TMA671 - Linjär algebra och numerisk analys

Föreläsning 19/3

Lektion 1:

Olika matematiska storheter kan ha gemensamma egenskaper:

t.ex. slutenhet: för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och

- $x, y \in \mathbb{R}^n$ så är $\alpha x + \beta y \in \mathbb{R}^n$
- $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ så är $\alpha A + \beta B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $f, g \in C(\mathbb{R})$ så är $\alpha f + \beta g \in C(\mathbb{R})$

Definition 1.1 (Linjärt rum)

Ett linjärt rum över $\mathbb{R}$ är en icke-tom mängd V där addition $\oplus : V \times V \to V$ och multiplikation $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ är definierade så att:

1. för alla $u, v \in V$ finns ett entydigt bestämt element $u \oplus v \in V$
2. för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ och $u \in V$ finns ett entydigt element $\alpha \odot u \in V$

och följande axiom/räknelagar är uppfyllda för alla $u, v, w \in V$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

3. $u \oplus v = v \oplus u$ (kommutativitet)
4. $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (associativitet)
5. $\exists 0 \in V$ så att $0 \oplus u = u \oplus 0 = u$ (nollelement)
6. för varje $u \in V$ så finns ett element $-u \in V$ så att $u \oplus -u = -u \oplus u = 0$ (addera inversen till u)
7. $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha\beta) \odot u$ (associativitet)
8. $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$ (distributivitet)
9. $(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$ (distributivitet)
10. $1 \odot u = u$ (enhetselement)

Notation:

Det reella linjära rummet i Definition 1.1. beskrivs av $(V, \oplus, \odot; \mathbb{R})$

Om vi ersätter $\mathbb{R}$ med $\mathbb{C}$ i Def 1.1. kallas $(V, \oplus, \odot; \mathbb{C})$

Om $\oplus$, $\odot$ och $\mathbb{R}$ är underförstådda kallar vi V ett <u>linjärt rum</u>

Några konsekvenser av 1 - 10:

- $u = v \overset{1}{\Longrightarrow} u \oplus w = v \oplus w \quad \forall w \in V$ 11
- Nollelementet är entydligt bestämt:

  <u>Bevis:</u>

  Antag även $0' \in V$ uppfyller 5.

  Då gäller speciellt $0' \oplus 0 = 0$, men sedan 0 också är nollelement,

  $0' \oplus 0 = 0' \Longrightarrow 0' = 0$ ∎
- För alla $u \in V$ är additiva inversen unik.

  <u>Bevis:</u>

  Antag även V är additiv invers till u

  $\Longrightarrow v \overset{5}{=} v \oplus 0 \overset{6}{=} v \oplus (u \oplus (-u)) \overset{4}{=} (v \oplus u) \oplus (-u) = 0 \oplus (-u) \overset{5}{=} -u$ ∎
- $(-1) \odot u = -u \quad \forall n \in V$ 13
- $0 \in \mathbb{R} \odot u = 0 \in V \quad \forall u \in V$ 14
- $\alpha \odot 0 = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- Upprepad användning 4 ger att summan $u_1 \oplus u_2 \oplus \dots \oplus u_n$ för $u_1, \dots u_n \in$

Exempel 1.1

$\boxed{b}$ Mängden $\mathbb{R}^n$ med

$x \oplus y := x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\alpha \odot x := \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ för $x, y \in \mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$

Nollvektorn: $0 = (0, \dots, 0)$

Additiva inversen: $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$

Räknelagarna 3 - 10 håller som följd av räknelagarna för reella tal

3: $x \oplus y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y \oplus x$

$\boxed{d.}$ $F(I) :=$ mängden av alla reellvärda funktioner på intervallet $I \subset \mathbb{R}$ med $f \oplus g := f + g$ och $\alpha \odot f = \alpha f$ för $f, g \in F(I)$ & $\alpha \in \mathbb{R}$

Dvs. $\left.\begin{aligned} (f \oplus g)(t) &= f(t) + g(t) \\ (\alpha \odot f)(t) &= \alpha f(t) \end{aligned}\right\} \forall t \in I$

Nollelement $0 \in F(I)$: $0(t) = 0 \quad \forall t \in I$

Additiva inversen: $(-f)(t) = -f(t) \quad \forall t \in I$

$\boxed{f.}$ Mängden $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ med

$\left.\begin{aligned} u \oplus v &= uv \\ \alpha \odot u &= u^\alpha \end{aligned}\right\}$ för $u, v \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Verifiering 3 - 10 i storgruppsövning

Definition 1.2 Underrum

Om $(V, \oplus, \odot)$ är ett linjärt rum och $M \subset V$ är en delmängd sådan att också $(M, \oplus, \odot)$ är ett linjärt rum, så sägs $(M, \oplus, \odot)$ vara ett underrum av $(V, \oplus, \odot)$.

Sats 1.1.

En icke-tom delmängd $M \subset V$ är ett underrum av V omm

$$\left.\begin{array}{l} u, v \in M \Rightarrow u \oplus v \in M \\ u \in M, \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \odot u \in M \end{array}\right\} \ (15)$$

eller ekvivalent omm

$$u, v \in M, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \odot u \oplus \beta \odot v \in M \quad (16)$$

Bevis: (M underrum av $V \Leftrightarrow$ (15))

$\Rightarrow$: M är ett linjärt rum $\Rightarrow$ (1) & (2) gäller $\Rightarrow$ (15) gäller

$\Leftarrow$: (Måste verifiera att (1) - (10) gäller i M)

(15) implicerar att (1) & (2) gäller i M.

Sedan (3) - (10) gäller i hela V och därmed speciellt i $M \subset V$

förutsatt (i) $0 \in M$ och

(ii) $u \in M \Rightarrow -u \in M$

(i): För $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$ och $u \in M$ så gäller

$$0 \overset{(15)}{\in} M \ \odot u \overset{(14)}{=} 0$$

(ii): $\alpha = -1$, $u \in M \Rightarrow -u \overset{(13)}{=} (-1) \odot u \overset{(15)}{\in} M$ $\boxtimes$

Exempel 1.3.

För linjära rummet $\mathbb{R}^3$ med $\oplus$, $\odot$ som definierade i Ex 1.1 (b) är följande underrum:

a) $M = \{0\}$ punkt av dimension 0

b) $M = \{tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ var $u \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

M är linjen genom origo med dim 1.

c) $M = \{su + tv \mid s,t \in \mathbb{R}\}$ $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $u \neq v$

planet genom origo med normalvektorn $n = u \times v$ och dim 2

d) $M = \mathbb{R}^3$

Verifiering av att M i b) är underrum av $\mathbb{R}^3$

$u_1, u_2 \in M$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ så att

$u_1 = t_1 u$ & $u_2 = t_1 u$

$\Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha t_1 + \beta t_2) u \in M$ (så (16) gäller) ∎

Exempel 1.5 $\{1, t, \ldots = \{t^n\}_{n=0}^{\infty}$

Mängden $C[a,b]$ är underrum av $F[a,b]$ (se Ex 1.1 d))

Verifiering: $f, g \in C[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in C[a,b]$ så (16) gäller ∎

Affina rum

Linjer, plan osv som inte går genom origo kan vara linjära rum (sedan de inte innehåller nollelementet), men det finns koppling:

Definition 1.3.

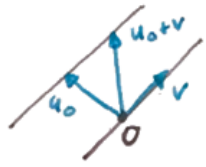
En delmängd $M \subset V$ kallas affin om det finns en $u_0 \in V$ och ett underrum U av V så att:

$$M = u_0 \oplus U = \{ u_0 \oplus u \mid u \in U \}$$

Exempel:

$V = \mathbb{R}^2$, $u_0 = (-1, 1)$, $v = (1, 1)$ och $M = \{ u_0 + tv \mid t \in \mathbb{R} \}$

$U = \{ tv \mid t \in \mathbb{R} \}$



Storgruppsövning 19/3

Johannes, kap 1 (upp 2, 4, 6, 8, 10)

(2) Låt V vara mängden av alla positiva tal med operationerna

$a \oplus b = a \cdot b \quad \forall a, b \in V$

$\lambda \odot b = b^{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Visa att V är ett vektorrum (linjärt rum)

Lösning:

Metod: Kontrollera de 10 reglerna i Definition 1 på sidan 1 i boken håller.

(1) Sluten under addition

$a, b \in V \Rightarrow a \oplus b \in V \qquad a \oplus b = \underset{>0}{a} \cdot \underset{>0}{b} \in V$ ok!

(2) Sluten under multiplikation med skalär

$\lambda \in \mathbb{R}$ skalär $a \in V \Rightarrow \lambda \odot a \in V \qquad \lambda \odot a = a^{\lambda}$

Tre fall:

$\lambda < 0 \Rightarrow a^{-\lambda} > 0$

$\lambda = 0 \Rightarrow a^{0} = 1 > 0$

$\lambda < 0 \Rightarrow a^{\lambda} > 0$ ok!

