för alla $u \in \mathcal{U}$ gäller

$$(F_1 \oplus F_2)(u) = F_1(u) + F_2(u) = F_2(u) + F_1(u) = (F_2 \oplus F_1)(u).$$

Lana 2013 – Demo 2 (6)

1.44 Linjär avbildning $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ med

$$T(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2,\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3).$$

(a) Visa att T är linjär.

Lösning: Vi börjar med en omskrivning. Man kan se att $T(x) = Ax$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

därför följer linjäritet hos T direkt från linjäritet hos matrismultiplikation.

(b) Visa att $N(T)$ är en rät linje och bestäm dess ekvation.

Lösning $T(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ så $N(T) = N(A)$.

$A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Parametrisering $x_3 = t$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & -2t/3 \\ & 1 & & -4t/3 \\ & & 1 & t \end{array}\right)$$

dvs. $N(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ Vilket är en linje med just denna ekvation (på parameterform)

(c) Visa att $V(T)$ är ett plan och finn dess ekvation.

Lösning Vi har $V(T) = V(A)$ och $A \overset{KE}{\sim} \dots \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

dvs. $V(A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$, vilket är ett plan med just denna ekvation (på parameterform).

(d) Bestäm alla urbilder till $(3,2,1)$ resp. $(2,1,3)$.
(dvs. finn alla x s.a. $T(x) = (3,2,1)$ ~~resp.~~ $(2,1,3)$.)

~~Lösning Då T är linjär gäller att samtliga lösningar till ekvationen $T(x) = y$ kan skrivas som $x_p + x_h$ där $T(x_h) = 0$ och x_p är något element som uppfyller $T(x_p) = y$ (superpositionsprincipen).~~
~~Man kan ganska lätt se att $T((1,0,1)) = (3,2,1)$~~
~~och $T($~~

Lösning Vi har att lösa $Ax = y$, där $y = (3,2,1)$ resp. $(2,1,3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så att $x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ uppfyller $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

medan $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ saknar lösning! så inga $x \in \mathbb{R}^3$ har $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lama 2013 – Demo 2 (7)

1.47 $T: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ med $T(A) = A + A^T$.

(a) Visa att T är linjär.

Lösning: Låt $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha A_1 + \beta A_2 + (\alpha A_1 + \beta A_2)^T = \alpha A_1 + \beta A_2 + \alpha A_1^T + \beta A_2^T$$
$$= \alpha(A_1 + A_2^T) + \beta(A_1 + A_2^T) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2).$$

(b) Låt $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara symmetrisk. Vi söker $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sådan att $T(A) = B$.

Lösning: Då B är symmetrisk kan vi skriva

$$B = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}B^T = \tfrac{1}{2}B + \left(\tfrac{1}{2}B\right)^T = T\left(\tfrac{1}{2}B\right)$$

så vi kan ta $A = \frac{1}{2}B$. (Finns fler möjligheter..)

(c) Beskriv nollrummet $N(T)$.

Lösning: Vi söker karakterisera A sådana att $T(A) = 0$.
Men $T(A) = A + A^T = 0 \iff A^T = -A$ så
$N(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = -A\}$. Sådana matriser kallas skevsymmetriska. Exempel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Notera att $a_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ eftersom $A^T = -A \implies a_{ii} = -a_{ii}$ då A och A^T har samma diagonalelement.

(d) Visa att värderummet $V(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T\} =: S^{n\times n}$ dvs. alla symmetriska matriser.

Lösning: 1) Visa $V(T) \subseteq S^{n\times n}$ (dvs. alla element i $V(T)$ är symmetriska)
2) Visa $V(T) \supseteq S^{n\times n}$ (dvs. varje symmetrisk matris kan fås som bild ~~genom~~ T).

1) Det gäller för alla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ att $T(A) = A + A^T = \cancel{\ldots}$
$= (A^T)^T + A^T = (A^T + A)^T = (A + A^T)^T = T(A)^T$
så alla element i $V(A)$ är symmetriska.

2) Detta var precis det som gjordes i (b).

Lana 2013 Demo 3 (1)

1.16 Vilka mängder M är linjärt oberoende?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & -11 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ linjärt oberoende.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ linjärt ober.

1.17 Visa att $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas i $\mathbb{R}^4$ och bestäm koordinater för $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i denna bas.

Lösning. För att dessa vektorer ska utgöra en bas räcker det att de är linjärt oberoende:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koordinater för vektor $(1,1,1,1)$ är tal (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Löser vi detta så får vi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Vilket man kanske ganska raskt inser...)

Kava 2013 Demo 3 ②

1.18 Bestäm dimension för de underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna:

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix}1&4&3\\1&2&1\\1&-2&-3\\1&-3&-4\end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&6&0\\1&7&0\end{pmatrix}$

två linj. ober.

$\Rightarrow$ Dimension $= 2$.

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\2&2&1\\1&4&-1\end{pmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$

två linj. ober.

$\Rightarrow$ dimension $= 2$

1.21 Vektorer $v_1, v_2, \dots, v_k$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. Vilken dimension har underrummet som spänns upp av
$\underbrace{v_1 - v_2}_{u_1}, \underbrace{v_2 - v_3}_{u_2}, \dots, \underbrace{v_{k-1} - v_k}_{u_{k-1}}, \underbrace{v_k - v_1}_{u_k}$?

Lösning Observera att $u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + u_k = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \dots + v_{k-1} - v_k + v_k - v_1 = 0$, dvs. $u_1, u_2, \dots, u_k$ är linjärt beroende. Därmed gäller $d := \dim \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\} < k$.

Betrakta ekvationen $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} = 0$ (obs! vi har utelämnat u_k)

Vi har

$$\alpha_1(v_1 - v_2) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \dots + \alpha_{k-1}(v_{k-1} - v_k) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)v_2 + \dots + (\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2})v_{k-1} - \alpha_{k-1} v_k = 0$$

och eftersom $v_1, \dots, v_k$ är linjärt oberoende så kräver detta att

$$\alpha_1 = 0,$$
$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = 0, \quad j = 1, \dots, k-2$$
$$\alpha_{k-1} = 0$$

med, enda lösning $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$.

Vilket visar att $u_1, \dots, u_{k-1}$ är linjärt oberoende, så att $d = \dim \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\} \geq k-1$. Vi har $k-1 \leq d < k$ så $\underline{\underline{d = k-1}}$.

Lana 2013 Demo 3 ③

1.23 ~~(a)~~ Visa att de givna funktionerna är linjärt oberoende.

(a) $\underbrace{\sin 2t}_{f_1}$, $\underbrace{\cos 2t}_{f_2}$, $\underbrace{\sin^2 t}_{f_3}$, $\underbrace{\cos^2 t}_{f_4}$

Lösning Vi kan att finna en icke-trivial lösning till

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i f_i(t) = 0 \quad (\forall t).$$

Man kan dra sig till minnes "dubbla vinkeln" formeln:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \iff \cos 2t - \cos^2 t + \sin^2 t = 0$$

så en icke-trivial lösning är $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = -1$.

(b) $f_1(t) = \ln(t^6+1)$, $f_2(t) = \ln(t^4 - t^2 + 1)$, $f_3(t) = \ln(t^2+1)$.

Lösning: Notera att $(t^2+1)(t^4-t^2+1) = t^6 - t^4 + t^2 + t^4 - t^2 + 1 = t^6 + 1$

så att $\ln(t^4 - t^2 + 1) + \ln(t^2+1) = \ln(t^6+1)$

dvs. $f_2(t) + f_3(t) = f_1(t)$ $\forall t$. Därmed är funktionerna linjärt beroende.

(c) $f_1(t) = \sin(t+\alpha)$, $f_2(t) = \sin(t+\beta)$, $f_3(t) = \sin(3+\gamma)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Lösning Vi vill visa att $\sum_{i=1}^{3} c_i f_i(t) = 0$ $\forall t$ har icke-triviala lösn.

Vi får $\sum_{i=1}^{3} c_i f_i(t) = 0 \;\forall t \iff c_1 \underbrace{\sin(t+\alpha)}_{= \sin t \cos\alpha + \cos t \sin\alpha} + c_2 \sin(t+\beta) + c_3 \sin(t+\gamma) = 0 \;\forall t$

$$\Rightarrow (c_1 \cos\alpha + c_2 \cos\beta + c_3 \cos\gamma)\sin t + (c_1 \sin\alpha + c_2 \sin\beta + c_3 \sin\gamma)\cos t = 0 \;\forall t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Men detta system är underbestämt oavsett α, β, γ, så icke-triviala lösningar finns.

Lana 2013 Demo 3 (4)

1.28 $U_1 = \text{span}\{\overbrace{(1,2,0,1)}^{v_1}, \overbrace{(1,1,1,0)}^{v_2}\}$, $U_2 = \text{span}\{\overbrace{(1,0,1,0)}^{v_3}, \overbrace{(1,3,0,1)}^{v_4}\}$, underrum till $\mathbb{R}^4$. Sök dimension för

$$U_1 + U_2 := \{x + y : x \in U_1, y \in U_2\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_4\} \text{ och}$$

$$U_1 \cap U_2 := \{x : x \in U_1 \text{ och } x \in U_2\}.$$

Lösning: Låt $A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$. Då gäller att

$V(A) = U_1 + U_2$ och ~~därmed~~ $\dim(U_1 + U_2) = \dim V(A)$.

$$A \overset{KE}{\sim} \dots \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ så $\dim V(A) = \underline{\underline{3}}$.

Till $\dim U_1 \cap U_2$. Antag $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists\, t_1, t_2, t_3, t_4$:

$$x = t_1 v_1 + t_2 v_2 \quad \text{och} \quad x = t_3 v_3 + t_4 v_4$$

dvs. $0 = t_1 v_1 + t_2 v_2 - t_3 v_3 - t_4 v_4 = A \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_3 \\ -t_4 \end{pmatrix}$ dvs. $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_3 \\ -t_4 \end{pmatrix} \in N(A)$

så $\dim U_1 \cap U_2 = \dim N(A) = \{\text{dimensionssatsen: } \dim N(A) + \dim V(A) = n \text{ i } \mathbb{R}^4\}$

$$= 4 - \dim V(A) = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}.$$

1.31(a) Sök bas för $N(A)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi löser $Ax = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parametrisera $x_3 = s$, $x_4 = t$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2s-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -s-2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Så $N(A) = \left\{ s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$ med bas $(-2, -1, 1, 0)$, $(-1, -2, 0, 1)$. (t. ex.)

1.32(a) Sök bas till $V(A)$ för samma A som i 1.31 a.

$$A \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

här har vi en bas.

Lana 2013 Demo 3 5

1.38(a) Söker rang(A), $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösning rang(A) = dim V(A) och

$$A \overset{KE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Därmed rang(A) = 2.

Reserv Additiv invers är entydig:

Låt V vara ett vektorrum, $u \in V$. Vi vet att $-u \in V$.

Antag $v \in V$ med $u + v = 0$. Vi har att visa att $v = -u$.

Utgå från $u + v = 0$.

$-u \in V$ så

$$\begin{aligned} u + v + (-u) &= 0 + (-u) && \text{(axiom 1)} \\ u + (-u) + v &= (-u) && \text{(axiom 3, 5)} \\ 0 + v &= (-u) && \text{(axiom 6)} \\ v &= (-u) && \text{(axiom 5)}. \end{aligned}$$

Här är vi klara.

Lana 2013 Demo 4 (1)

1.49 $T: V \longrightarrow W$ linjär och $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linjärt ~~oberoende~~ i V.
Visa att $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ är linjärt beroende.

Lösning Vi vill hitta icke-trivial lösning till

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_p T(v_p) = 0.$$

Eftersom $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är linjärt beroende kan vi välja $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ så att $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ men $\alpha_i \neq 0$ för något i (dvs. icke-trivialt). För just dessa $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ har vi

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_p T(v_p) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linjär}}}{=} T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p) = T(0) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linjär}}}{=} 0,$$

dvs. vår sökta icke-triviala lösning.

1.50 $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(2,1,1), (2,-1,1), (1,2,1)\}$;
$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(3,1,-5), (1,1,-3), (-1,0,2)\}$;
är baser i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm övergångsmatris $T_{V \leftarrow U}$, dvs. sådan att $[x]_V = T_{V\leftarrow U}[x]_U$.
Man kan visa att (se komp. kap. 1.8)

$$U = V T_{V \leftarrow U}, \text{ dvs. } T_{V\leftarrow U} = V^{-1} U$$

$$U = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

$$(V \mid U) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

där $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = T_{V\leftarrow U}$

(b) Låt $w = (-5, 8, -5)$ (~~standardbas~~).
Vi söker $[w]_U$ och $[w]_V$:

$$U[w]_U = w \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^U \\ w_2^U \\ w_3^U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow [w]_U = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$[w]_V = T_{V\leftarrow U} [w]_U = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 23/2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Lana 2013 Demo 4 (2)

1.52 $\mathcal{B} = \{(3,-1,4),\ (2,0,-5),\ (8,-2,7)\}$ bas i $\mathbb{R}^3$.

(a) Söker basbytesmatris $T_{E\leftarrow\mathcal{B}}$ (E standardbasen).

Som tidigare: $T_{E\leftarrow B} = E^{-1}B = I^{-1}B = IB = B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

(b) Söker basbytesmatris $T_{B\leftarrow E}$.

I allmänhet gäller $T_{B_1\leftarrow B_2} = T_{B_2\leftarrow B_1}^{-1}$, så här får vi

$T_{B\leftarrow E} = T_{E\leftarrow B}^{-1} = B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -10/8 & -54/8 & -4/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & -11/8 & -2/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & 23/8 & 2/8 \end{array}\right)$$

(c) Söker koordinater för $x = (1, 2, 1)$ i basen $\mathcal{B}$.

$$[x]_{\mathcal{B}} = T_{B\leftarrow E}\,x = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -10 & -54 & -4 \\ -1 & -11 & -2 \\ 5 & 23 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -122 \\ -25 \\ 53 \end{pmatrix}$$

1.55 (a) $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ och $\mathcal{E}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ baser för ett linjärt rum V ~~av dim~~ ($\dim V = 3$)

Uttryck koordinater ~~för~~ (x_1', x_2', x_3') i bas $\mathcal{E}'$ i termer av (x_1, x_2, x_3) i bas $\mathcal{E}$ om

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_2' = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e_3' = 2e_1 + 3e_2 \end{cases}$$

Lösning: $\underline{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3} = x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3'$

$= x_1'(e_1 + e_2 + 3e_3) + x_2'(2e_1 + 3e_2 + e_3) + x_3'(2e_1 + 3e_2)$

$= \underline{(x_1' + 2x_2' + 2x_3')e_1} + \underline{(x_1' + 3x_2' + 3x_3')e_2} + \underline{(3x_1' + x_2')e_3}$

dvs.
$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \\ x_2 = x_1' + 3x_2' + 3x_3' \\ x_3 = 3x_1' + x_2' \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lana 2013 Demo 4 (3)

1.59 Matris $A \in \mathbb{R}^{3\times 8}$, rang$(A) = 3$. Vi söker dim $N(A)$, dim Row(A) samt rang(A^T).

Lösning Vi tillämpar diverse satser!

Dimensionssatsen: $A^{m\times n} \Rightarrow \dim N(A) + \underbrace{\dim V(A)}_{= \text{rang}(A) \text{ (per def.)}} = n$

Dvs. $\dim N(A) + 3 = 8 \Rightarrow \dim N(A) = 5$.

Rangsatsen: Kolonnrang (dim $V(A)$) = radrang (dim Row(A))

så $\dim \text{Row}(A) = 3$

Slutligen: $\text{rang}(A^T) = \dim V(A^T) = \dim \text{Row}(A) = 3$

1.60 i) $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$.

Vad är största möjliga rang(A)?

$$\text{rang}(A) = \underbrace{\dim V(A)}_{\leq 5} = \underbrace{\dim \text{Row}(A)}_{\leq 7} \leq 5$$

ii) Samma fråga om $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$.

$$\text{rang}(A) = \underbrace{\dim(V(A))}_{\leq 7} = \underbrace{\dim \text{Row}(A)}_{\leq 5} \leq 5$$

iii) $A \in \mathbb{R}^{6\times 8}$. Vad är minsta möjliga värde på dim $N(A)$?

$\dim N(A) = 8 - \text{rang}(A)$ (Dim.-satsen)

$\text{rang}(A) \leq 6$ (som ovan)

$\Rightarrow \dim N(A) \geq 8 - 6 = 2$.

1.61 Visa att om $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \neq 0$ så gäller rang$(uv^T) = 1$.

Låt $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Vi kan då skriva

$$uv^T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 u & v_2 u & \cdots & v_n u \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

dvs. samtliga kolonner i uv^T är multiplar av vektorn $u \neq 0$.

$\Rightarrow \text{rang}(uv^T) = \dim V(uv^T) = 1$. □

Lana 2013 Demo 4 (4)

9.1 Lös ekvationssystemen dels med och dels utan pivotering! Avrunda mellanresultat till 3 siffror.

(a) $$\begin{pmatrix} 0.02 & 1 \\ 1 & 0.02 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utan pivotering:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 1 & 0.02 & 1 \end{array}\right) \boxed{-50} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{}{\underset{-50}{\cancel{-49.98}}} & -49 \end{array}\right) \times -\frac{1}{50} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.02 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right) \times \frac{1}{0.02} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right) \quad \text{dvs. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.980 \end{pmatrix}$$

Med pivotering:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 1 & 0.02 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.02 & 1 \\ 0.02 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{-0.02} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.02 & 1 \\ 0 & \underset{1.00}{\cancel{0.9996}} & 0.98 \end{array}\right) \boxed{-0.02} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \overset{0.98}{\cancel{0.9804}} \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right)$$

$$\text{dvs. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.980 \\ 0.980 \end{pmatrix}. \qquad \left(\text{"Exakt": } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.9804 \\ 0.9804 \end{pmatrix}\right)$$

(b) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utan pivotering: Går inte!

Med pivotering:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{-3} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \times \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.500 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{dvs. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.500 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(stämmer exakt)}$$

Lana 2013 Demo 4 5

9.3 LU-faktorisera utan pivotering $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \boxed{+1}\ \boxed{-4}\ \boxed{+2} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \boxed{-5}\ \boxed{+1}$$

$\Downarrow$

samma operationer ska omvandla l_1 till $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ samma operationer ska omvandla l_2 till $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi gör inga operationer på rad 3 resp. 4, motsvaras $l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $l_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi får $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Man kan kontrollera genom att beräkna $LU \stackrel{?}{=} A$.

Lana 2013 Demo 5 ①

9.6 Lös m.h.a. LU-faktorisering utan pivotering:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Att lösa $Ax = b$ m.h.a. LU-faktorisering:

1. Faktorisera $A = LU$
2. Lös $Ly = b$ (framåtsubstitution: $y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$)
3. Lös $Ux = y$ (bakåtsubstitution: $x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$)

1) $$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{+1} & \boxed{-2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix} \boxed{+5} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= -7 \\ y_2 &= 5 + y_1 = -2 \\ y_3 &= 2 - 2y_1 + 5y_2 = 6 \end{aligned}$$

3) $$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{(-1)} \cdot 6 = -6 \\ x_2 &= \frac{1}{(-2)}(-2 + x_3) = 4 \\ x_1 &= \frac{1}{3}(-7 + 7x_2 + 2x_3) = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Lana 2013 Demo 5 (2)

9.8 Visa att $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ inte kan LU-faktoriseras utan pivotering samt finn LU-faktorisering med pivotering.

Lösning Antag att $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} \end{pmatrix}$

Då får vi $u_{11} = 0$ $\quad u_{12} = 1$

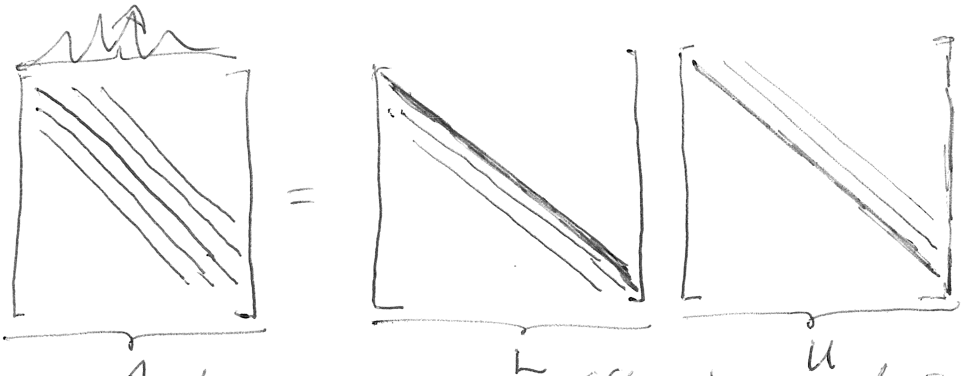
$l_{21}u_{11} = 1 \quad l_{21}u_{12} + u_{22} = 0$,

men detta kan inte lösas ($u_{11} = 0$ men $l_{21}u_{11} = 1$), så LU-faktorisering utan pivotering saknas.

Efter pivotering får vi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$.

9.10 ~~Ett~~ Ett datorprogram löser m.h.a. Gausselimination ett tridiagonalt system med 300 obekanta på 3 sekunder. Hur lång tid skulle det ta att lösa ett tridiagonalt system med 30 000 obekanta?

Lösning Skiss:



Vi räknar hur många flyttalsoperationer (flops) som krävs för att lösa ett system med n obekanta:

LU-faktorisering: Begränsat (oberoende av n) antal operationer per rad, n rader $\Rightarrow O(n)$

Framåtsubstitution: ——— " ———

Bakåtsubstitution: ——— " ———

Totalt $O(n)$ flops, dvs. $t(n) \approx Cn$, C konstant i beräkningstid.

$t(300) = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{100}$ så $t(30000) = \frac{1}{100} \cdot 30\,000 = \underline{\underline{300 \text{ s.}}}$

Lana 2013 Demo 5 (3)

9.12 Hur kan man effektivt lösa

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ B & L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

obekanta givna

för L_1, L_2 nedåt triangulära, icke singulära?

Lösning Vi "utveckla" systemet. (Vi vill undvika att invertera hela matrisen!)

$$\begin{cases} L_1 x + 0y = b \\ Bx + L_2 y = c \end{cases}$$

Notera att $L_1 x = b$ kan lösas separat med framåtsubstitution samt att $L_2 y = c - Bx$ kan lösas på samma sätt för känt x. Dvs. algoritm:

1. Lös $L_1 x = b$ med framåtsubstitution
2. ~~Beräkna~~ $z = c - Bx$.
3. Lös $L_2 y = z$ med framåtsubstitution.

9.16 Låt ε uppfylla $0 < |\varepsilon| \ll 1$. Vi har då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \text{ med } A^{-1} \frac{1}{2\varepsilon + \varepsilon^2}\begin{pmatrix} -1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill lösa $Ax = b$, $b = (\sqrt{3}, 2)$ där b beräknas med ett fel $\|\delta b\|_\infty$. Ange en övre gräns för $\|\delta b\|_\infty$ om vi vill att relativt felet i lösningen (i ∞-norm) ej får överskrida $0.5 \cdot 10^{-4}$.

Lösning: Felfortplantningsformel som gäller är

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}}_{\text{relativt fel}} \le \kappa(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \quad \text{där } \kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$$\|b\|_\infty = 2, \quad \|A\|_\infty = |1| + |1+\varepsilon| \le 2 + |\varepsilon| \approx 2$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \left|\frac{1}{2\varepsilon + \varepsilon^2}\right| (|-1| + |1+\varepsilon|) \le \frac{2 + |\varepsilon|}{2|\varepsilon| - |\varepsilon|^2} \approx \frac{1}{|\varepsilon|}$$

så $$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \lesssim 2 \cdot \frac{1}{|\varepsilon|} \cdot \frac{\|\delta b\|_\infty}{2} = \frac{\|\delta b\|_\infty}{|\varepsilon|}$$

Lana 2013 Demo 5 (4)

9.16 (forts.) Vi vill alltså ha $\frac{\|\delta b\|_\infty}{|\varepsilon|} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\delta b\|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-4} |\varepsilon|$

så, t.ex. om $|\varepsilon| = 10^{-2}$ eller $|\varepsilon| = 10^{-4}$ krävs $\|\delta b\|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-6}$ resp. $0.5 \cdot 10^{-8}$, dvs. 6 resp. 8 korrekta decimaler.

9.18 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.001 & 1 \end{pmatrix}$. Hur noggrant måste π beräknas (antal decimaler) för att $Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ \pi \end{pmatrix}$ ska kunna lösas med $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 0.5 \cdot 10^{-6}$?

Lösning Vi använder åter $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \|\delta b\|_\infty$

Vi har $\|A\|_\infty = 2.001$, $\|b\|_\infty = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - 1.001} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1.001 & 1 \end{pmatrix} = 1000 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1.001 & -1 \end{pmatrix}$$

så $\|A^{-1}\|_\infty = 1000 \cdot 2.001 = 2001$

dvs. $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{2.001 \cdot 2001}{4} \|\delta b\|_\infty \approx 1000 \|\delta b\|_\infty$

Vi kräver alltså $1000 \|\delta b\|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \|\delta b\|_\infty \leq 0.5 \cdot 10^{-9}$, alltså 9 korrekta decimaler.

Lana 2013 Demo 5 (5)

2.1 Bestäm $\cos v$ för vinkeln v mellan $p(t) = 3t+1$ och $g(t) = 5t^2+3$ i P_2 med skalärprodukt
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Lösning "Vinkel" definieras utifrån sambandet
$$\langle f, g\rangle = \|f\|\|g\| \cos v \quad , \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

I vårt fall: $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1}(3t+1)(5t^2+3)\,dt = \frac{28}{3}$

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = \left(\int_{-1}^{1}(3t+1)^2 dt\right)^{1/2} = \sqrt{8}$$

$$\|q\| = \sqrt{\langle q, q\rangle} = \left(\int_{-1}^{1}(5t^2+3)\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{48}$$

$$\text{så} \quad \cos v = \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|\|g\|} = \frac{28/3}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{48}} = \frac{7}{6\sqrt{6}}.$$

2.3 För vilka $a \in \mathbb{R}$ är $(a, 1, 1)$ och $(a, 1, a)$ ortogonala m.a.p. $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ i $\mathbb{R}^3$?

Lösning $(a, 1, 1) \perp (a, 1, a) \iff \langle (a, 1, 1), (a, 1, a)\rangle = 0$

dvs. $a^2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3a = 0 \implies a = -1$ resp. $a = -2$

Lana 2013 Demo 5 ⑥

2.5 Är någon av dessa ~~formler~~ skalärprodukter på $C^1([a,b])$?

I. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)\,dt$

II. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)\,dt + f(a)g(a)$

Lösning Kontrollera kriterier i definition 2.1:

(i) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

(ii) $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$

(iii) $\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

dessa kriterier uppfylls av båda vilket man lätt ser.

(iv) $\langle f, f \rangle \geq 0$ och $\langle f, f \rangle = 0$ omm $f = 0$.

Kandidat I uppfyller inte (iv): Tag $f(t) = 1$, $t \in [a,b]$

då får vi $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f'(t))^2 dt = \int_a^b 0^2 dt = 0$

trots att $f \neq 0$, så I är ej en skalärprodukt.

Däremot uppfyller kandidat II även (iv):

$f \in C^1([a,b])$; $\underbrace{\int_a^b f'(t)^2 dt}_{\geq 0} + \underbrace{f(a)^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f'(t)^2 dt = 0$ och $f(a) = 0$

$\int_a^b \underbrace{f'(t)^2}_{\geq 0} dt = 0 \Rightarrow f'(t) \equiv 0 \Rightarrow f(t)$ är konstant,

dvs $f(t) \equiv 0$.

Lana 2013 Demo 5 7

2.7 Visa att $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$

för skalärprodukt $\langle u,v\rangle$ och norm $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

Lösning Vi beräknar högerledet:

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 = \frac{1}{4}\langle u+v, u+v\rangle - \frac{1}{4}\langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\langle u,u\rangle + \langle u,-v\rangle + \langle -v,u\rangle + \langle v,v\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle\right) = \frac{1}{2}\langle u,v\rangle + \frac{1}{2}\langle u,v\rangle$$

$$= \langle u,v\rangle.$$

Lana 2013 Demo 6 1

2.15 Sök samtliga vektorer i $\mathbb{R}^4$ ortogonala mot $u_1 = (1,2,1,3)$ och $u_2 = (2,5,1,4)$.

Lösning Låt $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vara en sådan vektor. Då gäller $x \cdot u_1 = 0$, $x \cdot u_2 = 0$ så

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

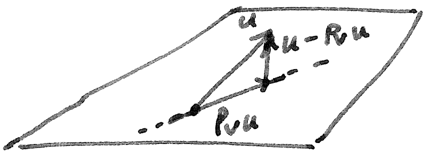
Lösning av detta (med $x_3 = s$, $x_4 = t$) ger

$$x = (-3s - 7t,\ s + 2t,\ s,\ t).$$

2.19 Sök ortogonal projektion av $u = (0,4,4,0)$ på $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ ($v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$) samt avståndet mellan u och V.

Lösning Låt $P_V u$ vara den sökta projektionen.

Skiss:



$P_V u \in V$ och $\{v_1, v_2\}$ är bas för V så $P_V u = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$u - P_V u \perp V$ så $(u - P_V u) \cdot v_1 = (u - P_V u) \cdot v_2 = 0$, dvs.

$$\begin{aligned} u \cdot v_1 - \alpha v_1 \cdot v_1 - \beta v_2 \cdot v_1 &= 0 \\ u \cdot v_2 - \alpha v_1 \cdot v_2 - \beta v_2 \cdot v_2 &= 0 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u \cdot v_1 \\ u \cdot v_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{så} \quad P_V u = 2v_1 = (2,2,2,2)$$

$$\text{avståndet} = \|u - P_V u\|_2 = \|(0,4,4,0) - (2,2,2,2)\|_2$$

$$= \|(-2,2,2,-2)\|_2 = 4.$$

2.20 Söker avstånd från $x = (0,2,0,2,1)$ till span$\{(1,1,1,1,1),$
$(1,2,1,0,1)\} =: \text{span}\{v_1, v_2\} =: V$ i $\mathbb{R}^5$.

Lösning Som tidigare får vi $P_V x = \alpha v_1 + \beta v_2$ och

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot v_1 \\ x \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

här
$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så $P_V x = v_1 = (1,1,1,1,1)$ och avståndet $= \|x - P_V x\|_2 =$
$= \|(-1, 1, -1, 1, 0)\|_2 = 2$

2.27 Anpassa modell $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ i minsta kvadrat till data $(1, 7.9)$, $(2, 5.4)$, $(3, -0.9)$.