(3) Kommutativ addition

$a, b \in V \qquad a \oplus b = b \oplus a \ ? \qquad a \oplus b = a \cdot b = b \cdot a = b \oplus a$ ok!

(4) Associativ lag

$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

$\Rightarrow (a \oplus b) \oplus c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \oplus (b \oplus c)$ ok!

$\longrightarrow$

⑤ Nollelement

Det skall finnas en nolla m.a.p. addition $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$

Vår nolla är talet $1 \in V$ $\quad a \oplus 1 = a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1 \oplus a = a$ ok!

⑥ Additiv invers

$\forall a \in V \ \exists a^{-1} \in V: \ a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = 0 \in V$

additiv invers $1/a$ för att $a \oplus 1/a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ok!

⑦ Associativ lag

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ c \in V$

$\alpha \odot (\beta \odot c) = (\alpha \beta) \odot c$

$\alpha \odot (\beta \odot c) = \alpha \odot (c^{\beta}) = (c^{\beta})^{\alpha} = c^{\alpha \cdot \beta} = (\alpha \beta) \odot c$ ok!

⑧ Distributiv lag

$\alpha \in \mathbb{R}, \ b, c \in V$

$\alpha \odot (b \oplus c) = \alpha \odot b \oplus \alpha \odot c$

$\alpha \odot (b \oplus c) = \alpha \odot (b \cdot c) = (b \cdot c)^{\alpha} = b^{\alpha} \cdot c^{\alpha} = \alpha \odot b \oplus \alpha \odot c$ ok!

⑨ Distributiv lag

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ c \in V$

$(\alpha + \beta) \odot c = \alpha \odot c \oplus \beta \odot c$

$(\alpha + \beta) \odot c = c^{\alpha + \beta} = c^{\alpha} \cdot c^{\beta} = \alpha \odot c \oplus \beta \odot c$ ok!

⑩ enhetselement

Skall finnas en "etta" $1 \odot u = u$

1 är 1 ty $u' = u$ för positiva tal u ok!

(4) Låt V vara första kvadranten i xy-planet dvs $V = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ med operationerna $u \oplus v = u + v$ och $\lambda \odot u = \lambda \cdot u$

a) om $u, v \in V \Rightarrow u \oplus v \in V$?

b) om $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \Rightarrow \lambda \odot u \in V$?

c) är V ett linjärt vektorrum?

Lösning:

a) Tag $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

V första kvadranten $\quad \underbrace{u \oplus v}_{\in V} = u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ JA!

b) Ligger $\lambda \cdot u \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$?

Nej Tag ex $\lambda = -1$

$$\underbrace{-1 \odot u}_{\notin V} = -1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Nej vi är inte i ett linjärt rum!

---

(6) Konstruera en linje i $\mathbb{R}^2$ som inte går genom origo & inte är sluten under "vanlig" addition i $\mathbb{R}^2$

Lösning: Tag linjen $y = x + 1$ $\quad V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$

tag 2 punkter $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ligger $P_1 + P_2$ i V? $\quad 3 \neq 1 \cdot 1 + 1 = 2$ Nej!

(8) Vilka av följande delmängder av $P_n = \{(p_n / t)$ är polynom av grad $n\}$ är underrum?

Def: Underrum

V vektorrum, $S \subseteq V$ delmängd icke tom

$u_1, u_2 \in S \Rightarrow u_1 \oplus u_2 \in S$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad u_1 \in S \Rightarrow \lambda \odot u_1 \in S$

a) $p(t) = at^2$

b) $p(t) = a + t^2$ med $a \in \mathbb{R}$

c) $p(0) = 0$

d) $2 \cdot p(0) = p(1)$

e) $p(t) \geq 0$ då $0 \leq t \leq 1$

f) $p(t) = p(1-t) \ \forall t$

g) koefficienterna är heltal

Generellt, hur ser $p \in P_n$ ut?

tag $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ n-stycken skalärer

$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \ldots + a_n \cdot t^n$

(1) Addition Givet $p_1, p_2 \in P_n$ så definierar vi $p_1 + p_2 \in P_n$ som

$(p_1 \oplus p_2)(t) = (a_{01} + a_{02}) + (a_{11} + a_{12})t + (a_{21} + a_{22})t^2 + \ldots + (a_{n1} + a_{n2})t^n$

(2) Mult. med skalär $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in P_n$

$(\lambda \odot p)(t) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2 + \ldots + (\lambda a_n)t^n$

$\longrightarrow$

Lösning:

a) $V = \{ p \in P_n : p(t) = at^2 , a \in \mathbb{R} \}$

tag $p_1, p_2 \in V$: $p_1(t) = a_1 t^2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$p_2(t) = a_2 t^2$

① $(p_1 \oplus p_2)(t) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{R}} \cdot t^2 \in V$ ok

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in V$ $\quad (\lambda \odot p)(t) = \underbrace{(\lambda a)}_{\in \mathbb{R}} t^2 \in V$ ok $\boxed{\text{JA}}$

b) $V = \{ p \in P_n : p(t) = a + t^2 , a \in \mathbb{R} \}$

$p(0) = a$

① Addition: $p_1, p_2 \in V$

$p_1(t) = a + t^2 \Rightarrow p_1(0) = a \qquad p_2(t) = a + t^2 \Rightarrow p_2(t) = a$

$(p_1 \oplus p_2)(t) = 2a + 2t^2 \quad \underbrace{(p_1 + p_2)}_{\in V}(0) = 2a$

$\boxed{\text{Nej}}$

c) $V = \{ p \in P_n : p(0) = 0$

① $p_1, p_2 \in V \quad (p_1 \oplus p_2)(0) = \underbrace{p_1(0)}_{=0} + \underbrace{p_2(0)}_{=0} = 0$

$\boxed{\text{JA}}$

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in V$: $(\lambda \odot p)(0) = \lambda \cdot \underbrace{p(0)}_{=0} = 0$

d) $V = \{ p \in P_n : 2p(0) = p_1(1)$

① Addition: $p_1, p_2 \in V$

$(p_1 \oplus p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 2p_1(0) + 2p_2(0) = 2(p_1(0) + p_2(0))$

$= 2 \cdot (p_1 \oplus p_2)(0)$

$\Rightarrow (p_1 \oplus p_2)(1) = 2(p_1 \oplus p_2)(0) \Rightarrow p_1 \oplus p_2 \in V$

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in V$

$(\lambda \odot p)(1) = \lambda p(1) = \lambda \cdot 2 \cdot p(0) = 2\lambda p(0) = 2(\lambda \odot p)(0)$

$\Rightarrow (\lambda \odot p)(1) = 2(\lambda \odot p)(0) \Rightarrow \lambda \odot p \in V$ $\boxed{\text{JA}}$

$\longrightarrow$

e) $V = \{ p \in P_n : p(t) \geq 0 \text{ då } 0 \leq t \leq 1 \}$

① $p_1, p_2 \in V$

$$(p_1 \oplus p_2)(t) = \underbrace{p_1(t)}_{\substack{\geq 0 \\ 0 \leq t \leq 1}} + \underbrace{p_2(t)}_{\substack{\geq 0 \\ 0 \leq t \leq 1}} \in V$$

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in V$

$$(\lambda \odot p)(t) = \underbrace{\underbrace{\lambda}_{<0} \cdot \underbrace{p(t)}_{\geq 0}}_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ \leq 0 \text{ då } 0 \leq t \leq 1}} \notin V$$

Välj $\lambda \leq 0$

$\boxed{\text{Nej}}$

f) $V = \{ p \in P_n : p(t) = p(1-t) \}$

① $p_1, p_2 \in V$

$$(p_1 \oplus p_2)(t) = p_1(t) + p_2(t) = p_1(1-t) + p_2(1-t) = (p_1 \oplus p_2)(1-t)$$

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in V$

$$(\lambda \odot p)(t) = \lambda p(t) = \lambda p(1-t) = (\lambda \odot p)(1-t) \Rightarrow (\lambda \cdot p)(t)$$

$\boxed{\text{JA}}$

g) $V = \{ p \in P_n : \text{koefficienterna är heltal} \}$ $\boxed{\text{Nej}}$

$(\lambda \cdot p)(t) \notin V$ om $\lambda \in \mathbb{R} / \mathbb{N}$

om λ inte är ett heltal så blir koefficienterna $\lambda \odot p$ inte heltal

(10) Avgör om M är ett underrum till V då

a) $M = \{ f \in V : f(-x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$ $\quad V = C(\mathbb{R})$

① Addition i $C(\mathbb{R})$

$f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

② Mult. med skalär

$\lambda \in \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}) \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$

Lösning: a)