Lösning Vi vill bestämma α, β så att

$$\alpha \cos(1) + \beta \sin(1) = 7.9$$
$$\alpha \cos(2) + \beta \sin(2) = 5.4$$
$$\alpha \cos(3) + \beta \sin(3) = -0.9$$

dvs.
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ \cos(2) & \sin(2) \\ \cos(3) & \sin(3) \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7.9 \\ 5.4 \\ -0.9 \end{pmatrix}}_{b}$$

För minsta-kvadratapproximation löser vi normalekvationerna

$$A^T A \hat{\xi} = A^T b \quad \text{(motsvarar att projicera } b \text{ på } V(A))$$

$$\sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} \cos^2(k) & \cos(k)\sin(k) \\ \cos(k)\sin(k) & \sin^2(k) \end{pmatrix} \hat{\xi} = \sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} b_k \cos(k) \\ b_k \sin(k) \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1.4452 & -0.0635 \\ -0.0635 & 1.5548 \end{pmatrix} \qquad \approx \begin{pmatrix} 2.9122 \\ 11.4308 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\xi} \approx \begin{pmatrix} 2.3421 \\ 7.4475 \end{pmatrix}$$

Lana 2013 Demo 6 ③

2.29 Låt $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vara en ON-bas för ett linjärt rum V och definiera $\mathcal{E}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ enl.

$$\begin{aligned} 3e_1' &= e_1 + 2e_2 + 2e_4 \\ 3e_2' &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ 3e_3' &= 2e_2 + e_3 - 2e_4 \\ 3e_4' &= -2e_1 + 2e_3 + e_4 \end{aligned}$$

Visa att $\mathcal{E}'$ är ON-bas för V och uttryck koordinater i $\mathcal{E}'$ i termer av koordinater i $\mathcal{E}$.

Lösning Om $\mathcal{E}'$ är ortonormal så är den i synnerhet linjärt oberoende och därmed en bas.

Vi kontrollerar att $\mathcal{E}'$ är ortogonal genom att beräkna $\langle e_i', e_j' \rangle$ för alla i och $j \geq i$ (räcker ~~då~~ $\langle e_i', e_j' \rangle = \langle e_j', e_i' \rangle$).

Vi kan skriva $e_i' = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{i,k} e_k$ så

$$\langle e_i', e_j' \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{4} \alpha_{i,k} e_k, \sum_{l=1}^{4} \alpha_{j,l} e_l \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \alpha_{i,k}\alpha_{j,l} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{= \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}} = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{i,k}\alpha_{j,k}$$

Tabell över $\langle e_i', e_j' \rangle$

j \ i	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

så $\mathcal{E}'$ är också en ON-bas.

Som tidigare får vi $[x]_{\mathcal{E}} = T[x]_{\mathcal{E}'}$, $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
(se uppg. 1.55)

och då såväl $\mathcal{E}$ som $\mathcal{E}'$ är ON-baser vet vi att $T^{-1} = T^T$ så

$$[x]_{\mathcal{E}'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}[x]_{\mathcal{E}}$$

Lana 2013 Demo 6 (4)

2.36 Söker polynom $p(t)=at^2+bt+c$ som minimerar
$$\int_{-1}^{1}(t^4-p(t))^2\,dt$$

Lösning Tag skalärprodukt $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt$ och norm $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$ på $\mathcal{P}_4$.

Vi kan nu formulera problemet som

"Finn $p\in\mathcal{P}_2\subset\mathcal{P}_4$ som minimerar $\|t^4-p\|^2$."

Detta minimerande polynom är just t^4:s ortogonala projektion på $\mathcal{P}_2$. Vi vill alltså välja a,b,c så att
$$\langle t^4-at^2-bt-c,\ t^i\rangle=0 \quad i=0,1,2$$
eftersom $t^2, t, 1$ är en bas för $\mathcal{P}_2$.

Dvs. $a\langle t^2,t^i\rangle+b\langle t,t^i\rangle+c\langle 1,t^i\rangle=\langle t^4,t^i\rangle$, $i=0,1,2$.
$$\langle t^k,t^i\rangle=\int_{-1}^{1}t^{k+i}dt=\begin{cases}2/k+i+1 & ,\ k+i \text{ jämnt}\\ 0 & ,\ k+i \text{ udda}\end{cases}$$

så vi får systemet
$$2\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\0\\\frac{1}{7}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/7\\0\\-3/35\end{pmatrix}$$

så $p(t)=\frac{6}{7}t^2-\frac{3}{35}$.

Kommentar: Matrisen ovan blir snabbt mycket illa-konditionerad. I praktiken vill man använda en ON-bas för $\operatorname{span}\{t^n,t^{n-1},\dots,t^0\}$ vid polynomanpassning. Sådan kan fås genom Gram-Schmidt-ortogonalisering.

Lana 2013 Demo 6 (5)

2.39 Betrakta P_n med skalärprodukt

$$\langle p, q\rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Visa att polynomen $\{\underset{p_1}{1}, \underset{p_2}{t}, \underset{p_3}{t^2-2}, \underset{p_4}{\tfrac{5}{6}t^3 - \tfrac{17}{6}t}\}$ är ortogonala m.a.p. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och använd detta för att anpassa ett tredjegradspolynom till datapunkterna $(-2,3)$, $(-1,5)$, $(0,5)$, $(1,4)$, $(2,3)$.

Lösning Ortogonalitet:

Vi beräknar $\langle p_i, p_j\rangle$, $i=1,\dots,4$; $j \geq i$ och kommer (efter mycket möda) fram till $\langle p_i, p_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Trendanpassning:

Vi anpassar ett polynom $p(t) = ap_1(t) + bp_2(t) + cp_3(t) + dp_4(t)$ till de givna datapunkterna och får systemet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1(-2) & p_2(-2) & p_3(-2) & p_4(-2) \\ p_1(-1) & p_2(-1) & p_3(-1) & p_4(-1) \\ p_1(0) & p_2(0) & p_3(0) & p_4(0) \\ p_1(1) & p_2(1) & p_3(1) & p_4(1) \\ p_1(2) & p_2(2) & p_3(2) & p_4(2) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{y}$$

~~Eftersom~~ normalekvationen $A^TA\hat{x} = A^Ty$

$$(A^TA)_{ij} = p_i(-2)p_j(-2) + p_i(-1)p_j(-1) + p_i(0)p_j(0) + p_i(1)p_j(1) + p_i(2)p_j(2) = \delta_{ij}$$

så $A^TA = I$ dvs. $\hat{x} = A^Ty = \begin{pmatrix} 4 \\ -1/10 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

så det anpassade polynomet är

$$p(t) = 4 - \frac{1}{10}t - \frac{1}{2}(t^2-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}t^3 - \frac{17}{6}t\right).$$

Lama 2013 Demo 6 6

2.41 Sök en tredje ordnings Fourierapproximation till $f(t) = 2\pi - t$.

Lösning Vi approximerar alltså $f(t)$ med

$$\hat{f}(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t) + b_1\sin(t) + b_2\sin(2t) + b_3\sin(3t)$$

där $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$

($\hat{f}$ är ortogonal projektion på span$\{1, \cos(t), \cos(2t), \cos(3t), \sin(t), \sin(2t), \sin(3t)\}$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - t)\,dt = \frac{4\pi^2}{\pi} - \left[\frac{t^2}{2\pi}\right]_0^{2\pi} = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

$k>0$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}2\pi\int_0^{2\pi}\cos(kt)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(kt)\,dt$$

$$= \underbrace{2\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{t}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kt)\,dt = -\frac{1}{k^2\pi}\left[\cos(kt)\right]_0^{2\pi} = \frac{1 - \cos(2k\pi)}{k^2\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - t)\sin(kt)\,dt = 2\int_0^{2\pi}\sin(kt)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(kt)\,dt =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{k}\left[\cos(kt)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{2\cos(2k\pi)}{k} - \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi}\cos(kt)\,dt =$$

$$= \frac{2}{k} - \underbrace{\frac{1}{k^2\pi}\left[\sin(kt)\right]_0^{2\pi}}_{=0} = \frac{2}{k}$$

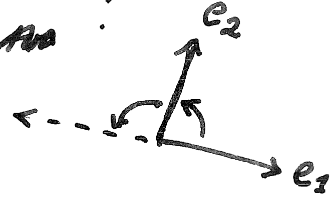
$$\therefore\ \hat{f}(t) = \pi + 2\sin(t) + \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t).$$

Lana 2013 Demo 7 1

3.1 x_1, x_2 koordinater m.a.p. ON-bas e_1, e_2 i ett plan.
Bestäm matris för avbildningarna:

(a) Rotation ett kvarts varv i positiv riktning (från e_1 till e_2)

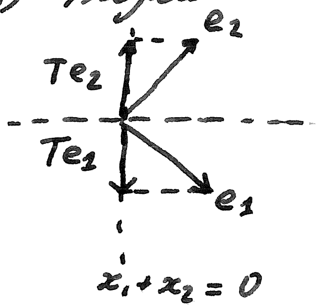
Lösning: Givet ON-bas kan vi bestämma matris för avbildning T som $A = \big(T(e_1) \cdots T(e_n)\big)$.



I vårt fall avbildas
$$e_1 \mapsto e_2$$
$$e_2 \mapsto -e_1$$

så $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

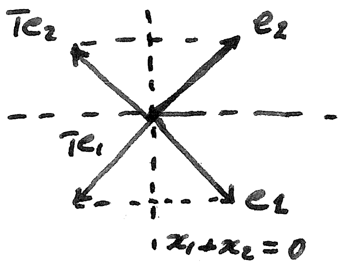
(b) Projektion på linjen $x_1 + x_2 = 0$.



$$Te_1 = \tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{1}{2}e_2$$
$$Te_2 = -\tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

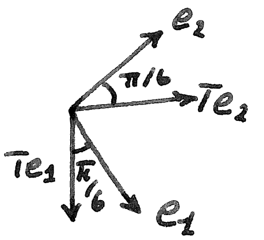
(c) Spegling i linjen $x_1 + x_2 = 0$.



$$Te_1 = -e_2$$
$$Te_2 = -e_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Rotation $\pi/6$ radianer i negativ riktning (dvs. från e_2 till e_1)



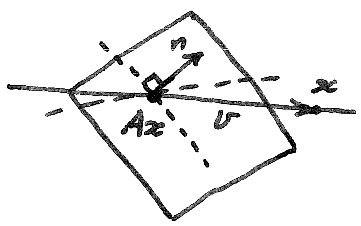
$$Te_2 = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)e_2 + \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)e_1$$
$$Te_1 = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)e_1 - \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Lana 2013 Demo 7 ②

3.4(a) Matris $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ är linjär avbildningsmatris i $\mathbb{R}^3$. Visa att A projicerar på ett plan genom förflyttning parallell med en linje.

Lösning Skiss:



En sådan avbildning uppfyller:

$$\left.\begin{aligned} T(x) &= x + \alpha v \\ T(x) &\perp n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$0 = (x+\alpha v)\cdot n = (x+\alpha v)^T n = x^T n + \alpha v^T n$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{x^T n}{v^T n}$$

så $$A(x) = x - \frac{x^T n}{v^T n} v = x - \frac{1}{v^T n}(x^T n) v$$

$$= \left\{ (x^T n) v = ((x^T n) v^T)^T = v n^T x \right\}$$

$$= x - \frac{v n^T}{v^T n} x = \underbrace{\left(I - \frac{v n^T}{v^T n} \right)}_{A} x$$

Vi vill alltså kunna skriva $I - A$ som $\frac{v n^T}{v^T n}$.

$$I - A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1,3,-1)\cdot(1,1,2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dvs. linjen har riktning $(1,3,-1)$ och planet har normal $(1,1,2)$.

Lana 2013 Demo 7 3

3.5 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linjär. $F((1,1)) = (-1,1)$, $F((1,2)) = (1,1)$.

Sök avbildningsmatris m.a.p. standardbasen!

Lösning $A = \big(F((1,0)) \quad F((0,1))\big)$

$$F((1,0)) = F\big(2(1,1) - (1,2)\big) = 2F((1,1)) - F(1,2)$$
$$= (-2,2) - (1,1) = (-3,1)$$
$$F((0,1)) = F\big(\tfrac{1}{2}((1,2) - (1,0))\big) = \tfrac{1}{2}F((1,2)) - \tfrac{1}{2}F((1,0))$$
$$= \tfrac{1}{2}(1,1) - \tfrac{1}{2}(-3,1) = (2,0)$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.8 Låt $D : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ med $Dp(x) = p'(x)$ $\forall p \in \mathcal{P}_n$.

Söker matris för D i bas

(a) $\{1, x, \dots, x^n\} = \mathcal{B}$

$D : x^k \longmapsto kx^k$, $k > 0$, $D1 = 0$

så $A = \big([D1]_{\mathcal{B}} \; [Dx]_{\mathcal{B}} \cdots [Dx^n]_{\mathcal{B}}\big) = (0 \; e_1 \; 2e_2 \cdots ne_n)$

e_k standardbasvektor i $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) $\{1, x-c, \frac{1}{2!}(x-c)^2, \dots, \frac{1}{n!}(x-c)^n\} = \mathcal{B}'$, $c \in \mathbb{R}$ fixt.

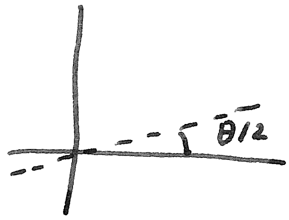
$D : \frac{1}{k!}(x-c)^k \longmapsto \frac{1}{(k-1)!}(x-c)^{k-1}$, $k > 0$

så $A = \big([D1]_{\mathcal{B}'}, [D\frac{1}{1!}(x-c)]_{\mathcal{B}'}, [D\frac{1}{2!}(x-c)^2]_{\mathcal{B}'} \cdots [D\frac{1}{n!}(x-c)^n]_{\mathcal{B}'}\big)$

$$= (0 \quad e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n)$$

Lana 2013 Demo 7 (4)

3.9 Ange geometrisk betydelse av linjära avbildningar som i ON-bas e_1, e_2 har matris



(a) $$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & -\cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Matris för spegling i linje $x_2 = \tan(\frac{\pi}{8})x_1$

(i allmänhet $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ speglar i $x_2 = \tan(\frac{\theta}{2})x_1$)

(b) $$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\arccos(3/5) & -\sin\arccos(3/5) \\ \sin\arccos(3/5) & \cos\arccos(3/5) \end{pmatrix}$$

ty $\sin\arccos 3/5 = \sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{3}{5}} = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$
$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Matris för rotation $\arccos 3/5$ radianer i positiv riktning. (I allmänhet $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ roterar θ)

3.11 Beräkna $\int (xe^x\cos x - 3e^x\sin x)\,dx$ med "matrismetoden".

Lösning 1: Hitta en lämplig bas för att uttrycka derivator av integranden.
2: Hitta matris för derivering i denna bas.
3: Integreringsmatris via invers av deriveringsmatris.
4: Beräkna integral med integreringsmatris.

1. D deriveringsoperation

D:

$(0,0,1,0)$ $xe^x\cos x$	$\longmapsto$	$e^x\cos x + xe^x\cos x - xe^x\sin x$	$(1,0,1,-1)$
$(0,0,0,1)$ $xe^x\sin x$	$\longmapsto$	$e^x\sin x + xe^x\sin x + xe^x\cos x$	$(0,1,1,1)$
$(1,0,0,0)$ $e^x\cos x$	$\longmapsto$	$e^x\cos x - e^x\sin x$	$(1,-1,0,0)$
$(0,1,0,0)$ $e^x\sin x$	$\longmapsto$	$e^x\sin x + e^x\cos x$	$(1,1,0,0)$

Vi väljer bas $\{e^x\cos x, e^x\sin x, xe^x\cos x, xe^x\sin x\}$

2,3: Enligt ovan får vi deriveringsmatris

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ så } A_I = A_D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och vår integrand $A_D[xe^x\cos(x) - 3e^x\sin x]_B = A_D\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

dvs. $\frac{3}{2}e^x\cos x - 2e^x\sin x + \frac{1}{2}xe^x\cos x + \frac{1}{2}xe^x\sin x$

Lana 2013 Demo 7 (5)

3.14 Visa A inverterbar, similär med B $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ B inverterbar, B^{-1} similär med A^{-1}.

Lösning A similär med B ~~om~~ $\exists$ inverterbar T s.a.
$A = T^{-1}BT$.
Vi har alltså detta och A inverterbar. Men

$$A = T^{-1}BT \Rightarrow B = TAT^{-1} \text{ och}$$

$$(TA^{-1}T^{-1})\underbrace{(TAT^{-1})}_{B} = TA^{-1}\underbrace{T^{-1}T}_{=I}AT^{-1} = T\underbrace{A^{-1}A}_{=I}T^{-1} = TT^{-1} = I$$

så $B^{-1} = TA^{-1}T^{-1}$ och därmed ~~också A~~
är också B^{-1} similär med A.

3.16 Visa att ~~om~~ $A = QR$, Q ickesingulär så är
A similärt ekvivalent med RQ.

Lösning:

$$A = QR$$
$$= QRI = QR(QQ^{-1}) = Q(RQ)Q^{-1}$$

och därmed är A similärt ekvivalent med RQ, per definition.

9.20 Vi har $Ax = b$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Minsta-kvadratlösning:

$$A^TA\hat{x} = A^Tb \text{ ger } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Längd (2-norm) av residualen $r = A\hat{x} - b$:

$$\|A\hat{x} - b\|_2 = \|(2,1,0) - (2,1,1)\|_2 = \|(0,0,-1)\|_2 = 1$$

(c) Ange kompakt QR-faktorisering för A!
Full QR: $A = QR = [Q_1\ Q_2]\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$, Q ortogonal, R uppåt triangulär

R_2 endast 0.

Kompakt QR: $A = Q_1R_1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.24 Anpassa modell $u(t) = a\sin(t+v)$ till data

t	0°	30°	60°	90°
u	2.86	10.2	14.8	15.4

m. h. a. linjärisering.

Lösning Skriv $u(t) = a\sin(t+v) = a\sin(v)\cos(t) + a\cos(v)\sin(t)$

$$=: \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

$$\alpha = a\sin(v)\ ,\ \beta = a\cos(v).$$

Vi får

$$\begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.86 \\ 10.2 \\ 14.8 \\ 15.4 \end{pmatrix}$$

med minsta-kvadratlösning $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \approx \cancel{\begin{pmatrix} 15.4 \\ 2.82 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 15.4 \\ 2.82 \end{pmatrix}$

$$\tan v = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow v \approx 10.6^\circ$$

$$a = \frac{\alpha}{\sin(v)} \approx 15.7$$

9.26 $A \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $A \neq 0$

(a) Finn kompakt SVD för A.

I allmänhet: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$ har kompakt SVD

$A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ med $U_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\cancel{U_1^T U_1 = I_r,\ U_1 U_1^T = I_n}$
med ortonormala kolonner

$\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ diagonal med alla singulärvärden $\neq 0$

$V_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$ med ~~ortogonala~~ ortonormala kolonner.

Här får vi $A = \underbrace{\frac{A}{\|A\|_2}}_{U_1} \cdot \underbrace{\|A\|_2}_{\Sigma_1} \cdot \underbrace{1}_{V_1^T}$

(b) Finn kompakt SVD för A^T:

Definieras utifrån SVD för A som

$$A^T = \left(\frac{A}{\|A\|_2} \cdot \|A\|_2 \cdot 1\right)^T = \underbrace{1}_{U_1} \cdot \underbrace{\|A\|_2}_{\Sigma_1} \cdot \underbrace{\frac{A^T}{\|A\|_2}}_{V_1^T}$$

Lana 2013 Demo 7 (7)

9.33 Formulera på matrisform minsta-kvadratproblemet att anpassa modellen $f(t,x) = x_1 t + x_2 e^t$ till mätpunkter $(t,f) = (1,2), (2,3), (3,5)$.

Lösning $f(t_i) = x_1 t_i + x_2 e^{t_i} = f_i$, $i = 1, 2, 3$ ger

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ 2 & e^2 \\ 3 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Denna hoppas nog över!)

9.41 QR-faktorisera $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dels m.h.a. Gram-Schmidt och dels m.h.a. Householder.

Lösning Gram-Schmidt: (ortonormera kolonnerna i A ...) $A = (a_1\ a_2)$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (a_1 = 5q_1 = r_{11}q_1 \Rightarrow r_{11} = 5)$$

$$q_2' = a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1 = a_2 - 4q_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{\|q_2'\|_2} = \frac{1}{\sqrt{14}} q_2' = \frac{1}{5\sqrt{14}}\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (a_2 = \sqrt{14}\, q_2 + 4q_1 = r_{22}q_2 + r_{12}q_1 \Rightarrow r_{22} = \sqrt{14},\ r_{12} = 4)$$

$$\Rightarrow A = Q_1R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{14} \\ 4/5 & -6/5\sqrt{14} \\ 0 & 3/\sqrt{14} \\ 3/5 & 8/5\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \sqrt{14} \end{bmatrix}$$

Householder: $v_1' = a_1 - \|a_1\|_2 e_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|_2} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2v_1v_1^T = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 15 \\ 20 & 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 15 & -12 & 0 & 16 \end{bmatrix} \qquad H_1A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2' = \hat{a}_2 - \|\hat{a}_2\|_2 e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{14} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2(14+2\sqrt{14})}}\begin{bmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{14} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2v_2v_2^T = \frac{1}{14+2\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 14+2\sqrt{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4-2\sqrt{14} & 6+3\sqrt{14} & 2+\sqrt{14} \\ 0 & 6+3\sqrt{14} & 5+2\sqrt{14} & -3 \\ 0 & 2+\sqrt{14} & -3 & 13+2\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

$$R = H_2H_1A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \sqrt{14} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = H_1H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{14} & \vdots & \vdots \\ 4/5 & -6/5\sqrt{14} & \vdots & \vdots \\ 0 & 3/\sqrt{14} & \vdots & \vdots \\ 3/5 & 8/5\sqrt{14} & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Lamu 2013 Demo 8 (1)

4.1 Är $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor till $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?

Om så, vilket är egenvärdet?

Lösning Undersök om det finns λ : $Av = \lambda v$.

$Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v$ så v är egenvektor med egenvärde $\lambda = 0$.

4.2 Finn bas till egenrum (spannet av egenvektorer) för givna matriser och egenvärden.

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 2, 3$.

Lösning egenrum $= \{x : Ax = \lambda x\} = \{x : (A-\lambda I)x = 0\} = N(A-\lambda I)$

Vi har alltså att bestämma $N(A-\lambda I)$ för de givna egenvärdena, dvs lösa $(A-\lambda I)x = 0$.

$\underline{\lambda = 1}$ $(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow x = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ bas $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ t.ex.

$\underline{\lambda = 2}$ $(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow x = t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 3}$ $(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow x = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N(A-\lambda I) = \left\{ s\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} + t\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, s,t \in \mathbb{R} \right\}$

Lama 2013 Demo 8 (2)

4.3. Ange egenvärden och motsvarande egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

utan att göra några "egentliga" beräkningar!

Lösning Vi ser att summan av A:s kolonner är $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, dvs. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ så $\left(6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ är ett egenpar (par av egenvärde och motsv. egenvektor).

A är klart singulär, dvs. 0 är ett egenvärde, exempel på egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Därmed har 0 ~~algebraisk~~ multiplicitet (minst) 2, och inga fler egenvärden kan finnas (vi har hittat tre: 0, 0 och 1).

4.4(c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4(2-\lambda) =$

$= (2-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Egenvektorer: $(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

4.9 T linjär avbildning med egenpar $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Låt $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Visa $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ ej egenvektor till T.

Lösning Visa $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \neq \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$ för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2$$

$$= \lambda_1(\alpha_1 u_1) + \lambda_2(\alpha_2 u_2) \neq \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$$

ty $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

<u>Lina 2013 Demo 8</u> ③

<u>4.12</u> $T: \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ med $T(p(t)) = t\,p'(t+1) + p(t) \;\forall p \in \mathcal{P}_2$.

(a) Visa att T är linjär:

Låt $p, q \in \mathcal{P}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Då:

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q) &= t(\alpha p'(t+1) + \beta q'(t+1)) + \alpha p(t) + \beta q(t) \\ &= \alpha(t p'(t+1) + p(t)) + \beta(t q'(t+1) + q(t)) \\ &= \alpha T(p(t)) + \beta T(q(t)). \end{aligned}$$

(b) Bestäm matris för T i basen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

$$T(1) = t \cdot 0 + 1 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T(t) = t \cdot 1 + t = 2t \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = t \cdot 2(t+1) + t^2 = 3t^2 + 2t \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A = \left([T(1)]_{\mathcal{B}} \;\; [T(t)]_{\mathcal{B}} \;\; [T(t^2)]_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

(c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till T.

<u>Lösning</u> Gå via egenvärden till A (samma som för T).

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1,\; 2,\; 3.$$

Egenvektorer

$$(A - I)x = 0 \Rightarrow x = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longleftrightarrow p(t) = s \cdot 1,\; s \neq 0$$

$$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow x = s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longleftrightarrow p(t) = s \cdot t,\; s \neq 0$$

$$(A - 3I)x = 0 \Rightarrow x = s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \longleftrightarrow p(t) = s \cdot (2t^2 + t),\; s \neq 0$$

$\therefore$ Egenvärden $\lambda = 1$ 2 3

Egenvektorer $p(t) = s1$ $s \cdot t$ $s \cdot (2t^2 + t)$ $s \neq 0$

Lana 2013 Demo 8 (4)

4.16 Är matrisen diagonaliserbar? Diagonalisera om möjligt!

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning Diagonaliserbar om för alla egenvärden λ

$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ $\quad$ m_g − $\dim(N(A-\lambda I))$

m_a − λ:s multiplicitet som rot till $\det(A-\lambda I)$.

$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = -2, -1, 1$ (alla med $m_a(\lambda) = 1$)

$N(A-I) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $m_a(1) = 1 = m_g(1)$

$N(A+I) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $m_a(-1) = 1 = m_g(-1)$

$N(A+2I) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $m_a(-2) = 1 = m_g(-2)$

Diagonaliserbar. $\quad A = TDT^{-1}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$

$\lambda = 3, -1, -1$

dvs. $m_a(3) = 1$, $m_a(-1) = 2$

$N(A+I) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dvs. $m_g(-1) = 1 < m_a(-1)$

så A kan ej diagonaliseras.

Lana 2013 Demo 8 5

4.19 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ med samtliga kolonnsummor $=1$, dvs. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall j$. Visa att 1 är egenvärde till A.

Lösning Om radsummor är 1 så är 1 egenvärde ty för en matris B med denna egenskap gäller

$$B\mathbb{1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

men A^T är just sådan och därmed är 1 även egenvärde till A.

4.25 A symmetrisk, $A = B^TB$, B har full rang. Visa att alla egenvärden till A är positiva.

Lösning Låt λ vara ett egenvärde, motsv. egenvektor $x \neq 0$.

$$Ax = \lambda x \implies B^TBx = \lambda x \implies x^TB^TBx = \lambda x^Tx$$

$$\implies (Bx)^T(Bx) = \lambda \underbrace{x^Tx}_{\neq 0,\, x\neq 0} \implies \lambda = \frac{(Bx)^T(Bx)}{x^Tx} = \frac{\|Bx\|_2^2}{\|x\|_2^2} > 0$$

ty $Bx \neq 0$ då $x \neq 0$ när B har full rang.

4.27 Bestäm T s.a. T^TAT är diagonal (dvs. ortogonal diagonalisering).

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Symmetrisk, därmed ortogonalt diagonaliserbar med $T = (v_1 \ v_2 \ v_3)$, v_i - normerad egenvektor.

Egenvärden: $\det(A-\lambda I) = 0 \implies \lambda((\lambda+1)(\lambda-1)+8) = 0 \implies \lambda = 3, 0, -3$.

Egenvektorer: $(A-3I)v_1 = 0 \implies v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(A-0I)v_2 = 0 \implies v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A-(-3)I)v_3 = 0 \implies v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Egenvärden: $\det(A-\lambda I) = 0 \implies \lambda(\lambda^2+6\lambda-72) = 0$ $\implies \lambda = 6, 0, -12$

Egenvektorer: $(A-6I)v_1 = 0 \implies v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(A-0I)v_2 = 0 \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-(-12)I)v_3 = 0 \implies v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Lana 2013 Demo 9 (1)

4.32 $v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ ges av $v_{n+1} = A v_n$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Visa att $\lim_{n\to\infty} 5^{-n} y_n$ existerar.

Lösning Vi kan skriva $v_n = A^n v_0$. Om $A = PDP^{-1}$, D diagonal så får vi $A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$, där $P^{-1}P = I$ mellan varje par av faktorer,

så $v_n = PD^nP^{-1}v_0$.

Diagonalisering: Egenvärden till A: $\lambda = 5,\ 2,\ -2$

Motsv. egenvektorer: $e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

så $v_n = PD^nP^{-1}v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5^n - 4\cdot 2^n + 5\cdot(-2)^n \\ 4\cdot 2^n - 2\cdot 5^n \\ 5\cdot(-2)^n - 4\cdot 2^n \end{pmatrix}$

dvs. $5^{-n}y_n = 4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n - 2 \longrightarrow -2$, $n \longrightarrow \infty$.

4.37 Bestäm ON-bas i $\mathbb{R}^3$ s.a. q är diagonal och ange diagonal form då

(a) $q(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

Lösning Vi kan alltid skriva en kvadratisk form $q(x)$ som

$q(x) = x^TAx$ med A symmetrisk.

Den sökta basen ges av A:s egenvektorer och diagonalformen som $q(\xi) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \cdots + \lambda_n\xi_n^2$ där λ_i är egenvärde och ξ vektor i den nya basen.

Här: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda = 9,\ 6,\ 3$

och motsv. egenvektorer $\underbrace{e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{sökt ON-bas}}$

$q(\xi) = 9\xi_1^2 + 6\xi_2^2 + 3\xi_3^2$

(b) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = x^T\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A}x$

Egenvärden $\lambda = 6,\ 3,\ -2$

Egenvektorer $e = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i ON-bas

Så $q(\xi) = 6\xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 2\xi_3^2$

Lana 2013 Demo 9 (2)

4.38 Bestäm största resp. minsta värde för den kvadratiska formen om $\|x\|_2 = 1$.

(a) $q(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = x^T \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} x.$

Sats 4.14 $\quad q(x) = x^T A x$, A symmetrisk
$\Rightarrow \quad \lambda_{min} \|x\|_2^2 \le q(x) \le \lambda_{max} \|x\|_2^2$, λ_{max}, λ_{min} största resp. minsta egenvärde till A.

Här $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ har egenvärden $\lambda = 4, 4, -2$

så om $\|x\|_2 = 1$ gäller $-2 \le q(x) \le 4$. Värdena antas för x motsvarande egenvektor.

(b) $q(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = x^T \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} x$

Egenvärden $\lambda = 6, 6, 9$ så $6 \le q(x) \le 9$.