① $f_1, f_2 \in M \quad (f_1 \oplus f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 \oplus f_2)($

ok

② $\lambda \in \mathbb{R}, f \in M \quad (\lambda \odot f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda \odot f)(x)$

$\Rightarrow M$ är ett underrum till $V = C(\mathbb{R})$

$V = \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad M = \{$mängden av alla uppättriangulära matriser$\}$

b)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Lösning: b)

①

$$\underbrace{A + B}_{\in M} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\lambda A}_{\in M} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{JA}}$

c) $V = C([0,1]) \quad M = \{ f \in V : f(0) = 1 \} \quad f_1, f_2 \in M$

$(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 1 + 1 = 2 \quad f_1 + f_2 \notin M \quad \boxed{\text{Nej}}$

d) $V = ([0,1]) \quad M = \{ \lambda \in V . f(0) = 0 \} \quad \boxed{\text{JA}}$

$\rightarrow$

9) $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad M = \{ A \in V : sp(A) = 0 \}$ $\quad$ sp = spår (trace)

$sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\quad$ = summan av radelementen

① $A, B \in M$ $\quad sp(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii}}_{=0} = 0$

② $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M$ $\quad sp(\lambda \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0$

Föreläsning 20/3

Notation: I fortsättningen förenklar vi skrivsätten $u \oplus v \to u+v$

$\alpha \odot u \to \alpha u$

för $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Definition 1.6

Låt U och V vara linjära rum. En avbildning $F: U \to V$ kallas linjär om $F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$ (1)

$\forall u, v \in U$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

För $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in U$ & $k \geq 1$ implicerar (1) att:

$$F\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) = F\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u_i + \alpha_k u_k\right) \overset{(1)}{=} F\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u_i\right) + \alpha_k F(u_k) =$$

$$= \ldots = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F(u_i)$$ och $F(0) = 0$ $\quad (F(0 \odot 0) = 0 F(0) = 0$

Exempel 1.13

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ och $F(x) := Ax$ var A är $m \times n$ matris

För linjär: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ & $u, v \in U \Rightarrow F(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u + \beta v) =$
$= \alpha A u + \beta A v$

Exempel 1.19

a)
Låt $U = C'[0,1]$, $V = C[0,1]$
Då är $F(f) = Df = f'$ väldefinierad avbildning från U till V och
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ & $u, v \in C'[0,1]$
$\Rightarrow F(\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g' = \alpha F(f) + \beta F(g)$

b) $U = C^k[0,1]$, $V = C[0,1]$ $P_k \in P_k$
$F(f) = P_k(D)f = (c_0 + c_1 D + \dots + c_k D^k) f$

Exempel 1.15

a) Låt $U = C[0,1]$ och $V = C'[0,1]$

Då är $F(f)(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ $\forall x \in [0,1]$ väldefinierad avbildning och linjär

Definition 1.7.

Låt U & V vara linjära rum och låt $F: U \to V$ vara en linjär avbildning. Nollrummet och värderummet till F ges av
$N(F) = \{u \in U \mid F(u) = 0\}$ och
$V(F) = \{v \in V \mid v = F(u)$ för något $u \in U\} = \{F(u) \mid u \in U\} = F(U)$

Uppgift:

Visa att $N(F)$ och $V(F)$ är underrum av resp U och V.

Givet $v \in V$ kallas $F(u) = v$ (2)
en linjär ekvation ($u \in U$ sökes)

Ekvationen är $\begin{cases} \text{homogen om } v = 0 \\ \text{inhomogen om } v \neq 0 \end{cases}$

Exempel:

$Au = v$ (linjärt ekvationssystem)

$u = v$ (linjär differentialekvation)

$\int_0^x u \, dt = v$ (integralekvation) $\forall x \in [0,1]$

Sats 1.4

Antag att u_p löser (2). Då är $u \in U$ en lösning till (2) omm $u = u_p + u_h$ där $u_h \in N(F)$.

Bevis:

Sedan $F(u_p) = v$ gäller följande ekvivalenser:

$F(u) = v \iff F(u) = F(u_p) \iff F(u - u_p) = 0 \iff u - u_p \in N(F)$

$\iff u_h \in N(F)$ ∎

Tolkning: Lösningsmängden till (2) är affina mängden $u_p + N(F)$.

Repetition span av vektorer

Om $u_1, \dots, u_n \in V$ så är $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\} := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ett underrum av V.

Definition 1.8

Vektorerna $u_1, \dots, u_n$ sägs spänna upp V om $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\} = V$

Definition 1.9

Vektorerna $u_1, \dots, u_n \in V$ sägs vara linjärt beroende om det finns en icke-trivial linjärkombination så att $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n =$ (3 med $\lambda_i \neq 0$ för minst en ekvation.

Om å andra sidan (3) endast håller då $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ så är $u_1, \dots, u_n$ linjärt oberoende.

Exempel

Vektorerna $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ i $\mathbb{R}^n$ uppfyller $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$

och de är linjärt oberoende sedan om:

$0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ så måste $\lambda_i = 0$ för alla i.

Lemma 1.3

Om $u_1, \dots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i V och $v \in V \setminus \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_m$ så är $u_1, \dots, u_m, v$ linjärt oberoende.

Idebevis:

$u_1, \dots, u_m, v$ är linjärt beroende $\iff v \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$

Definition 1.10

En uppsättning vektorer $u_1, \dots, u_m \in V$ sägs vara en bas för V om vektorerna är linjärt oberoende och $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_m\} = V$

Definition 1.11

Ett linjärt rum V är av dimension $n \in [0, \infty)$ om n är det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i V.

Notation:

$\operatorname{Dim} V = n$ och inget sådant n finns så säger vi att V är oändligtdimensionell ($\dim V = \infty$)

Exempel:

- Triviala rummet $V = \{0\}$ innehåller en linjärt beroende vektor ($\lambda_i 0 = 0 \ \forall \lambda_i \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \dim\{0\} = 0$ och $\{0\}$ är enda linjärt rum med $\dim V = 0$
- $\mathbb{R}^n$ har standardbasen $\{e_i\}_{i=1}^n$ och $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim C[a,b] = \infty$, sedan för varje $n \in \mathbb{N}$ är $\{t^k\}_{k=0}^n \subset C[a,b]$ en linjärt oberoende mängd av vektorer.
  (Motivation: För godtyckligt $n \in \mathbb{N}$ och $p_n \in P_n \setminus \{0\}$ så har $p_n(t)$ maximalt n nollställen, Låt $\{t_i\}_{i=1}^p = \{t \in [a,b] \mid p_n(t) = 0\}$, var $0 \leq q \leq n$. Då är $p_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \neq 0 \ \forall t \in [a,b] \setminus \{t_i\}_{i=1}^q$.
  $\{t_i\}_{i=1}^q = \emptyset$ om $q = 0$)

Sats 1.5

Antag att $\dim V = n > 0$. Då finns minst en uppsättning av n linjärt oberoende vektorer ur V. Varje sådan uppsättning är en bas för V.

Bevis:

Låt $u_1, \dots, u_n$ vara en godtycklig uppsättning av linjärt oberoende vektorer. ($\dim V = n$ & Def 1.11 $\Rightarrow \exists$ minst en sådan)

Det återstår att bevisa att $\text{Span}\{u_1, \dots, u_n\} = V$

Antag det finns $v \in V \setminus \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$.

Lemma 1.2 $\Rightarrow u_1, \dots, u_n, v$ linjärt oberoende

$\Rightarrow \dim V > n$; motsägelse

Detta ger $\Rightarrow \text{span}\{u_1, \dots, u_n\} = V$ ∎

Sats 1.6.

Antag att $V = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$

Då är varje uppsättning av fler än n vektorer linjärt beroende

Bevis:

Låt $v_1, \dots, v_p$ vara vektorer i V med $p > n$. Sedan $V = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ kan vi skriva:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j \quad \text{för } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, p$$

$v_1, \dots, v_p$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow x_1 v_1 + \dots + x_p v_p = 0$ (4) har icke-trivial lösning.