4.39 Visa att kurvorna är ellipser samt beräkna riktning och längd på halvaxlarna.

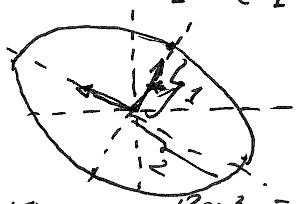
(a) $17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 20$

I allmänhet: $q(x) = x^T A x = c$ ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisk) är ellips om $\lambda_1 \ge \lambda_2 > 0$. Halvaxlar är parallella med egenvektorer och har längd $\sqrt{c/\lambda_i}$, $i = 1, 2$.

Här: $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ har egenvärden $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5 \Rightarrow$ ellips.

Egenvektorer $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, längder $\sqrt{20/20} = 1$ resp. $\sqrt{20/5} = 2$

Skiss



(b) $37x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 = 200$

$A = \begin{pmatrix} 37 & 9 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$ har egenvärden 40 resp. 10 $\Rightarrow$ ellips och egenvektorer $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

halvaxlars längd $\sqrt{200/40} = \sqrt{5}$ resp $\sqrt{200/10} = \sqrt{20}$.

Lana 2013 Demo 9 (3)

4.40 Vilka av formerna är positivt definita på $\mathbb{R}^3$?

(a) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Positivt definit: $q(x) > 0$ om $x \neq 0$. Om $q(x) = x^TAx$ A symmetrisk så är q positivt definit om alla egenvärden till A är positiva.

Här finns motexempel: Tag $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$

$q(x) = 0^2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 1 = -2 < 0$.

(b) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = x^T\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}x$.

Inget uppenbart motexempel.

$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 23\lambda + 4$ är svårt att hitta exakta rötter till.

Räcker att kolla om $f(\lambda) \neq 0$ för $\lambda \leq 0$.

$f(0) = 4 > 0$ och $f'(\lambda) = -3\lambda^2 + 24\lambda - 23 = 0 \iff \lambda = 4 \pm \frac{5}{\sqrt{3}}$

$f'(0) = -23 < 0$

så för $\lambda \leq 0$ gäller att $f(\lambda)$ avtar, och då $f(0) = 4$ får vi $f(\lambda) > 0$ då $\lambda \leq 0$ $\Rightarrow$ Inga ~~negativa~~ icke-positiva egenvärden $\Rightarrow$ q positivt definit.

(c) $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$

Ej positivt definit: Motex. $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$

$q(x) = 0^2 + 2\cdot 0\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot 3 - 6\cdot 1\cdot 1 = -6$.

Lana 2013 Demo 9 (4)

4.46 $q(x) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2 = x^T\begin{bmatrix} 7 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix}x =: x^TAx$

(a) Bestäm $\max_x q(x)$ då $x^Tx = 1$.

Som tidigare: $q(x) \le \lambda_{max}\|x\|_2^2 = \lambda_{max}x^Tx = \lambda_{max}$

Egenvärden: $\lambda_{max} = 15/2$, $\lambda_{min} = 5/2$

(Egenvektorer: $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.)

dvs. $\max\limits_{x^Tx=1} q(x) = \frac{15}{2}$

(b) Finn optimal vektor u (dvs. s.a. $q(u) = \max\limits_{x^Tx} q(x)$).

Största värde antas för motsvarande egenvektor så $u = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Finn $\max\limits_x q(x)$ om $x^Tx = 1$ och $x^Tu = 0$.

$x^Tu = 0 \Rightarrow \cancel{x} \parallel v = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x^Tx = 1 \Rightarrow x = \pm v$

vilket i båda fall ger $q(x) = \lambda_{min} = \frac{5}{2}$.

4.48 $x'(t) = Ax(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Visa att $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)e^{-3t}$ existerar.

Lösning av ODE: $\cancel{A}$ $x(t) = e^{tA}x(0) = Pe^{tD}P^{-1}x(0)$

om $A = PDP^{-1}$ är en diagonalisering av A.

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \quad e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Här kan vi $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

så $x(t) = Pe^{tD}P^{-1}x(0) =$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 12e^{3t} + 2e^t + 10e^{-2t} \\ 24e^{3t} - 8e^t - 10e^{-2t} \\ 12e^{3t} - 2e^t - 10e^{-2t} \end{bmatrix}$$

dvs. $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-3t}x_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{6}(12 + 2e^{-2t} + 10e^{-5t}) = 2$.

Lana 2013 Demo 9 5

4.52 Beräkna e^{tA} då

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Egenpar $\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ resp. $\left(-1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

så $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$ och $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ 2e^t - 2e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$

Egenvärden $\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ -\beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i|\beta|$

Egenvektorer: $(\alpha - (\alpha \pm i|\beta|))x_1 + \beta x_2 = 0 \Rightarrow \mp i|\beta| x_1 = -\beta x_2$

$\Rightarrow \mp x_1 = -\dfrac{\beta}{i|\beta|} x_2 \Rightarrow \mp x_1 = i\, \mathrm{sgn}(\beta) x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \mp i\, \mathrm{sgn}(\beta) x_2$ så egenvektorer är

$\begin{pmatrix} -i\,\mathrm{sgn}(\beta) \\ 1 \end{pmatrix}$ för $\lambda = \alpha + i|\beta|$

$\begin{pmatrix} i\,\mathrm{sgn}(\beta) \\ 1 \end{pmatrix}$ för $\lambda = \alpha - i|\beta|$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -i\,\mathrm{sgn}(\beta) & i\,\mathrm{sgn}(\beta) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\alpha t + i|\beta|t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t - i|\beta|t} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} -i\,\mathrm{sgn}(\beta) & i\,\mathrm{sgn}(\beta) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\,\mathrm{sgn}(\beta) & 1 \\ -i\,\mathrm{sgn}(\beta) & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} -i\,\mathrm{sgn}(\beta) & i\,\mathrm{sgn}(\beta) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i|\beta|t} & 0 \\ 0 & e^{-i|\beta|t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\,\mathrm{sgn}(\beta) & 1 \\ -i\,\mathrm{sgn}(\beta) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{i|\beta|t} + e^{-i|\beta|t} & -i\,\mathrm{sgn}(\beta)(e^{i|\beta|t} - e^{-i|\beta|t}) \\ i\,\mathrm{sgn}(\beta)(e^{i|\beta|t} - e^{-i|\beta|t}) & e^{i|\beta|t} + e^{i|\beta|t} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cancel{2\cos|\beta|t}\ 2\cos\beta t = 2\cos|\beta|t = e^{i|\beta|t} + e^{-i|\beta|t} \\ 2i\,\mathrm{sgn}(\beta t) = 2i\,\mathrm{sgn}(\beta)\sin(|\beta|t) = e^{i|\beta|t} - e^{-i|\beta|t} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 2\cos(\beta t) & 2\sin(\beta t) \\ -2\sin(\beta t) & 2\cos(\beta t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

Lana 2013 Demo 9 (6)

4.55 Ytmodena $x'(t) = Ax(t)$ för $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
beroende på egenvärdena till A.

Lösningsformel : $x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$
(λ_1, v_1), (λ_2, v_2) egenpar, c_1, c_2 beror på startvärdet $x(0)$.

(a) λ_1, λ_2 reella negativa.
$x(t) = c_1 v_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 v_2 e^{-|\lambda_2| t}$ så lösningen närmar sig 0 då $t \to \infty$.

(b) λ_1, λ_2 reella positiva
$|x(t)| = |c_1 v_1 e^{|\lambda_1| t} + c_2 v_2 e^{|\lambda_2| t}| \longrightarrow \infty$, $t \to \infty$

(c) λ_1, λ_2 reella, ena negativt, andra positivt

$x(t) = c_1 v_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 v_2 e^{|\lambda_2| t}$
Lösningen närmar sig 0 längs v_1 men vänder utåt längs v_2.

(d) ~~Komplexa~~ λ_1, λ_2 komplexa med $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

$x(t) = c_1 v_1 e^{-|\operatorname{Re}\lambda_1| t + i \operatorname{Im}\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{-|\operatorname{Re}\lambda_2| t + i \operatorname{Im}\lambda_2 t}$
negativ realdel $\Rightarrow$ $|x(t)| \longrightarrow 0$
Imaginära exponenten ger "spiralbeteende"

(e) λ_1, λ_2 komplexa med $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$.
Som i (d) men $|x(t)| \longrightarrow \infty$

Lana 2013 Demo 10 (1)

9.27 Approximera egenvärden till $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ med hjälp av fem iterationer med potensmetoden respektive invers iteration med startvektor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Potensmetoden Låt $x_{k+1} = Ax_k$. $x_k \longrightarrow$ egenvektor motsvarande största egenvärde λ_{max}. $\frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k} \longrightarrow \lambda_{max}$.

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \end{bmatrix}$, $x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 43 \\ 85 \end{bmatrix}$,

$x_4 = Ax_3 = \begin{bmatrix} 171 \\ 341 \end{bmatrix}$, $x_5 = Ax_4 = \begin{bmatrix} 683 \\ 1365 \end{bmatrix}$ $\lambda_{max} \approx \frac{x_5^T A x_5}{x_5^T x_5} \approx \underline{\underline{4.0003}}$

Invers iteration Låt $x_{k+1} = A^{-1}x_k$. $x_k \longrightarrow$ egenvektor svarande mot största egenvärde $\frac{1}{\lambda_{min}}$ till A^{-1}. λ_{min} minsta ~~egenvärde~~ -värde till A. $\frac{x_k^T x_k}{x_k^T A^{-1} x_k} \longrightarrow \lambda_{min}$. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = A^{-1}x_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = A^{-1}x_1 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x_3 = A^{-1}x_2 = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 11 \\ -10 \end{bmatrix}$,

$x_4 = A^{-1}x_3 = \frac{1}{128}\begin{bmatrix} 43 \\ -42 \end{bmatrix}$, $x_5 = A^{-1}x_4 = \frac{1}{512}\begin{bmatrix} 171 \\ -170 \end{bmatrix}$ $\lambda_{min} \approx \frac{x_5^T x_5}{x_5^T A^{-1} x_5} \approx 0.9993$

(Exakt: $\lambda_{max} = 4$ motsv. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\lambda_{min} = 1$ motsv. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$)

9.35 Visa m.h.a. spektralsatsen på A^TA att singulärvärdena till A är kvadratroten ur egenvärdena till A^TA.

Lösning A^TA är symmetrisk och kan enligt spektralsatsen diagonaliseras ortogonalt: $A^TA = PDP^T$ med P ortogonal och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$ för $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. A^TA är positivt semidefinit då $x^TA^TAx = (Ax)^TAx = \|Ax\|_2^2 \geq 0$ så vi kan välja D, P s.a. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

Låt $A = U\Sigma V^T$ vara SVD för A. Skriv $\Sigma = \cancel{\begin{bmatrix} \Sigma_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \Sigma_m \\ 0 \end{bmatrix}$

Σ_m diagonal $m \times m$ med singulärvärden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$.

Uppdela $U = [U_m \; U']$ ($V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ och behöver ej uppdelas). Vi får $A = U_m \Sigma_m V^T$ och $A^TA = (U_m \Sigma_m V^T)^T(U_m \Sigma_m V^T) =$

$= V\Sigma_m U_m^T U_m \Sigma_m V^T = V\Sigma_m^2 V^T$. Detta är också en ortogonal diagonalisering av A^TA med diagonalmatrisen ordnad på samma sätt som D varav följer att $\Sigma_m^2 = D$, dvs. $\sigma_k^2 = \lambda_k$ eller $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, \dots, m$.

Lana 2013 Demo 10 (2)

9.37 (a) Bestäm (Penrose - Moore-) pseudoinvers till $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösning Pseudoinvers $A^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T$ där $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ (kompakt SVD).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{U_1} \cdot \underbrace{1}_{\Sigma_1} \cdot \underbrace{[1 \ 0]}_{V_1^T} \quad \text{så}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot [1 \ 0] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$ (A är sin egen pseudoinvers i detta fall)

(b) Bestäm A^+ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ för något (litet) $\varepsilon > 0$.

A är inverterbar, då gäller $A^+ = A^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}}}$.

(c) Slutsats kring konditionstal för pseudoinversion?

Liten ändring $(0 \longrightarrow \varepsilon)$ i A ger stor ändring $(0 \longrightarrow \varepsilon^{-1})$ i A^+, dvs. illakonditionerat.

9.40 (a) A symmetrisk med egenpar (λ, x) resp. (μ, y), $\lambda \neq \mu$. Visa att $x \perp y$.

Lösning: Visa att $x \cdot y = y^T x = 0$:

$$0 = y^T A x - y^T A x = (A^T y)^T x - y^T (Ax)$$
$$= (Ay)^T x - y^T (Ax) = \mu y^T x - \lambda y^T x = (\mu - \lambda) y^T x$$
$$\Rightarrow y^T x = 0 \text{ ty } \mu - \lambda \neq 0.$$

(b) A ej nödvändigtvis symmetrisk men med egenvärden λ och $\mu \neq \lambda$ och motsvarande egenvektorer x s.a. $Ax = \lambda x$ respektive y s.a. $y^T A = \mu y^T$ (dvs. y vänster egenvektor för μ eller egenvektor till A^T). Visa $x \perp y$.

Lösning Samma teknik som i (a):

$$0 = y^T A x - y^T A x = \mu y^T x - \lambda y^T x = (\mu - \lambda) y^T x$$
$$\Rightarrow y^T x = 0 \text{ då } \mu - \lambda \neq 0.$$

Lana 2013 Demo 10 ③

6.6 Vi studerar fel i $\sin(x)$ i termer av fel δx i x.

(a) Gräns för absolut fel, dvs $|\sin(x) - \sin(x+\delta x)|$.

Lösning Taylors formel ger $\sin(x+\delta x) = \sin(x) + \cos(y)\delta x$ för något y mellan x och $x+\delta x$, så

$$|\sin(x) - \sin(x+\delta x)| = |\sin(x) - (\sin(x) + \cos(y)\delta x)|$$
$$= |\cos y||\delta x| \le |\delta x|$$

(b) Gräns för det relativa felet $|\sin(x) - \sin(x+\delta x)|/|\sin(x)|$

Som i (a) får vi

$$\frac{|\sin(x) - \sin(x+\delta x)|}{|\sin(x)|} = \frac{|\cos(y)|}{|\sin(x)|}|\delta x| = \frac{|\cos(y)||x|}{|\sin(x)|}\frac{|\delta x|}{|x|}$$

$$\approx \frac{|\cos(x)||x|}{|\sin(x)|} \cdot \frac{|\delta x|}{|x|}$$

(c) Gräns för konditionstalet för beräkningen.

Konditionstalet K uppfyller $\dfrac{|\sin(x) - \sin(x+\delta x)|}{|\sin(x)|} \le K \dfrac{|\delta x|}{|x|}$

dvs. enl. (b): $K \approx \dfrac{|\cos(x)||x|}{|\sin(x)|}$

(d) För vilka x är problemet illakonditionerat? (Dvs. K stort.)

Enl. (c) är K stort när $|\sin(x)| = 0$ men $|x| \ne 0$
dvs. för $x = n\pi$, $n \ne 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.7 (a) Sök framåt- och bakåtfel för approximationen $\sin(x) \approx x$ för $x = 0.1,\ 0.5$ resp. 1.0.

Framåtfel := $|\sin(x) - x|$ (exakt minus approximation)

Bakåtfel: Antag $\sin(\hat{x}) = x$ $\hat{x}$ störning av x, dvs. $\hat{x} = \arcsin(x)$

bakåtfel := $|\hat{x} - x|$ (stört värde minus exakt värde)

x	0.1	0.5	1.0
$\lvert\sin(x)-x\rvert$	0.000167	0.0206	0.159
$\lvert\arcsin(x)-x\rvert$	0.000167	0.0236	0.571

(b) Samma analys för $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$.

Framåtfel = $\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right|$, bakåtfel = $\left|x - \arcsin\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right|$

x	0.1	0.5	1.0
$\lvert\sin(x) - (x - \frac{x^3}{3!})\rvert$	0.0000000833	0.000259	0.00814
$\lvert x - \arcsin(x - \frac{x^3}{3!})\rvert$	0.0000000837	0.000295	0.0149

5.16 Visa att det relativa felet vid subtraktion $x - y$ begränsas av

$$\mu + 2\mu(1+\mu)\frac{\max\{|x|,|y|\}}{|x-y|}$$

vid IEEE-standard med avrundningsenhet μ. Relatera felet till kancellation och ge uttryck för felet i bakåtanalys.

Lösning Relativa felet: $\dfrac{|fl(fl(x) - fl(y)) - (x-y)|}{|x-y|} =$

$$= \frac{|(fl(x) - fl(y))(1+\delta_1) - (x-y)|}{|x-y|} = \frac{|(x(1+\delta_2) - y(1+\delta_3))(1+\delta_1) - (x-y)|}{|x-y|}$$

$$= \frac{|\delta_1(x-y) + (\delta_2 x - \delta_3 y)(1+\delta_1)|}{|x-y|} \le \frac{|\delta_1||x-y| + (|\delta_2||x| + |\delta_3||y|)(1+|\delta_1|)}{|x-y|}$$

$$\le \mu + \frac{(\mu|x| + \mu|y|)(1+\mu)}{|x-y|} = \mu + \mu(1+\mu)\frac{|x|+|y|}{|x-y|}$$

$$\le \mu + 2\mu(1+\mu)\frac{\max\{|x|,|y|\}}{|x-y|}$$

Om vi istället räknar på $\dfrac{|fl(x-y) - (x-y)|}{|x-y|}$, dvs. med x och y exakta så får vi

$$\frac{|fl(x-y) - (x-y)|}{|x-y|} \le \mu,$$

dvs. hela den andra termen kan härledas till kancellation.

Bakåtfel. Vi tänker oss istället att

$$fl(fl(x) - fl(y)) = x(1+\delta_2)(1+\delta_1) - y(1+\delta_3)(1+\delta_1) =: \bar{x} - \bar{y}$$

så $\left|\dfrac{\bar{x} - x}{x}\right| = \left|\dfrac{x(\delta_2 + \delta_1 + \delta_1\delta_2)}{x}\right| \le 2\mu + \mu^2$

och på samma sätt $\left|\dfrac{\bar{y} - y}{y}\right| \le 2\mu + \mu^2$

Lana 2013 Demo 10 (5)

5.18 Vi vill beräkna $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ utan att få problem med overflow resp. underflow. Hur?

Lösning: Vi vill undvika att kvadrera stora tal (som ger overflow) och små men icke-försumbara tal (som skulle försvinna genom underflow).

Detta kan lösas på följande sätt:

1. Beräkna först $m = \max_i\{|x_i|\}$
2. Beräkna $\|x\|_2 = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ m\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{m}\right)^2}, & m > 0 \end{cases}$

På detta sätt undviks båda problemen. Vektorn $\frac{x}{m}$ har största element 1 och bara försumbara element försvinner genom underflow.

5.22 x och $y \geq 0$ intilliggande tal i IEEE-DP $(2, 53, -1022, 1023)$.

(a) Vilket är minsta differensen av x och y?

Talen är tätast närmast 0 så minsta differens ges av differensen mellan 0 och det minsta positiva talet, alltså

$(0\cdot2^0 + 0\cdot2^{-1} + \dots + 0\cdot2^{-51} + 1\cdot2^{-52})\cdot2^{-1022} - 0 = 2^{-1074}$

Notera att IEEE tillåter "gradual underflow", dvs. första siffran $\neq 1$.

(b) Vilken är den största differensen?

Talen är som glesast kring det största representerbara talet, så största differens ges av differensen mellan det största och det näst största:

$$(1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} + \dots + 1\cdot2^{-51} + 1\cdot2^{-52})\cdot2^{1023} - (1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} + \dots + 1\cdot2^{-51} + 0\cdot2^{-52})\cdot2^{1023}$$

$$= 2^{-52}\cdot2^{1023} = 2^{971}$$

5.25 (a) Bestäm UFL för $(\beta, t, L, U) = (10, 3, -98, 98)$.

Lösning: $UFL = \beta^L = 10^{-98}$

(b) Vad ger $x - y$ i flyttalssystemet ovan om $x = 6.87\cdot10^{-97}$ och $y = 6.81\cdot10^{-97}$

Lösning $x - y = 0.60\cdot10^{-98} < UFL$ så vi får underflow $fl(x-y) = 0$.

(c) Vad ger $x - y$ om "gradual underflow" tillåts.

Lösning $x - y = 0.60\cdot10^{-98}$ kan representeras i flyttalssystemet om "gradual underflow" tillåts, så det är vad vi får.

Lana 2013 Demo 11 ①

6.2 Formulera Newtons metod för ekvationerna.

Allmänt: Newtons metod för $f(x)=0$: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

fås genom $f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1}-x_k) = 0$.

(a) $x^3-2x-5=0$ dvs. $f(x) := x^3-2x-5=0$, $f'(x) = 3x^2-2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-2x_k-5}{3x_k^2-2}$$

(b) $e^x = 3x$ dvs. $f(x) := e^x - 3x = 0$, $f'(x) = e^x - 3$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k}-3x_k}{e^{x_k}-3}$$

(c) $x\sin(x) = 1$ dvs. $f(x) := x\sin(x) - 1 = 0$, $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x\sin(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

6.8 (a) $f(x)$ har dubbelrot x^* som approximeras av $\hat{x}$. Visa

$$|\hat{x}-x^*|^2 \lesssim 2\left|\frac{f(\hat{x})}{f''(\hat{x})}\right|$$

Lösning Använd $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ för dubbelrot och Taylorutveckling

$$f(\hat{x}) \approx f(x^*) + f'(x^*)(\hat{x}-x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(\hat{x}-x^*)^2$$
$$= \frac{1}{2}f''(x^*)(\hat{x}-x^*)^2 \approx \frac{1}{2}f''(\hat{x})(\hat{x}-x^*)^2$$
$$\Rightarrow (\hat{x}-x^*)^2 \approx 2\left|\frac{f(\hat{x})}{f''(\hat{x})}\right|$$

(b) Pröva feluppskattningen för fyra newtoniterationer för $f(x) := (x-1)^2 = 0$ från $x_0 = 0$.

Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k-1)^2}{2(x_k-1)} = x_k - \frac{x_k-1}{2} = \frac{x_k+1}{2}$

k	x_k	$\lvert x_k-1\rvert^2$	$2\lvert f(x_k)/f''(x_k)\rvert$
0	0	1	1
1	1/2	1/4	1/4
2	3/4	1/16	1/16
3	7/8	1/64	1/64
4	15/16	1/336	1/336

Uppskattningen stämmer exakt! Varför?

$$|x_k-1|^2 = |f(x_k)| = 2\left|\frac{f(x_k)}{2}\right| = 2\left|\frac{f(x_k)}{f''(x_k)}\right| \text{ då } f''(x_k) \equiv 2$$

Lana 2013 Demo 11 (2)

6.9 (a) Visa att följande newtonmetod ger kvadratisk konvergens för dubbelrötter : $x_{k+1} = x_k - 2\,\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Lösning: Vi har att visa att $|x_{k+1} - x^*| \le C|x_k - x^*|^2$ för dubbelrot x^*.

Taylors formel ger

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \tfrac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2, \quad \xi \text{ mellan } x^* \text{ och } x_k$$

$$0 = f'(x^*) = f'(x_k) + f''(\eta)(x^* - x_k), \quad \eta \text{ mellan } x^* \text{ och } x_k$$

och iterationsformeln ger

$$0 = 2f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Detta ger

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \tfrac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2\right) \\ &\quad - (x^* - x_k)\left(f'(x_k) + f''(\eta)(x^* - x_k)\right) \\ &\quad - \left(2f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\right) \\ &= f'(x_k)(x^* - x_{k+1}) + \left(f''(\xi) - f''(\eta)\right)(x^* - x_k)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |x^* - x_{k+1}| = \underbrace{\left|\frac{f''(\xi) - f''(\eta)}{f'(x_k)}\right|}_{\text{blir detta någon konstant? } f'(x_k) \longrightarrow 0 \text{ då } x_k \longrightarrow x^*.} |x^* - x_k|$$

Mer Taylor:

$$\left|\frac{f''(\xi) - f''(\eta)}{f'(x_k)}\right| = \left|\frac{f''(\eta) + f^{(3)}(\zeta)(\xi - \eta) - f''(\eta)}{f'(x^*) + f''(\vartheta)(x^* - x_k)}\right| \qquad \zeta, \vartheta \text{ mellan } x^* \text{ och } x_k$$

$$= \frac{|f^{(3)}(\zeta)|\,|\xi - \eta|}{|f''(\vartheta)|\,|x^* - x_k|} \le \frac{|f^{(3)}(\zeta)|}{|f''(\vartheta)|} \qquad \text{ty } |\xi - \eta| \le |x^* - x_k|$$

så $|x^* - x_{k+1}| \le \left|\dfrac{f^{(3)}(\zeta)}{f''(\vartheta)}\right| |x^* - x_k|^2$, dvs. kvadratisk konvergens.

(b) Jämför denna metod och vanlig Newton för att finna dubbelrot $x^* = 2$ till $f(x) = x^3 - 7.5x^2 + 18x - 14$. Tag $x_0 = 1$.

	k	0	1	2	3	4
Newton:	x_k	1	1.4167	1.6725	1.8228	1.9070
"dubbelrotnewton":	x_k	1	1.8333	1.9921	2.0000	2.0000

Lana 2013 Demo 11 ③

6.10 Visa att Newtons metod konvergerar linjärt med asymptotisk konstant $\frac{1}{2}$ för dubbelrot x^* till $f(x)$.

Lösning Följande formel gäller: $|x^* - x_{k+1}| \le \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}\right| |x^* - x_k|^2$, ξ mellan x^* och x_k.

Men för dubbelrot gäller $f'(x_k) = f'(x^*) + f''(\eta)(x_k - x^*)$
$= f''(\eta)(x_k - x^*)$ för något η mellan x^* och x_k, dvs.

$$|x^* - x_{k+1}| \le \left|\frac{f''(\xi)}{2f''(\eta)(x^* - x_k)}\right| |x^* - x_k|^2 = \left|\frac{f''(\xi)}{2f''(\eta)}\right| |x^* - x_k|$$

alltså linjär konvergens.

När $x_k \to x^*$ gäller $\xi, \eta \to x^*$ så $\left|\frac{f''(\xi)}{2f''(\eta)}\right| \longrightarrow \frac{1}{2}$.

6.13 Vi beräknar $\sqrt{3}$ genom att lösa $x^2 - 3 = 0$ genom fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ för någon lämplig funktion $g(x)$. Avgör om metoden är lokalt konvergent i följande fall:

(a) $g(x) = 3 + x - x^2$

Lokal konvergens kan garanteras om $|g'(\sqrt{3})| < 1$. Vi har $|g'(\sqrt{3})| = |1 - 2\sqrt{3}| > 1$.

(b) $g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{3}$

$|g'(\sqrt{3})| = \left|1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right| < 1 \implies$ lokal konvergens.

(c) Vilken funktion $g(x)$ motsvarar Newtons metod?

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3}{2x_k} = \frac{x_k}{2} - \frac{3}{2x_k} =: g(x_k).$$

6.15 Lös $f(x) = 2 - x - e^x = 0$ med hybridmetoden Fas I: Intervallhalvering på $[-2, 2]$, Fas II: Newtons metod.

Fas I $f(-2) = 4 - e^{-2} > 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(2) = -e^2 < 0$
$\implies$ teckenbyte på $[0, 2]$.
$f(1) = 1 - e < 0 \implies$ teckenbyte på $[0, 1]$

Fas II $x_{k+1} = x_k - \frac{2 - x_k - e^{x_k}}{-1 - e^{x_k}}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ (mittpunkt på $[0, 1]$) ger

k	0	1	2	3
x_k	0.5000	0.4439	0.4429	0.4429

dvs. efter 3 iterationer har resultatet stabiliserats och vi konstaterar $x^* \approx 0.4429$.

Lana 2013 Demo 11 (4)

6.17 Formulera Newtons metod för systemen!

Allmänt: $f(x)=0$, $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ löses med

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)}$ där $J(x^{(k)})\,d^{(k)} = f(x^{(k)})$

och $J(x^{(k)})$ är Jacobianen för f i punkten $x^{(k)}$.

(a) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \iff f(x) := \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix} = 0$

med $J(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{cases} 2\sin(x_1) + \cos(x_2) - 5x_1 = 0 \\ 4\cos(x_1) + 2\sin(x_2) - 5x_2 = 0 \end{cases} \iff f(x) := \begin{bmatrix} 2\sin(x_1)+\cos(x_2)-5x_1 \\ 4\cos(x_1)+2\sin(x_2)-5x_2 \end{bmatrix} = 0$

med $J(x) = \begin{bmatrix} 2\cos(x_1) - 5 & -\sin(x_2) \\ -4\sin(x_1) & 2\cos(x_2) - 5 \end{bmatrix}$.

6.18 Betrakta $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_1 x_2 - 1 \end{bmatrix} = 0$.

(a) För vilka $x^{(0)}$ misslyckas Newtons metod?

Newtons metod: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)})$

där $J(x^{(k)})$ är Jacobian till f i punkten $x^{(k)}$.

Misslyckas om $J(x^{(0)})$ är singulär. Låt $x^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, vi får

$$J(x^{(0)}) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x^{(0)}} = \left.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}\right|_{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$$

dvs. $\det J(x^{(0)}) = a$ så misslyckande inträffar för $x^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ med $a = 0$.

(b) Visa i fallet då misslyckande ej sker att som mest två iterationer krävs.

Låt $x^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $a \neq 0$. Vi får $f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} a-1 \\ ab-1 \end{bmatrix}$, $J(x^{(0)})^{-1} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a & 0 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$

så $x^{(1)} = x^{(0)} - J(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b-1}{a} \end{bmatrix}$.

Om $\frac{b-1}{a} = 1$ så är vi klara (lösningen är $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$). Annars:

$f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b-1}{a} - 1 \end{bmatrix}$, $J(x^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b-1}{a} & 1 \end{bmatrix}$ så att

$$x^{(2)} = x^{(1)} - J(x^{(1)})^{-1} f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b-1}{a} - \left(\frac{b-1}{a} - 1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Klart på två iterationer!

Lana 2013 Demo 12 (1)

10.1 Visa att felet är proportionellt mot h^2 vid approximation

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Lösning Taylors formel ger:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \tfrac{1}{2}f''(x)h^2 \pm \tfrac{1}{6}f^{(3)}(\xi_\pm)h^3$$

så

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{2f'(x)h + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_+)h^3 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_-)h^3}{2h}$$

$$= f'(x) + \frac{h^2}{12}\left(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)\right)$$

dvs.

$$\left|f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| = \left|\frac{h^2}{12}\left(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)\right)\right|$$

$$\leq \frac{M}{6}h^2$$

om vi antar att $|f^{(3)}(x)| \leq M \quad \forall x$.

10.4 Bestäm en differensapproximation i termer av $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$ så att felet blir av ordning h^2.