(4) kan skrivas som: $\sum_{i=1}^{p} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} u_j (Ax)_j = 0$

Var $A = n \times p$ matrisen med $A_{ij} = a_{ij}$. Sedan $n < p$ så är $Ax = 0$ underbestämt $\Rightarrow \exists$ en icke-trivial $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ så att $Ax = 0$ och därmed också $0 = x_1 v_1 + \dots + x_p v_p$ ∎

Sats 1.7

Om $\dim V = n < \infty$ så består alla baser för V av lika många element och detta antal $= n$

Bevis:

Antag att $\dim V = n > 0$. Sats 1.5 $\Rightarrow \exists$ en bas B_1 med n element
Betrakta så en godtycklig bas B_2 med m element.
Enligt Def 1.11. måste $m \leq n$ och Sats 1.6 $\Rightarrow m = n$, för om $m < n$ så skulle basen B_1 vara linjärt beroende $\blacksquare$

(tips: läs om summarum $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \ \& \ u_2 \in U_2\}$
$U_1 \cap U_2 = \{0\}$ så kan varje $u \in U_1 + U_2$ representeras entydligt på formen $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1$ $u_2 \in U_2$)
$(U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2)$

Storgruppsövning 21/3

L.1.29 Låt U_1 & U_2 vara underrum till (linjärt rum) V så att det finns $u_1 \in U_1$ & $u_1 \notin U_2$ samt $u_2 \in U_2$ & $u_2 \notin U_1$
Visa att $U_1 \cup U_2$ inte är ett underrum till V

Lösning: "Motsägelsebevis"
Antag att U_1 & U_2 är ett underrum till V.
$\Rightarrow$ U_1 och U_2 är sluten under addition.
$u_1 \in U_1 \cup U_2$, $u_2 \in U_1 \cup U_2$ $\Rightarrow$ $u_1 \oplus u_2 \in U_1 \cup U_2$

Fall 1: antag att $u_1 \oplus u_2 \in U_1$ men inom $\exists \bar{u}_1 \in U_1$
$u_1 \oplus u_2 \oplus -\bar{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{u}_1 = u_1 \oplus u_2$
$\underbrace{u_2}_{\in U_2} = \bar{u}_1 \oplus -1 \odot u_1 = \text{"}\underbrace{\bar{u}_1 - u_1}_{\in U_1}\text{"}$ $\Rightarrow$ stämmer ej!

Fall 2: $\Rightarrow u_1 \oplus u_2 \in U_2$ $\exists \bar{u}_2 \in U_2 : \bar{u}_2 = u_1 \oplus u_2$
$\underbrace{u_1}_{\in U_1} = \underbrace{\bar{u}_2 - u_2}_{\in U_2}$ stämmer inte!

$\Rightarrow$ Motsägelse ger att $U_1 \cup U_2$ är ej underrum $\boxtimes$

2.1.35 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

a) Matlab! Har nollrummen $N(A)$ och $N(B)$ någon gemensam vektor $\neq 0$?

b) Har värderummen $V(A)$ och $V(B)$ i $\mathbb{R}^3$ någon gemensam vektor $\neq 0$?

a) $N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}^3 \}$

$N(B) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : B\mathbf{x} = \mathbf{0}^3 \}$

$A \sim 3 \times 4$

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$

$\underset{\cap}{\mathbb{R}^3}$ & $\underset{\underset{N(B)}{N(A)}}{\underset{\cap}{\mathbb{R}^4}}$

$A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4]$

$B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4]$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ $\quad A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 =$

Metod: Sätt $[A : \mathbf{0}]$ och radeleminera

Matlab ger $A \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\ s\ t \qquad\qquad\qquad\quad s\ t$

Ex: $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\uparrow$

Svar: Planen $N(A)$ & $N(B)$ skär varandra imassa $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}^4$

JA!

$N(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Lösningen till $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$N(B) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Både $N(A)$ & $N(B)$ är plan i $\mathbb{R}^4$

b) Dimensionsatsen

n kolonner, $n = \dim(N(A)) + \dim(V(A))$

$\dim(V(A)) = n - \dim(N(A)) = 4 - 2 = 2$

p.s.s. $\dim(V(B)) = 2$

M.a.o. $V(A)$ & $V(B)$ plan i $\mathbb{R}^3$ som går genom origo.

$\Rightarrow$ Massa skärningspunkter $x \neq \emptyset$ ▨

Svar: JA!

2.1.40 Avgör vilka av följande avbildningar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som är linjära.

$$T_1(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad T_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad T_3(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning: $T: U \to V$

T är linjär om $u_1, u_2 \in U$ $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in U$ $T(\lambda u) = \lambda \odot T(u)$

$\Rightarrow \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in U$

$T(\alpha \cdot u_1 + \beta u_2) = \alpha \odot T(u_1) \oplus \beta \odot T(u_2)$

Börja med T_1: Tag $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta y_1 \\ \beta y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha x_2 + \beta y_1)^2 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x_2 y_2 + \beta^2 y_2 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 x_2^2 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta y_2^2 \\ \beta y_2 \end{bmatrix} + 2\alpha\beta \begin{bmatrix} x_2 y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\neq \begin{bmatrix} \alpha x_2^2 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta y_2^2 \\ \beta y_2 \end{bmatrix} = \alpha \cdot T(x) + \beta T(y)$$ T_1 är ej linjär!

$$T_2(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_1 + \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + x_2) \\ \alpha x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta(y_1 + y_2) \\ \beta y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \alpha T_2(\mathbf{x}) + \beta T_2(\mathbf{y})$$

$\Rightarrow T_2$ är linjär!

$$T_3(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta y_1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

T_3 är inte linjär!

2.1.41 $F: U \to V$ linjär avbildning

U, V vektorrum (1) $(F_1 \oplus F_2)(u) = F_1(u) + F_2(u) \quad \forall u \in U$

(2) $(\lambda \odot F)(u) = \lambda \cdot F(u) \quad \forall u \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Visa att mängden av linjära avbildningar är ett linjärt rum.

Lösning:

Metod: Kontrollera att alla 10 axiom eller regler i definition på sidan 2 gäller.

$(L(U,V), \oplus, \odot)$

$(U, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ $(V, \hat{+}, \hat{\cdot})$ $L(U,V)$ = Mängden av linjära avbildningar från U till V

Vi kontrollerar 1, 2, 5 och 6 (resten är lätta)

1. Sluten under addition

$F_1, F_2 \in L(U,V) \Rightarrow F_1 \oplus F_2 \in L(U,V)$ tag $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ & $u_1, u_2 \in U$

$$(F_1 \oplus F_2)(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2) \overset{1}{=} F_1(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2) \hat{+} F_2(\alpha \tilde{\cdot} u_1 + \beta \tilde{\cdot} u_2)$$

$$= (\alpha \hat{\cdot} F_1(u_1) \hat{+} \beta \hat{\cdot} F_1(u_2)) \hat{+} (\alpha \hat{\cdot} F(u_1) \hat{+} \beta \hat{\cdot} F_2(u_2)) =$$

$$= \alpha \hat{\cdot} (F_1(u_1) \hat{+} F_1(u_1)) \hat{+} \beta \hat{\cdot} (F_1(u_2) \hat{+} F_2(u_2)) =$$

$$= \alpha \hat{\cdot} (F_1 \oplus F_2)(u_1) \hat{+} \beta \hat{\cdot} (F_1 \oplus F_2)(u_2) = \boxed{}$$

$\longrightarrow$

2 Sluten under multiplikation med skalär

$\lambda \in \mathbb{R}$, $F \in L(U,V) \Rightarrow (\lambda \odot F) \in L(U,V)$?

tag $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in U$

$(\lambda \odot F)(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2) = \lambda \hat{\cdot} F(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2)$

$= \lambda \hat{\cdot} (\alpha \hat{\cdot} F(u_1) \hat{+} \beta \hat{\cdot} F(u_2)) = \alpha \hat{\cdot} (\lambda \hat{\cdot} F(u_1)) \hat{+} \beta \hat{\cdot} (\lambda \hat{\cdot} F(u_2)) =$

$= \alpha \hat{\cdot} (\lambda \odot F)(u_1) \hat{+} \beta \hat{\cdot} (\lambda \odot F)(u_2)$

$\Rightarrow (\lambda \cdot F)(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2)$

$\Rightarrow \lambda \odot F$ är Linjär! $\boxed{\checkmark}$

5. Nollvektorn

$\exists O_F \in L(U,V) : (F \oplus O_F)(u) = (O_F \oplus F)(u) = F(u)$

Definierar $O_F : u \longmapsto 0_V$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $u_1, u_2 \in U$

$$\left.\begin{aligned} O_F(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2) &= 0_V \\ \alpha \hat{\cdot} O_F(u_1) &= \alpha \hat{\cdot} 0_V = 0_V \\ \beta \hat{\cdot} O_F(u_2) &= \beta \hat{\cdot} 0_V = 0_V \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &O_F(\alpha \tilde{\cdot} u_1 \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} u_2) = \alpha \hat{\cdot} O_F(u_1) \hat{+} \beta \hat{\cdot} O_F(u_2) \\ &\Rightarrow O_F \in L(U,V) \end{aligned}$$

$$(F \oplus O_F)(u) = F(u) \hat{+} \underbrace{O_F(u)}_{0_V} = F(u) \hat{+} 0_V = 0_V \hat{+} F(u) = O_F(u) \hat{+} F(u) =$$
$$= (O_F \oplus F)(u) = F(u)$$