Lösning Utgå från differenskvoter $f(x) \approx \frac{f(x+kh)-f(x)}{kh}$, $k=1,2$ med fel

$$f'(x) - \frac{f(x+kh)-f(x)}{kh} = \frac{k}{2}f''(x)h + \frac{k^2}{6}f^{(3)}(\xi_k)h^2$$

med ξ_k mellan x och $x+kh$, enl. Taylors formel. Alltså

$$f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2}f''(x)h + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_1)h^2$$

$$f'(x) - \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} = f''(x)h + \frac{2}{3}f^{(3)}(\xi_2)h^2$$

Multiplicera den första ekvationen med 2 och subtrahera den andra:

$$f'(x) - \underbrace{\frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}}_{} = \frac{1}{3}\left(f^{(3)}(\xi_1) - 2f^{(3)}(\xi_2)\right)h^2$$

alltså har denna approximation den önskade egenskapen.

10.6 Vi har tabeller över entalpi H_i och motsvarande temperatur T_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$ så att $T_{i+1} - T_i = 1 =: \tau$ för $i = 1, \ldots, 8$. Vi vill approximera $H'(T_5)$ m. h. a. Richardsonextrapolation samt ge en feluppskattning.

<u>Lösning</u> Gör extrapolation på centraldifferenser. Vi har

$$H'(T_i) = \frac{H_{i+k} - H_{i-k}}{2k\tau} + a_1(k\tau)^2 + a_2(k\tau)^4 + \ldots$$

(felutveckling m. h. a. Taylors formel). Alltså

$$H'(T_i) = \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\tau} + a_1\tau^2 + a_2\tau^4 + \ldots$$

$$H'(T_i) = \frac{H_{i+2} - H_{i-2}}{2\tau} + 4a_1\tau^2 + 16a_2\tau^4 + \ldots$$

så att

$$3H'(T_i) = \frac{4H_{i+1} - 4H_{i-1}}{2\tau} - \frac{H_{i+2} - H_{i-2}}{4\tau} - 12a_2\tau^4 + \ldots$$

dvs. $$H'(T_i) = \frac{-H_{i+2} + 8H_{i+1} - 8H_{i-1} + H_{i-2}}{12\tau} + \mathcal{O}(\tau^4)$$

Används denna differensapproximation på de givna tabellvärdena i kurskompendiet fås

$$H'(T_i) \approx 4.1818.$$

Vi uppskattar felet med skillnaden mot dubbel steglängd, dvs.

$$\text{fel} \lessapprox \left| \frac{-H_{i+2} + 8H_{i+1} - 8H_{i-1} + H_{i-2}}{12\tau} - \frac{-H_{i+4} + 8H_{i+2} - 8H_{i-2} + H_{i-4}}{24\tau} \right|$$

$$\approx 1.7083 \cdot 10^{-4}.$$

Lana 2013 Demo 12 (3)

10.7 Skriv ODE-problemen som system av första ordning!

(a) $y^{(3)} = y'' + ty$

Låt $x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y''$. Vi får

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_3 + tx_1 \end{cases}$$

(b) $y^{(3)} = \sin(y') + yy''\cos(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Samma notation som i (a) ger oss

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = \sin(x_2) + x_1x_3\cos(t), \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

10.8 Är systemet stabilt?

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösning Systemet är stabilt om alla egenvärden till matrisen A har negativ realdel.

Egenvärdena är -1 resp. -2 så systemet är stabilt.

10.11 Betrakta systemet $y' = -5y$, $y(0) = 1$.

(a) Är systemet stabilt?

Ja! Egenvärde $-5 < 0$.

(b) Är Eulers framåtmetod med steglängd $h = 0.5$ stabil?

Stabilitetsmåttet $|1 + h\lambda| = |1 - 0.5 \cdot 5| = 1.5 > 1 \Rightarrow$ ostabilt!

(c) Beräkna $y(0.5)$ med Euler framåt, steglängd 0.5.

$y(0.5) \approx y(0) + hy'(0) = 1 + 0.5 \cdot (-5) = -1.5$

"Uruselt" resultat. $y(t) = e^{-5t}$ är positiv och minskar i absolutbelopp, men approximationen gav ett negativt tal med större belopp än i utgångspunkten.

(d) Är Eulers bakåtmetod stabil för $h = 0.5$?

Stabilitetsmått $\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| = \left|\frac{1}{1 + 0.5 \cdot 5}\right| = \frac{1}{3.5} < 1 \Rightarrow$ stabilt!

(e) Beräkna $y(0.5)$ med Euler bakåt med $h = 0.5$. Vad blir felet?

$y(0.5) \approx y(0) + hy'(0.5) = \cancel{1 + 0.5} = y(0) - 0.5 \cdot 5 \cdot y(0.5)$

$\Rightarrow y(0.5) \approx \dfrac{y(0)}{1 + 0.5 \cdot 5} = \dfrac{1}{3.5}$

Exakt $y(0.5) = e^{-2.5}$ så felet $\left|e^{-2.5} - \frac{1}{3.5}\right| \approx 0.20$

Dana 2013 Demo 13 (1)

10.13 Gör en iteration för att lösa $y'(t) = -y(t)^2$, $y(0) = 1$ med Euler framåt som prediktor, Euler bakåt som korrektor, steglängd $h = 0.1$ och fixpunktsiteration i korrektorn.

Lösning Vi kan skriva processen i följande "algoritm"

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n - 0.1 y_n^2 \quad \text{(prediktor)}$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n - 0.1 (y_{n+1}^{(k)})^2 \quad \text{(fixpunktsiterationen i korrektorn)}$$

$$y_{n+1} = y_{n+1}^{(k)} \quad \text{för } k \text{ s.a. } |y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}| \text{ är "litet"}$$

$y_0 = y(0) = 1.$

Vi får

$$y_1^{(0)} = y_0 - 0.1 y_0^2 = 1 - 0.1 \cdot 1^2 = 0.9$$

$$y_1^{(1)} = y_0 - 0.1 (y_1^{(0)})^2 = 0.9190$$

$$y_1^{(2)} = y_0 - 0.1 (y_1^{(1)})^2 = 0.9155$$

$$y_1^{(3)} = y_0 - 0.1 (y_1^{(2)})^2 = 0.9162$$

$$y_1^{(3)} = y_0 - 0.1 (y_1^{(3)})^2 = 0.9161$$

$$y_1^{(4)} = y_0 - 0.1 (y_1^{(4)})^2 = 0.9161$$

$$y_1 = \underline{\underline{0.9161}}.$$

10.16 Betrakta $y' = Ay$, $y(0) = c$ med

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -100 & -1 \\ -1 & 3 & -10000 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

För vilka steglängder h är Euler framåt stabil?

Lösning Det krävs $|1 + h\lambda| < 1$ för alla egenvärden λ till A. Dessa egenvärden är (c.a.) -1, -100, resp. -10000 så vi måste ha

$$|1 - 10000h| < 1 \implies 10000h < 2 \implies \underline{\underline{h < 2 \cdot 10^{-4}}}.$$

Lana 2013 Demo 13 ②

7.1 Anpassa polynom på Newtons form till datapunkter $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$.

Lösning Newtons form: Till datapunkter (x_i, y_i), $i=0,\dots,n$ anpassas $p_{n-1}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \prod_{j=0}^{i} (x-x_j)$.

Här: $p_2(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x$

$$p_2(-1) = c_0 = 1$$
$$p_2(0) = c_0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1$$
$$p_2(1) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$
$$\therefore p_2(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x.$$

7.9 Kan man i allmänhet anpassa en kvadratisk spline till $n>2$ datapunkter så att den är

(a) kontinuerligt deriverbar?

Lösning Datapunkter (x_i, y_i), $i=1,\dots,n$

Spline $s(x) = s_i(x)$, $x_i \le x \le x_{i+1}$, $i=1,\dots,n-1$
$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2$$
Antalet variabler är alltså $3(n-1)$. (Tre per stycke, $n-1$ stycken)

Antalet villkor: Vi har följande kriterier att uppfylla:

$$\left.\begin{array}{l} s_i(x_i) = y_i, \quad i=1,\dots,n-1 \\ s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i=1,\dots,n-1 \end{array}\right\} \text{anpassning till data}$$
$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$, $i=1,\dots,n-2$ kontinuerlig derivata

totalt $3(n-1)-1$ villkor, dvs. underbestämt, alltså lösbart.

(b) två gånger kontinuerligt deriverbar?

Lösning Vi lägger till villkoren

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i=1,\dots,n-2$$
och får alltså totalt $4(n-1)-2$ villkor, i allmänhet ej linjärt beroende. Detta ger oss överbestämda olösbara system för $n>3$. För $n=3$ får vi 6 variabler och 6 villkor, så då är det möjligt (vi tar ett enda kvadratiskt polynom och anpassar till de tre punkterna).

Lana 2013 Demo 13 3

7.13 Bestäm splineinterpolation för $f(x) = x^2 - x$ i punkterna $x = 0, 1, 2$ (dvs. $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,2)$).

(a) Linjär spline.

$$s(x) = \begin{cases} a_1 + b_1 x, & 0 \le x \le 1 \\ a_2 + b_2 x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$s(0) = 0$, $s(1) = 0$, $s(2) = 2$ ger

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + b_1 = 0 \\ a_2 + b_2 = 0 \\ a_2 + 2b_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_2 = -2 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ -2 + 2x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

(b) Kvadratisk spline med $s'(0) = 0$.

$$s(x) = \begin{cases} a_1 + b_1 x + c_1 x^2, & 0 \le x \le 1 \\ a_2 + b_2 x + c_2 x^2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$s(0) = 0$, $s'(0) = 0$, $s(1) = 0$, $s'(1+) = s'(1-)$, $s(2) = 2$ ger

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ b_2 + 2c_2 = b_1 + 2c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 + 2b_2 + 4c_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \\ a_2 = 2 \\ b_2 = -4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - 4x + 2x^2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Lana 2013 Demo 13 (4)

7.14 Bestäm kvadratiska spline till punkterna

$(1,2)\,,\ (2,3)\,,\ (3,5)\,,\ (4,6)\,,\ (5,5)$

sådan att $s'(1) = 0$.

Lösning $s(x) = s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2\ ,\quad i \le x \le i+1\ ,\quad i = 1,2,3,4$

$s_1(1) = 2\,,\quad s_1(2) = 3\,,\quad s_1'(1) = 0$ ger

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 2 \\ a_1 + 2b_1 + 4c_1 = 3 \\ \quad\ b_1 + 2c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Notera $s_1'(2) = 2$

$s_2(2) = 3\,,\quad s_2(3) = 5\,,\quad s_2'(2) = 2$ ger

$$\begin{cases} a_2 + 2b_2 + 4c_2 = 3 \\ a_2 + 3b_2 + 9c_2 = 5 \\ \quad\ b_2 + 4c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Notera $s_2'(3) = 2$

$s_3(3) = 5\,,\quad s_3(4) = 6\,,\quad s_3'(3) = 2$ ger

$$\begin{cases} a_3 + 3b_3 + 9c_3 = 5 \\ a_3 + 4b_3 + 16c_3 = 6 \\ \quad\ b_3 + 6c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -10 \\ b_3 = 8 \\ c_3 = -1 \end{cases}$$

Notera $s_3'(4) = 0$

$s_4(4) = 6\,,\quad s_4(5) = 5\,,\quad s_4'(4) = 2$ ger

$$\begin{cases} a_4 + 4b_4 + 16c_4 = 6 \\ a_4 + 5b_4 + 25c_4 = 5 \\ \quad\ b_4 + 8c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = -10 \\ b_4 = 8 \\ c_4 = -1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad s(x) = \begin{cases} 3 - 2x + x^2\ , & 1 \le x \le 2 \\ -1 + 2x\ , & 2 \le x \le 3 \\ -10 + 8x - x^2\ , & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

dana 2013 Demo 14 1

8.1 Approximera $\int_0^1 x^3 dx$ m. h. a. trapetsregeln och Simpsons regel. Ge feluppskattning i båda fall.

Lösning Trapetsregeln: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$

$$\text{fel} \le \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

ger här $\int_0^1 x^3 dx \approx \frac{0^3+1^3}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ med felgräns $\frac{1^3}{12}\cdot 6\xi \le \frac{1}{2}$.

Simpsons regel: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}(b-a)$

$$\text{fel} \le \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

ger här $\int_0^1 x^3 dx \approx \frac{0^3+4(\frac{1}{2})^3+1^3}{6}\cdot 1 = \frac{1}{4}$

fel ≤ 0 $(f^{(4)}(\xi) \equiv 0)$, dvs. exakt.

8.3 Låt $\int_a^b f(x)dx$ approximeras av $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ genom polynominterpolation. Visa att $\sum_{i=1}^n w_i = b-a$.

Lösning Vi har alltså approximerat $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$ där p_n interpolerar f. Vi kan skriva

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)} \quad \text{dvs.}$$

$$\int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)} = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}dx\, f(x_i)$$

alltså $w_i = \int_a^b \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}dx$ så att

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}dx$$

$$= \int_a^b g_n(x)\,dx$$

där $g_n(x)$ interpolerar $g(x)\equiv 1$, alltså $g_n(x)\equiv 1$.

Vi får

$$\sum_{i=1}^n w_i = \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b 1\,dx = b-a.$$

dana 2013 Demo 14 (2)

8.6 Acceleration $a(t)$ för raket avskjuten från höjd $h(0)=0$ med initialhastighet $v(0)=0$ given i tidpunkter t_i, $i=1,\dots,7$. (Dvs. vi har (t_i, a_i), $i=1,\dots,7$). Bestäm approximationer till $v(t_7)$ resp. $h(t_7)$.

Lösning Vi använder trapetsregeln:

$$v(t_m) \approx v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1}+a_i}{2}(t_{i+1}-t_i) =: \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_{i+1}+a_i}{2} k_i$$

med $k_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1,\dots,6$.

$$h(t_n) \approx h_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{v_{j+1}+v_j}{2} k_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{2}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{a_{i+1}+a_i}{2} k_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_{i+1}+a_i}{2} k_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{2}\left(\sum_{i=1}^{j-1} k_i(a_{i+1}+a_i) + \frac{a_{j+1}+a_j}{2} k_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{k_i k_j (a_{i+1}+a_i)}{4} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j^2 (a_{j+1}+a_j)}{2}$$

Dessa approximationer ges med givna värden på (a_i, t_i)

$$v_7 \approx 2.153 \cdot 10^3, \quad h_7 \approx 6.075 \cdot 10^4$$

8.9 $I = \int_a^b f(x)\,dx$ approximeras med trapetsmetoden med steglängd $h = 0.2$. Felet uppskattas då till 0.001. Hur liten steglängd h krävs för att få fel 0.00001?

Lösning Låt I_h vara trapetsmetodsapproximationen av I med steglängd h. Vi har feluppskattning

$$|I - I_h| \le Ch^2, \quad C \text{ någon konstant.}$$

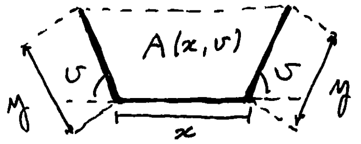
Alltså gäller $C \cdot 0.2^2 = 0.001 \Rightarrow C = 0.025$.

Vi vill bestämma h så att $Ch^2 = 0.00001$, dvs.

vi får $h = \sqrt{\frac{0.00001}{C}} = 0.02$.

Lana 2013 Demo 14 3

11.5



Tvärsnitt av timmerränna.

$x + 2y = 6$ (meter).

(a) Bestäm $A(x,v)$.

Lösning "Elementär" geometri ger

$$A(x,v) = x\,y\sin(v) + 2 \cdot \frac{y\sin(v)\,y\cos(v)}{2}$$
$$= \frac{6x - x^2}{2}\sin(v) + \frac{(6-x)^2}{8}\sin(2v)$$

(b) Formulera ekvationsystem för att finna stationära punkter till $A(x,v)$.