$\boxed{\checkmark}$

L. 1.46 Betrakta avbildningen $T: \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ som är definierad som $T(A) = A + A^T$

a) Visa att T är linjär

b) Låt $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara symmetrisk. Hitta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sådan att $T(A) = B$

c) Beskriv $N(T)$

d) Visa att $V(T)$ är mängden av alla symmetriska matriser

$\longrightarrow$

a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$T(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = (\alpha \cdot A + \beta \cdot B) + (\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^T$$
$$= \alpha A + \beta B + \alpha A^T + \beta B^T$$
$$= \alpha (A + A^T) + \beta (B + B^T)$$
$$= \alpha \cdot T(A) + \beta T(B)$$

$\Rightarrow$ Avbildningen är linjär!

b) Givet $\mathbb{R}^{n \times n} \ni B : B = B^T$

Vad händer när T verkar på B?

$$T(B) = B + B^T = B + B = 2 \cdot B$$
$$\Rightarrow T(B) = 2B \quad \Rightarrow \frac{1}{2} T(B) = B$$

T är linjär $\Rightarrow T\left(\frac{B}{2}\right) = B$

Välj A till $A = \frac{B}{2}$

c) Beskriv $N(T)$ $\qquad B = B^T \leftarrow$ symmetriska

$$N(T) = \{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : T(X) = 0^{n \times n} \}$$
$$T(X) = X + X^T = 0 \quad \Rightarrow \boxed{X = -X^T} \leftarrow \text{skevsymmetriska}$$

$$N(T) = \{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X^T = -X \}$$

d) $V(T) = \{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \ \exists X \in \mathbb{R}^{n \times n} : M = X^T + X \}$

Vi ser lätt att alla $M \in V(T)$ är symmetriska

ty $M^T = (X + X^T)^T = X^T + (X^T)^T = X^T + X = M$

Finns det andra symmetriska $S \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus V(T)$?

$$S = \frac{2 \cdot S}{2} = \frac{S + S}{2} = \frac{S + S^T}{2} = \frac{S}{2} + \frac{S^T}{2} \quad \Rightarrow S = \frac{S}{2} + \frac{S^T}{2}$$

$$\left(X = \frac{S}{2} \right) \quad \blacksquare$$

Föreläsning 22/3

Repetition:

För ett linjärt rum V är
- $\dim V =$ Maximala antalet linjärt oberoende i V
- Vektorerna $\{a_1, \dots, a_n\}$ är en bas för V om de är linjärt oberoende och de spänner upp V.

Om $\dim V = n \in (0, \infty)$ så:

Sats 1.5: Finns minst en bas för V och varje uppsättning av n linjärt oberoende vektorer är bas för V.

Sats 1.7: alla baser för V består av n element

Kom ihåg!
- Om A är $m \times n$ matris:

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$$
$$V(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax \text{ för något } x \in \mathbb{R}^n \}$$
$$= \mathrm{Kol}(A) = A\mathbb{R}^n$$

Sats 1.14 (Dimensionssatsen)

Låt A vara $m \times n$ matris. Då gäller att $\dim N(A) + \dim V(A) = n$

Innan bevis behövs några andra resultat $\rightarrow$

Sats 1.9

Antag att $\dim V = n > 0$ och att $u_1, \dots, u_m$ med $m < n$ är linjärt oberoende vektorer i V. Då kan man finna vektorer $u_{m+1}, \dots, u_n$ så att $u_1, \dots, u_n$ är en bas för V

Bevis:

Låt $U_m = \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$ Då finns en $u_{m+1} \in V \setminus U_m$ (annars $U_m = V$, vilket leder till motsägelsen $\dim V = \dim U_m = m <$ och lemma 1.2 $\Rightarrow u_1, \dots, u_m, u_{m+1}$ är linjärt oberoende

Upprepa resonemanget $n-(m+1)$ gånger till du funnit n linjärt oberoende vektorer $u_1, \dots, u_n$ och sats 1.5 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ vektorerna är bas för V. $\blacksquare$

Bevis (Sats 1.14)

Tre fall:

(i) $\dim N(A) = n$

(ii) $0 < \dim N(A) < n$

(iii) $\dim N(A) = 0$

(i) $\dim N(A) = n \Rightarrow N(A) = \mathbb{R}^n \Rightarrow V(A) = A\mathbb{R}^n = \{0\}$
$\Rightarrow \dim V(A) = 0$

(ii) Antag att $\dim N(A) = p$ $0 < p < n$ och låt $e_1, \dots, e_p$ vara en bas för $N(A) \subset \mathbb{R}^n$

Då måste vi visa att $\dim V(A) = n-p$. Sats 1.9 $\Rightarrow \exists\, e_{p+1}, \dots, e_n$ så att $e_1, \dots, e_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

$\longrightarrow$

Varje $x \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, vilket ger att

$$Ax = x_1 Ae_1 + \dots + x_p Ae_p + x_{p+1} Ae_{p+1} + \dots + x_n Ae_n$$
$$= x_{p+1} Ae_{p+1} + \dots + x_n Ae_n \quad (\heartsuit)$$

Sedan $e_i \in N(A)$ för alla $i \leq p$

$(\heartsuit) \Rightarrow V(A) = \text{span}(Ae_{p+1}, \dots, Ae_n)$

Antag att $\alpha_{p+1} + Ae_{p+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = 0 \quad (\heartsuit)$

Då är $\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i \in N(A) \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ så att:

$$\alpha_{p+1} e_{p+1} + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \quad (\heartsuit)$$

Sedan $e_1, \dots, e_n$ är linjärt oberoende

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ för alla i i $(\heartsuit)$

vilket speciellt implicerar att $Ae_{p+1}, \dots, Ae_n$ är linjärt oberoende från $(\heartsuit)$ och därmed bas för $V(A)$,

$\Rightarrow \dim V(A) = n - p$

(iii) Argumentera på samma sätt som i (ii) $\blacksquare$

<u>Definition:</u>

För en $m \times n$ matris $A = [a_1, \dots, a_n] = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \vdots \\ \text{row}_n(A) \end{bmatrix}$

definierar vi kolonnrangen för $A = \dim V(A)$ och radrangen för $A := \dim \text{span}\{\text{row}_1(A), \dots, \text{row}_n(A)\} = \dim V(A^T)$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$ har $V(A) = \text{span}\{(4,3),(7,5),(1,9)\}$

och radrummet $= \text{span}\{(4\,7\,1),(3\,5\,9)\}$

Sats 1.15 (Rangsatsen)

För en godtycklig $m \times n$ matris A gäller att kolonnrangen och radrangen är lika.

Bevis: Vi vet att de elementära radoperationerna

1) $\text{row}_k(A)$ ersätts av $c\,\text{row}_k(A)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2) $\text{row}_k(A)$ ersätts av $\text{row}_k(A) + c\,\text{row}_k(A)$ $j \neq k$
3) $\text{row}_k(A)$ och $\text{row}_j(A)$ byter plats är reversibla. Därmed bevaras radrummet vid transformationen

$A \sim \text{ref}(A) =: A'$

Nollrummet bevaras också dvs. $Ax = 0 \iff A'x = 0$ $\quad N(A) = N(A')$ (*)

Vidare så består $A' = [a_1', a_2', \dots, a_n']$ av $0 \leq r \leq \min(m,n)$ linjärt oberoende pivotkolonner $a_{j_1}', a_{j_2}', \dots, a_{j_n}'$

$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$

$$a_{j_k}' = l_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-(k+1)})$$

$$\text{row}_k(A') = (\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{j_k - 1} \ 1 \ \underbrace{* \ \dots \ *}_{n-(j_k+1)}) \quad 1 \leq k \leq r$$

Vidare är $\text{row}_p(A') = 0$ $\forall p > r$ (annars måste också l_p vara pivot kolonn.

→ Bevis →

Exempel A är 3×4 matrisen och $r = 2$

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j_1 = 1 & & j_2 = 3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

icke pivot kolonner

Pivot kolonner

Det följer att $row_1(A'), \dots, row_r(A')$ är en bas för radrummet till A' och därmed också bas för radrummet till A $\Rightarrow$ radrangen för $A = r$
Vidare är $l_1, \dots, l_r$ en bas för $V(A')$ och sats 1.14 ger att
$\dim V(A) = n - \dim N(A) \overset{\heartsuit}{=} n - N(A') = \dim V(A') = r$ ∎

Definition 1.13

Det gemensamma värdet på radrangen och kolumnrang kallas för matrisens rang och betecknas rang A

Egenskaper (Sats 1.16, 17 & lemma 1.5)

Låt A vara en $m \times n$ matris med $r = \text{rang } A$. Då gäller följande:

a) Ekvationen $Ax = b$ är lösbar för alla $b \in \mathbb{R}^m$ omm $r = m$

b) Om $Ax = b$ är lösbar är lösningsmängden $(n-r)$-parametring, och speciellt entydig om $r = n$

c) Om $m = n$ är A inverterbar omm rang $(A) = n$

$x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Koordinater och basbyter

Låt $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas för ett linjärt rum V.
Varje vektor $u \in V$ kan entydigt skrivas $u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ (★)

$V \ni u \longleftrightarrow x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$u \longleftrightarrow x \quad , \quad v \longleftrightarrow y$ ger

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) b_i = u + v \longleftrightarrow x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\alpha u \longleftrightarrow \alpha x$ och $V \ni u_j \longleftrightarrow \underline{\bar{X}}_j \in \mathbb{R}^n$ $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ger

$$\sum_j \alpha_j u_j \longleftrightarrow \sum_j \alpha_j \underline{\bar{X}}_j \quad (★)$$

Från ★ följer det att $u_1, \dots, u_k$ är linjärt oberoende omm $\underline{\bar{X}}_1, \dots, \underline{\bar{X}}_k$ är linjär oberoende.