Lösning

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} (3-x)\sin(v) + \dfrac{x-6}{4}\sin(2v) = 0 \\[2mm] \dfrac{6x-x^2}{2}\cos(v) + \dfrac{(6-x)^2}{4}\cos(2v) = 0 \end{cases}$$

(c) Formulera Newtons metod för att finna de stationära punkterna.

Lösning

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ v^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ v^{(k)} \end{bmatrix} - J(x^{(k)}, v^{(k)})^{-1}\,\nabla A(x^{(k)}, v^{(k)})$$

med $\nabla A(x,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial v} \end{bmatrix}$ som ovan och

Jacobian (Hessian till A)

$$J(x,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 A}{\partial x \partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 A}{\partial x \partial v} & \dfrac{\partial^2 A}{\partial v^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(v) + \frac{1}{4}\sin(2v) & (3-x)\cos(v) + \frac{x-6}{2}\cos(2v) \\[2mm] (3-x)\cos(v) + \frac{x-6}{2}\cos(2v) & \underbrace{\cancel{}}_{-\frac{6x-x^2}{2}\sin(v) + \frac{(6-x)^2}{2}\cos(2v)} \end{bmatrix}$$

11.7 Modell $y(t) = c_0 + c_1 e^{-c_2 t}\sin(c_3 t)$. Data (t_i, y_i), $i = 1, \dots, m$.

Formulera residual, Jacobian och det minstakvadratproblem som ska lösas vid varje iteration med Gauss-Newton.

Lösning Låt $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$. Residual $r(c) = (r_1(c), \dots, r_m(c))$ med $r_i(c) = c_0 + c_1 e^{-c_2 t_i}\sin(c_3 t_i)$.

Jacobian

$$J(c) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial c_0} & \dfrac{\partial r_1}{\partial c_1} & \dfrac{\partial r_1}{\partial c_2} & \dfrac{\partial r_1}{\partial c_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial r_m}{\partial c_0} & \dfrac{\partial r_m}{\partial c_1} & \dfrac{\partial r_m}{\partial c_2} & \dfrac{\partial r_m}{\partial c_3} \end{bmatrix}$$

med $\dfrac{\partial r_i}{\partial c_0} = 1$, $\dfrac{\partial r_i}{\partial c_1} = e^{-c_2 t_i}\sin(c_3 t_i)$, $\dfrac{\partial r_i}{\partial c_2} = -t_i c_1 e^{-c_2 t_i}\sin(c_3 t_i)$

$\dfrac{\partial r_i}{\partial c_3} = t_i c_1 e^{-c_2 t_i}\cos(c_3 t_i)$.

Vid Gauss-Newton approximeras vi $\|r(c)\|_2 \approx \|r(c^{(k)}) + J(c^{(k)})(c^{(k+1)} - c^{(k)})\|_2$

dvs. vi löser minstakvadratproblemet

$$J(c^{(k)})\,c^{(k+1)} = J(c^{(k)})\,c^{(k)} - r(c^{(k)})$$

med J och r som ovan.

Lana 2013 Demo 14 (4)

11.10 $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2$.

(a) Var antas f sitt minimum?

Lösning: Som synes gäller $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ men $f(x) = 0$ omm $x = (1,1)$.
Dvs. minimum antas i $x = (1,1)$.

(b) Gör en iteration med Newtons metod från $x^{(0)} = (2,2)$.

Gradient: $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1^3 + x_1 - 2x_1x_2 - 1 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix}$

Hessian: $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 2x_2 + 1 & -2x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \nabla^2 f(x^{(0)})^{-1} \nabla f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

(c) Vad förbättrades?

Svar: Funktionsvärdet. $f(x^{(0)}) = \frac{5}{2}$, $f(x^{(1)}) = \frac{401}{1250} < f(x^{(0)})$.

(d) Vad försämrades?

Svar: Avståndet till exakta lösningen $x^* = (1,1)$.
$\|x^{(0)} - x^*\|_2 = \sqrt{2}$, $\|x^{(1)} - x^*\|_2 = \sqrt{137}/5 > \|x^{(0)} - x^*\|_2$.

(e) En iteration till med Newtons metod:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \nabla^2 f(x^{(1)})^{-1} \nabla f(x^{(1)}) = \dots \approx \begin{bmatrix} 1.0593 \\ 0.5733 \end{bmatrix}$$

$f(x^{(2)}) \approx 0.1523 < f(x^{(1)})$

$\|x^{(2)} - x^*\|_2 \approx 0.4308 < \|x^{(1)} - x^*\|_2$.

11.11 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ med $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - x^Tb + c$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisk och positivt definit, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att Newtons metod ger en stationär punkt i en iteration, oavsett $x^{(0)}$.

Lösning: Det gäller att* $\nabla f(x) = \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}A^Tx - b = Ax - b$ (A symmetrisk)
$\nabla^2 f(x) = A$, så Newtons metod ger
$$x^{(1)} = x^{(0)} - \nabla^2 f(x^{(0)})^{-1} \nabla f(x^{(0)}) = x^{(0)} - A^{-1}(Ax^{(0)} - b) = A^{-1}b$$
(A är inverterbar eftersom den är symmetrisk och positivt definit.)
$$\nabla f(x^{(1)}) = \nabla f(A^{-1}b) = AA^{-1}b - b = 0,$$ dvs. stationär punkt.

(b) Vad händer om man försöker minimera med steepest descent med $x^{(0)}$ sådan att $x^{(0)} - x^*$ är en egenvektor till A? (x^* stationär punkt.)

Lösning SD: $x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(x^{(0)}) = x^{(0)} - \alpha_0(Ax^{(0)} - b) = x^{(0)} - \alpha_0(A(x^{(0)} - x^*) + Ax^* - b)$
$$= x^{(0)} - \alpha_0 A(x^{(0)} - x^*) - \alpha_0(Ax^* - b) = x^{(0)} - \alpha_0 A(x^{(0)} - x^*) - \underbrace{\alpha_0 \nabla f(x^*)}_{= 0 \text{ (stationär punkt)}}$$
$$= x^{(0)} - \alpha_0 \lambda (x^{(0)} - x^*) = x^{(0)} - (x^{(0)} - x^*) = x^*$$
när vi väljer $\alpha_0 = \frac{1}{\lambda}$ ($\lambda > 0$ ty A positivt definit).

Slutsats: Konvergens i en iteration! (Men bara för bra startgissning...)

Lana 2013 Runo 14 (Extra)

Derivering av $\frac{1}{2}x^TAx - x^Tb =: g(x)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(g(x+he_i) - g(x)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}(x+he_i)^TA(x+he_i) - (x+he_i)^Tb - \frac{1}{2}x^TAx + x^Tb\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}he_i^TAx + \frac{1}{2}hx^TAe_i + \frac{1}{2}h^2e_i^TAe_i - he_i^Tb\right)$$

$$= \frac{1}{2}e_i^TAx + \frac{1}{2}e_i^TA^Tx - e_i^Tb + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} he_i^TAe_i$$

$$= \frac{1}{2}e_i^TAx + \frac{1}{2}e_i^TA^Tx - b_i$$

så
$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}e_1^TAx\\ \vdots \\ e_n^TAx\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}e_1^TA^Tx\\ \vdots \\ e_n^TA^Tx\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}IAx + \frac{1}{2}IA^Tx - b = \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}A^Tx$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{2}e_i^T(A+A^T)(x+he_j) - b_i$$

$$- \frac{1}{2}e_i^T(A+A^T)x + b_i\Big)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2}e_i^T(A+A^T)e_j\right) = \frac{1}{2}e_i^TAe_j + \frac{1}{2}e_i^TA^Te_j$$

$$= \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji}$$

ger $\nabla^2 g(x) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T$

Lana 2013 Demo 14 (5)

11.14 $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$

(a) Bestäm kritiska punkter till f.

Lösning $\nabla f(x) = 6\begin{bmatrix} (x_1-x_2)^2 - x_1 + x_2 \\ -(x_1-x_2)^2 + x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad x = (0,0),\ (1,0),\ (0,-1)$ resp. $(-1,-1)$.

(b) Klassificera de kritiska punkterna.

Lösning Kontrollera egenvärden till Hessianen.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 1 & -(2x_1 - 2x_2 - 1) \\ -(2x_1 - 2x_2 - 1) & 2x_1 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ har $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dvs. $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ sadelpunkt

$\nabla^2 f(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ har $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow$ minimipunkt

$\nabla^2 f(0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ har samma egenvärden som $\nabla^2 f(0,0) \Rightarrow$ sadelpunkt

$\nabla^2 f(-1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ har egenvärden $\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} < 0 \Rightarrow$ maximipunkt.

Lana 2013 Demo 15 1

10.25 $\begin{cases} y'' - y^3 = t \\ y(a) = C_1 \\ y(b) = C_2 \end{cases}$

(a) Skriv på form lämplig för inskjutning.

Lösning Vi vill samla all data i punkten $t=a$ och ansätter därför $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_2(a) = s$. Vi får

$$\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(a) = C_1 \\ x_2' = x_1^3 + t, & x_2(a) = s \end{cases}$$

och har att bestämma s s.a. $x_1(b) = C_2$.

(b) Formulera sekantmetoden för att bestämma s.

Lösning Beteckna med $x_1(b,s)$ lösningen i punkten b för givet värde s. Vi vill alltså lösa $x_1(b,s) = C_2$ med sekantmetoden:

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} - \frac{x_1(b,s^{(k)}) - C_2}{\dfrac{x_1(b,s^{(k)}) - x_1(b,s^{(k-1)})}{s^{(k)} - s^{(k-1)}}}$$

$$= s^{(k)} - \frac{(x_1(b,s^{(k)}) - C_2)(s^{(k)} - s^{(k-1)})}{x_1(b,s^{(k)}) - x_1(b,s^{(k-1)})}$$

(c) Vi får en startgissning $s^{(0)}$ genom Euler framåt med ett steg:

$$x_1(b,s^{(0)}) \approx x_1(a) + (b-a)x_1'(a) = x_1(a) + (b-a)x_2(a) = C_1 + (b-a)s^{(0)} = C_2$$

$$\Rightarrow s^{(0)} = \frac{C_2 - C_1}{b-a}$$

(d) Vi löser problemet med sekantmetoden och $a=0$, $b=1$, $C_1=1$, $C_2=-1$.
Enl. ovan: $s^{(0)} = -2$. Vi behöver en startgissning till och tar för enkelhets skull $s^{(1)} = 0$.

Om vi beräknar $x_1(b,s)$ m.h.a. ode45 ger detta via del (b)

$s^{(2)} \approx -2.2129$, $s^{(3)} \approx -2.2491$, $s^{(4)} \approx -2.2552$

$s^{(5)} \approx -2.2551$, $s^{(6)} \approx s^{(5)}$

Vi får $x_1(b, s^{(6)}) \approx -1.0000$.

Lana 2013 Demo 15 (2)

10.27 $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = f(x), & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 1, \quad y'(1) = 2 \end{cases}$

Formulera en numerisk metod och motsvarande diskreta ekvationer baserat på central differenskvot.

Lösning Gör en likformig indelning $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$ av intervallet med $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{N} =: h$, $k = 0, \dots, N-1$.

Notation: $y(x_k) = y_k$, $f(x_k) = f_k$, $k = 0, \dots, N$.

Med central differenskvot approximerar vi

$$y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

vilket i differentialekvationen ger

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{h} - 3y_k = f_k$$

$$\Longrightarrow (1-h)y_{k-1} + (-2-3h^2)y_k + (1+h)y_{k+1} = h^2 f_k, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

För randvillkoren använder vi framåt-/bakåtdifferens:

$$y'(0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'(1) \approx \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$$

så att $-y_0 + y_1 = h$, $-y_{N-1} + y_N = 2h$.

Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 1-h & -2-3h^2 & 1+h & & & \\ & 1-h & -2-3h^2 & 1+h & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-h & -2-3h^2 & 1+h \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h^2 f_1 \\ \vdots \\ \\ h^2 f_{N-1} \\ 2h \end{bmatrix}$$

10.30 Antag att vi har en ODE-lösare (t.ex. ode45 i Matlab) och vill beräkna $\int_a^b g(x)\,dx$ med hjälp av denna. Hur går vi till väga?

Lösning Låt $I(t) = \int_a^t g(x)\,dx$. Vi vill beräkna $I(b)$.

Derivering m.a.p. t ger $I'(t) = g(t)$, $a \le t \le b$

och $I(a) = \int_a^a g(x)\,dx = 0$, dvs. vi får begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} I'(t) = g(t), & a \le t \le b \\ I(a) = 0 \end{cases}$

vilket löses med vår ODE-lösare. Efter detta beräknas $I(b)$.

I Matlab med ode45 skulle detta kunna se ut som

```
I = deval(ode45(@(t,y) g(t), [a,b], 0), b)
```

eller ~

med givna g, a och b.

Lana 2013 - Ecka

Konvergensordning för sekantmetoden.

Antag att $f(x)$ har enkel rot x^* vilken vi söker med sekantmetoden,

$$x^{n+1} = x^n - f(x^n)\frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n) - f(x^{n-1})}$$

samt att x^0 och f är sådana att metoden konvergerar, dvs. $x^n \to x^*$.

Då gäller att konvergensordningen $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, vilket kan härledas som följer:

Taylors formel ger $\frac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}} = \frac{f(x^{n-1}) + f'(\xi_n)(x^n - x^{n-1}) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$

$= f'(\xi_n)$

för något ξ_n mellan x^n och x^{n-1}. Vi får alltså

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(\xi_n)} \Rightarrow x^{n+1} - x^* = x^n - x^* - \frac{f(x^n)}{f'(\xi_n)}$$

och $f(x^n) = f(x^*) + f'(x^*)(x^n - x^*) + \frac{1}{2}f''(\eta_n)(x^n - x^*)^2$ med $f(x^*) = 0$ ger

$$(x^{n+1} - x^*) = (x^n - x^*) - \frac{f'(x^*)}{f'(\xi_n)}(x^n - x^*) + \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)}(x^n - x^*)^2$$

$$\approx \left(1 - \frac{f'(x^*)}{f'(\xi_n)}\right)(x^n - x^*)$$ (Vi försummar den kvadratiska termen)

$$1 - \frac{f'(x^*)}{f'(\xi_n)} = \frac{f'(\xi_n) - f'(x^*)}{f'(\xi_n)} = \frac{f'(x^*) + f''(\zeta_n)(\xi_n - x^*) - f'(x^*)}{f'(\xi_n)}$$

$$= \frac{f''(\zeta_n)(\xi_n - x^*)}{f'(\xi_n)}$$

dvs. $|x^{n+1} - x^*| \approx \left|\frac{f''(\zeta_n)}{f'(\xi_n)}\right| |\xi_n - x^*| |x^n - x^*| \leq C_n |x^{n-1} - x^*| |x^n - x^*|$

för någon konstant C_n, eftersom $|\xi_n - x^*| \leq |x^{n-1} - x^*|$.

Vi vill skriva detta som $|x^{n+1} - x^*| \leq C_n |x^n - x^*|^p$ där p är konvergensordningen, dvs.

$$C_n|x^{n+1} - x^*|^p = C_n|x^n - x^*||x^{n-1} - x^*| \leq C_n C_{n-1}|x^{n-1} - x^*|^{1+p}$$

$$\Rightarrow |x^n - x^*| = (C_n C_{n-1})^{1/p} |x^{n-1} - x^*|^{(1+p)/p}$$

dvs. $p = \frac{1+p}{p} \Rightarrow p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.