Definition 1.14

Talen $x_1, \dots, x_n$ i ★ kallas för koordinaterna till $u \in V$ i basen B, och $x = (x_1, \dots, x_n)$ är u:s koordinatvektorer.

Notation $x =: [u]_B$.

Låt $B' = \{b_1', b_2', \dots, b_n'\}$ vara en annan bas för V.

Antag att u kan skrivas

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \quad \& \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i' b_i' \quad (★)$$

dvs. $[u]_B = x \qquad [u]_{B'} = x'$

Relation mellan koordinaterna x och x'

$$x = [u]_B \overset{★}{=} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i' b_i'\right]_B = \sum_{i=1}^{n} x_i' [b_i']_B =$$

$$= \left[[b_1']_B \ \dots \ [b_n']_B\right] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = Tx'$$

$$x = Tx' \quad \text{var} \quad T = [b_1', \dots, b_n']_B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Räknestuga 22/3

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\ker T = \{ v \in \mathbb{R}^n : T(v) = 0 \}$

$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u) = 0$

9a) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $\quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$

h) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

g) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ when $x_1 = x_2 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$v \in \mathbb{R}^n \quad U \leq \mathbb{R}^n \quad A = v + U$

$x_1, x_2 \in A \quad x_1 - x_2 = u_1 - u_2 \in U$

$x_1 = v + u_1$

$x_2 = v + u_2$

$A - A = \{ u_1 - u_2 : u_1, u_2 \in A \}$

b) $9x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1$

$9y_1 - 2y_2 + y_3 + 4y_4 = 1$

$9(x_1 - y_1) - 2(x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) + 4(x_4 - y_4) = 0$

f) $(x_1, x_3) \quad x_1 \cdot x_3 = 0$

$(y_1, y_3) \quad y_1 \cdot y_3 = 0$

$(x_1 + y_1)(x_3 + y_3) = x_1 y_3 + y_1 x_3 = 1$

$(x_1, x_3) = (1, 0)$

$(y_1, y_3) = (0, 1)$

16) $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ if this can happen only when $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 v_{1i} & \dots & \alpha_k v_{ik} \\ \vdots & & \\ \alpha_1 v_{n1} & \dots & \alpha_k v_{nk} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1i} & \dots & v_{1k} \\ & & \\ v_{n1} & \dots & v_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = 0$$

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8/5 \\ 0 & 0 & 11/5 \end{bmatrix}$$ linjärt oberoende!

22/ a) $n = 2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}} + a_{21} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{21}} + a_{22} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{22}}$$

svar: n^2

b) $$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \dots n-1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{diagonalen}_1 (n-1) \\ \vdots \\ \text{diagonalen } (1) \end{array}$$

svar:

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) $a_{ji} = -a_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \\ 0 & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{(n+1)n}{2} - n = \frac{(n-1)}{2}$$

25| $P_n = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n\}$

$1, t, \ldots, t^n$ $\qquad \dim P_n = n+1$

$\{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ $\quad p_i(0) = 0 \quad \to \quad a_0 = 0$

$T(p) = p(0)$

$P_n^0 = \{p \in P_n \;\; p(0) > 0\} = \operatorname{span}\{t, t^2, \ldots, t^n\}$

$\dim P_n^0 = n$

m vectors in V $\dim V = n$

$m > n$

44| $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$

a)

b) $\ker T$

$p: (0) = 0 \qquad a_0 = 0$

$p: (1) = 0 \qquad a_1 + a_2 = 0$

$\ker T = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right\} : \; a_1 + a_2 = 0$

$a_2 = -a_1$

$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ -a_1 \end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\operatorname{Im} T \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$p = \alpha + \beta t - \alpha t^2$

$p(0) = \alpha.$

$p(1) = \alpha + \beta - \alpha = \beta$

45| a)

b) ker T

$p: p(0) = 0 \quad a_0 = 0$

$\ker T = \{a_1 t + a_2 t^2\}$

$\ker T = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\operatorname{Im} T = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

51| $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$T_{B \to I} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T_{B \to I} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T_{\to I} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_B \longrightarrow I$

$T_{I \to B} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}_{B \to I} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5/2 & \frac{23}{4} & 1/4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{8} & -\frac{19}{4} & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & -\frac{4}{8} & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & 23/8 & 1 \end{array}\right]$$

från facit svar: $\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -10 & -54 & -4 \\ -1 & -11 & -2 \\ 5 & 23 & 2 \end{bmatrix}$

$T_{B \to A} \Rightarrow (B \mid A)$

52| $\{1+t^3,\ 3+t-2t^2,\ -t+3t^2-t^3\}$

$$P_3 = \mathbb{R}\{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}$$

28| $U_1 = \mathbb{R}\left\{\overset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}}\right\}$ $\quad U_2 = \mathbb{R}\left\{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$

1) $U_1 \cap U_2$
2) $U_1 + U_2$

1) $v \in U_1$

$v = \alpha u_1 + \beta u_2$ $\quad v \in U_2$

$v = \alpha v_1 + \beta v_2$

$v \in U_1 \cap U_2$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = a_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix}$$

$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0$

$2a_1 + a_2 - 3a_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -a_1 + a_2 = 0$

$a_2 - a_3 = 0 \quad \{a_2 = a_3\}$

$a_1 - a_4 = 0 \quad \{a_1 = a_4\}$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

$U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2) $U_1 + U_2 = \{v + u : v \in U_1,\ u \in U_2\}$

$U_1 + U_2 \supseteq \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right.$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&-1\\0&-2&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&-1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

27 a) $U_1 = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$U_2 = \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$\left[U_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right]$

Gauss ger:

$x_1 = 7x_3 + 3x_4$

$x_2 = -3x_3 - x_4$

$$\begin{bmatrix} 7x_3 + 3x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

basis of U_1 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$U_2 \Rightarrow$ $x_1 = -13x_3 - 6x_4$ basis of U_2

$x_2 = -3x_3 - x_4$

$$U_2 = \begin{pmatrix} -13x_3 - 6x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \overbrace{x_3 \begin{bmatrix} -13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 13 & 6 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Gauss $\Rightarrow$ Svar. funkar endast $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

$\Rightarrow$ Summa $= 0$

Föreläsning 26/3

Koordinater och basbyte

Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $B' = \{b_1', \dots, b_n'\}$ vara två baser för V

Varje $u \in V$ kan då representeras $\quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \quad \& \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i' b_i'$

En tydliga motsvarigheter mellan V och $\mathbb{R}^n$

$$V \ni u \xleftrightarrow[B]{} x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \& \quad u \xleftrightarrow[B']{} x' = (x_1', \dots, x_n')$$

$x = [u]_B$ och $x' = [u]_{B'}$ är u:s koordinater i respektive baser.

Både $[\cdot]_B : V \to \mathbb{R}^n$ & $[\cdot]_{B'} : V \to \mathbb{R}^n$ är linjära avbildningar
(t.ex. $[\alpha u + \beta v]_B = \alpha [u]_B + \beta [u]_B$)

Om vi känner $x' = [u]_{B'}$ så är $x = T x'$ var
$$T = \left[[b_1']_B \, [b_2']_B \dots [b_n']_B \right] = [b_1' \dots b_n']_B$$

Bevis:
$$x = [u] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i' b_i' \right]_B = \sum_{i=1}^{n} x_i' [b_i']_B = T \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = T [u]_{B'}$$

Vi skriver $[u]_B = T_{B \leftarrow B'} [u]_{B'}$ (var $T_{B \leftarrow B'}$ är T från (3.1))

Från motsvarigheten $V \xleftrightarrow[B]{} \mathbb{R}^n$ följer det att
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i' = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [b_i']_B = 0$$

$\Rightarrow [b_1']_B, \dots [b_n']_B$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ rang $T_{B \leftarrow B'} = n \quad \Rightarrow T_{B \leftarrow B'}$ är inverterbar

Från (3.2) får vi $[u]_{B'} = T_{B' \leftarrow B} [u]_B = (T_{B \leftarrow B'})^{-1} [u]_B$

var $T_{B' \leftarrow B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]_{B'}$

$\rightarrow$

I fall var det är svårt att beräkna $T_{B \leftarrow B'}$ kan en standardbas $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ förenkla, transformationen från B' till B med två steg

1. $[u]_{B'} \to [u]_{\mathcal{E}}$
2. $[u]_{\mathcal{E}} \to [u]_B$

dvs.

$$1.\ [u]_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \leftarrow B'} [u]_{B'} \quad (3.3)$$
$$2.\ [u]_B = T_{B \leftarrow \mathcal{E}} [u]_{\mathcal{E}} = (T_{\mathcal{E} \leftarrow B})^{-1} [u]_{\mathcal{E}}$$

Exempel (Se också Exempel 1.23)

Låt $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{\underset{b_1}{(1,0,0)}, \underset{b_2}{(1,1,0)}, \underset{b_3}{(1,1,1)}\}$

$B' = \{\underset{b_1'}{(0,0,1)}, \underset{b_2'}{(0,1,1)}, \underset{b_3'}{(1,1,1)}\}$

Låt $u \in \mathbb{R}^3$ vara vektorn så att $[u]_{B'} = (1,1,1)$ och bestäm $[u]_B$

Lösning: $[u]_B = T_{B \leftarrow B'} [u]_{B'}$ $\quad [b_1']_B = (0,-1,1)$ (Sedan $b_1' = -b_2 + b_3$)

$[b_2']_B = (-1,0,1)$ $\quad [b_3']_B = (0,0,1)$

$$\Rightarrow \quad [u]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lösning via standardbas: $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$T_{\mathcal{E} \leftarrow B'} = \left[(b_1')_{\mathcal{E}} \ (b_2')_{\mathcal{E}} \ (b_3')_{\mathcal{E}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\mathcal{E} \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [u]_B = (T_{\mathcal{E} \leftarrow B})^{-1} T_{\mathcal{E} \leftarrow B'} [u]_{B'}$$

Kap 2 Skalärprodukt för reella linjära rum

Definition 2.1

Låt V vara ett reellt linjärt rum. En skalärprodukt i V är en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ med följande egenskaper:

$\forall\, u, v, w \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så gäller

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

(iii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(iv) $\langle u, u \rangle = 0$ & $\langle u, u \rangle = 0$ endast för $u = 0$

Exempel

a) $V = \mathbb{R}^n$ och $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ (standardskalärprodukten)

b) $V = \mathbb{R}^n$ och $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} k x_k y_k$

c) $V = \mathbb{R}^2$ och $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2$

Verifiering av (iv): $\langle x, y \rangle = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$ &

$(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0 \iff x_2 = 0 \quad x_1 = 0$ dvs $x = 0$

f) $V = C[a,b]$ (var $\oplus$ och $\odot$ är de vanliga operationerna)

och $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) g(t)\, dt$

Verifiering av (iv): $\langle f, f \rangle \geq 0$ och om $f \neq 0$ så finns en $\bar{t} \in (a,b)$ en $\varepsilon > 0$ och en $\delta > 0$ så att $f^2(b) > \varepsilon$ $\forall s \in (\bar{t} - \delta, t + \delta) \subset (a,b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(t)\, dt > \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} \varepsilon\, ds = 2\delta\varepsilon > 0$$

så $\langle f, f \rangle = 0$ endast om $f = 0$

Konsekvenser av Def 2.1

med $\alpha = 0$ fås $* \langle v, 0 \rangle \overset{i}{=} \langle 0, v \rangle \overset{ii}{=} 0 \quad \forall v \in V$ (2) $\quad \forall u, v \in V$

$* \langle u, \beta v \rangle \overset{i}{=} \langle \beta v, u \rangle \overset{ii}{=} \beta \langle v, u \rangle = \beta \langle u, v \rangle$ (3) $\beta \in \mathbb{R}$

$* \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i , v_j \rangle$ (4)

Definition NORM.

En norm är ett linjärt rum. V är en avbildning $f: V \to [0, \infty)$ som uppfyller följande: $\forall u, v \in V$ & $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $f(u) \geq 0$ & $f(u) = 0$ endast om $u = 0$

(ii) $f(\alpha u) = |\alpha| f(u)$

(iii) $f(u+v) \leq f(u) + f(v)$ (triangelolikheten)

Definition 2.2

Längden/normen av vektorn $v \in V$ är definierad som $\|v\| := \sqrt{\langle v, u \rangle}$ Med avståndet mellan u & v menas $\|u - v\|$

Det återstår att verifiera att funktionen $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ uppfyller det norm (i) - (iii). (i) & (ii) följer direkt från resp. Def 2.1 (iv) och (ii) - (iii)

Sats 2.2 (Triangelolikhet)

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall v, u \in V$ (5)

och likheten i (5) gäller endast om $u = 0$ eller $u = \lambda v$ för ngt $\lambda \geq 0$

$\rightarrow$

Bevis av (5)

Antag att $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in V$ (6)

Då är
$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &\overset{(i)}{=} \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \\ &\overset{(6)}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

Rotutdragning ger (5). (6) följer från nästa sats. $\boxtimes$

Sats 2.1 Cauchy-Schwarz

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in V$
och $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$ endast om u och v är linjärt beroende

Bevis:

Om $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ så att $u = \lambda v$, så är $|\langle u,v\rangle| = |\lambda|\,\|v\|^2 = \|u\|\,\|v\|$

Om å andra sidan u & v är linjärt oberoende så är $u + \lambda v \neq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}0 &< \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle \\ &= \underbrace{\|u\|^2 + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\|v\|^2}_{=f(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ andragradsekvationen $f(\lambda) = 0$ har inga reellvärda lösningar

$\Rightarrow$ $\sqrt{4|\langle u,v\rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2}$ är strikt imaginär

$\Rightarrow |\langle u,v\rangle| < \|u\|\,\|v\|$ $\boxtimes$

$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$

$$\lambda = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exempel 2.3.

a) För $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad |\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}_{\|x\|} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}_{\|y\|}$

b) För $f, g \in C[a,b]$ med skalärprodukten som i Ex 2.1 (f) fås:

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\int_a^b f(s)g(s)\,ds\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(s)\,ds}\sqrt{\int_a^b g^2(s)\,ds}$$

Cauchy-Schwartz implicerar att $-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$,

Vilket betyder att vi kan generalisera begreppet vinkel till linjära rum.

Definition 2.3

För vektorer $u, v \in V \setminus \{0\}$ definierar vi $\measuredangle(u,v)$ som den $\theta \in [0, \pi]$ som uppfyller $\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$

Exempel Låt $V = C[0,1]$ och $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\,dx$

Vinkeln mellan $f = 1$ & $g(t) = t$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|\|g\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\int_0^1 t\,dt}{\sqrt{\int_0^1 1^2\,dt}\sqrt{\int_0^1 t^2\,dt}}\right) =$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1/3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Storgruppsövning 26/3

16 a) Undersök vilka av följande mängder av vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är linjärt oberoende

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \}$

Lösning: Def: linjärt oberoende $\{c_1, \dots, c_n\}$ skalärer, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ då är $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linjärt oberoende

$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = 0 \underset{\text{omm}}{\Leftrightarrow} c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

$c_1 \mathbf{s}_1 + c_2 \mathbf{s}_2 + c_3 \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}^3 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\underbrace{[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3]}_{=A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}^3 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (♡)

Dvs. för att vektorerna i S skall vara linj. ober så måste ekv (♡) endast ha den triviala lösningen. $[A : 0] \sim \dots \sim [I : 0]$

Om $A \sim I_{3\times3}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times3}$ så $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ är linjärt oberoende

---

17 Visa att mängden bildar en bas i $\mathbb{R}^4$ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Lösning: Definition bas: En $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas om linj. ober. och genererar hela rummet.

I vårt fall räcker med att kolla att $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4$ är linjärt ober.

$A = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ linj. ober

Vi har att $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4\}$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ →

$\Rightarrow$ alla element i $\mathbb{R}^4$ kan skrivas som en linjär. komb. av basen m.a.o. $\exists c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ koefficienter så att

$$c_1 \mathbb{S}_1 + c_2 \mathbb{S}_2 + c_3 \mathbb{S}_3 + c_4 \mathbb{S}_4 = \mathbb{b} \quad (1)$$

och målet är att beräkna c_1, c_2, c_3, c_4

$$A \cdot \mathbb{c} = \mathbb{b} \quad (2) \quad \text{där} \quad \mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Vill lösa $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så $[A : \mathbb{b}]$ och radreducerar

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

21) Vektorerna $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k\}$ linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$. Vad är dimensionen av det underrum som genereras av $\{\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_3, \dots, \mathbb{v}_k - \mathbb{v}_1\}$?

{ Definition: Dimension: Antal element i en bas. }

Vårt underrum genereras av $\tilde{S} = \{\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_3, \dots, \mathbb{v}_{k-1} \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_k - \mathbb{v}_1\}$
måste ta reda på om $\tilde{S}$ utgör en bas
Så om S är en bas så är $\dim(\text{span}(S)) = k$

Måste kolla om S är en linjärt oberoende mängd.
Vi hittar $c_1, c_2, \dots, c_k$ koefficienter $\boxed{c_1 \cdot (\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2) + c_2(\mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_3) + \dots + c_{k-1}(\mathbb{v}_{k-1} - \mathbb{v}_k + c_k(\mathbb{v}_k - \mathbb{v}_1) = \emptyset \quad (1)}$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = c_k = 0$$

$$\boxed{(c_1 - c_k) \cdot \mathbb{v}_1 + (c_2 - c_1)\mathbb{v}_2 + (c_3 - c_2)\mathbb{v}_3 + \dots + (c_{k-1} - c_{k-2})\mathbb{v}_{k-1} + (c_k - c_{k-1})\mathbb{v}_k = \emptyset} \quad (\heartsuit)$$

$\longrightarrow$

I. Om att $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{k-1}, w_k\}$ så ger (♡) att

$$\left.\begin{array}{lll} c_1 - c_k = 0 & c_3 - c_2 = 0 & c_{k-1} - c_{k-2} = 0 \\ c_2 - c_1 = 0 & \vdots & c_k - c_{k-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_{k-2} = c_{k-1} = c_k = 0$$

$\vdots$

Säger ej att $c_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$\Rightarrow \tilde{S}$ är ej linjärt oberoende

Vi plockar bort $w_k - w_1$ ur mängden (c_k försvinner)

$$\Rightarrow \boxed{c_1 \cdot w_1 + (c_2 - c_1) w_2 + \dots + (c_{k-1} - c_{k-2}) v_{k-1} - c_{k-1} \cdot w_k = 0 \ (♡)}$$

$c_1 = 0$

$c_1 = c_2 = \dots = 0$ så $\tilde{S}$ utan $w_k - w_1$ är linj. ober

$\Rightarrow \dim(\text{span}(S)) = k-1$

---

23) Visa att följande funktioner är linjärt beroende

a) $\sin(2t), \cos(2t), \sin^2(t), \cos^2(t)$

b) $\ln(t^6+1), \ln(t^4-t^2+1), \ln(t^2+1)$

c) $\sin(t+\alpha), \sin(t+\beta), \sin(t+\gamma)$ för godtyckliga α, β, γ

a) $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \Rightarrow$ linj. ber.

b) $\ln(t^4-t^2+1) + \ln(t^2+1) = \ln((t^4-t^2+1)(t^2+1)) = \ln(t^6-t^4+t^2+t^4-t^2+1) = \ln(t^6+1) \Rightarrow$ linj. ber.

c) Vill att $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 \sin(t+\alpha) + c_2 \sin(t+\beta) + c_3 \sin(t+\gamma) = 0 \ (1)}$

om $\{\sin(t+\alpha), \sin(t+\beta), \sin(t+\gamma)\}$ vi deriverar (1)

$$\boxed{c_1 \cos(t+\alpha) + c_2 \cos(t+\beta) + c_3 \cos(t+\gamma) = 0 \ (2)}$$

$\longrightarrow$

strunta i derivatan. sin & cos linj ober

$\Rightarrow$ A & B är noll $\Rightarrow$ kan hitta nollställen c_1, c_2, c_3 som uppfyller detta

48| Låt $T: V \to W$ linjär avbildning. Visa att om $\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ är linj. ober. i V så är $\{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_p)\}$ linj. ober i W

Lösning: $\boxed{\text{linj. ober.: Vet att } \exists c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R} \text{ så att } c_1 w_1 + \dots + c_p w_p = \underset{\in V}{0} \iff c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0}$

T linjär: $T(0_V) = 0_W$

$$0_W = T(0_V) = T(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_p w_p)$$
$$= c_1 T(w_1) + c_2 T(w_2) + \dots + c_p T(w_p)$$

linjäritet

där $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$

$$\Rightarrow \quad 0_W = c_1 T(w_1) + c_2 T(w_2) + \dots + c_p T(w_p) \iff c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$$

Detta betyder att $\{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_p)\}$ är linj. ober $\square$

53| Visa att $\{p_1, p_2, p_3\}$ är en bas för P_2 då

a) $p_1(t) = (t+1)^2$, $p_2(t) = (t+2)^2$, $p_3(t) = (t+3)^2$
Ange också koordinaterna till polynomet t^2 i basen $\{p_1, p_2, p_3\}$

Lösning: Vad är $\dim(P_2)$? Standardbasen för P_2 är $\{1, t, t^2\} \Rightarrow$
$\dim(P_2) = 3$ vad är $\dim(P_n)$? $n+1$

Vi har tre kandidat_polynom p_1, p_2, p_3.
Måste visa att p_1, p_2, p_3 är linjärt oberoende

Hitta $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$: $\boxed{c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) + c_3 p_3(t) = 0 \ (1)} \Rightarrow \boxed{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$

Måste ha två ekvationer till för att entydigt bestämma c_1, c_2 & c_3
$\Rightarrow$ Derivera ekv. (1) två gånger $\Rightarrow$ $\to$

$$\boxed{c_1 p_1'(t) + c_2 p_2'(t) + c_3 p_3'(t) = 0 \quad (2)}$$

$$\boxed{c_1 p_1''(t) + c_2 p_2''(t) + c_3 p_3''(t) = 0 \quad (3)}$$

Ekv (3) $\Rightarrow$ $2 \cdot c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0$

$\Rightarrow c_1 = -(c_2 + c_3)$ (♡)

(♡) i (2) $\Rightarrow$ $-(c_2+c_3)p_1' + c_2 p_2' + c_3 p_3' = 0$

$\Rightarrow$ $c_2(p_2' - p_1') + c_3(p_3' - p_1') = 0$

$\Rightarrow$ $c_2(2(t+2) - 2(t+1)) - c_3(2(t+3) - 2(t+1)) = 0$

$\Rightarrow$ $c_2 - 2c_3 = 0$ $\Rightarrow$ $c_2 = 2c_3$ (♡)

(♡) & (♡) $c_1 - c_3 = -\frac{c_2}{2}$ (♡)

(♡) i (1) $= c_2\left(\frac{-p_1(t)}{2} + p_2(t) - \frac{p_3(t)}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{c_2}{2}\left(-(t+1)^2 + 2(t+2)^2 - (t+3)^2\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{c_2}{2}(-2) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ $\Rightarrow c_1 = c_3 = 0$

$\Rightarrow$ p_1, p_2, p_3 är linj. ober.

b) $t^2 = c_1(t+1)^2 + c_2(t+2)^2 + c_3(t+3)^2 = (c_1+c_2+c_3)t^2 + 8(c_1+2c_2+3c_3)t + (c_1+4c_2+9c_3)$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Föreläsning 27/3

Definition 2.4.

a) Vektorerna $u, v \in V$ sägs vara ortogonala om $\langle u, v \rangle = 0$
En mängd vektorer $v_1, \dots, v_n$ i V kallas en ortogonalmängd om $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ för alla $i \neq j$

b) $u \in V$ kallas normerad om $\|u\| = 1$

c) En ortogonalmängd $v_1, \dots, v_n$ i V kallas en ON-mängd (ortonormerad) om $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$

d) Ortogonalbas = ortogonalmängd som är bas för V
ON-bas = ON-mängd som är bas för V.

Ex: $\{(1,1), (1,-1)\}$ är en ortogonalbas i $\mathbb{R}^2$, men ej en ON-bas.
$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}$ är ON-bas i $\mathbb{R}^2$

Sats 2.3

(i) En ON-mängd $e_1, \dots, e_n$ är linjärt oberoende

(ii) Om $e_1, \dots, e_n$ är en ON-bas för V så kan varje $u \in V$ representeras $u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n$

Bevis: (i)

Ekv. $\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n}_{= f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = 0$ (1) har inga icke-triviala lösningar

Sedan (1) $\Rightarrow \langle f, e_i \rangle = \langle 0, e_i \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$

(ii): Varje $u \in V$ kan representeras $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ (2)

och (2) $= \langle u, e_i \rangle = \lambda_i \quad \forall i$ ∎

Sats 2.4

Låt V vara linjärt rum med $\dim V = n \in (0,\infty)$.
Då har V en ON-bas.
(Om $n=1$, är $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$ för godtyckligt $v \in V \setminus \{0\}$
Beviset för $n>1$ följer från Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod

Antag $v_1, \dots, v_n$ är en bas för V. Då bildar GS metoden en ON-bas. På följande sätt:

$$(3)\quad e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \text{ för } j = 2, \dots, n: \; e_j := \frac{v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle e_k}{\| v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle e_k \|} \quad (4)$$

Bevis av att GS-metodens $e_1, \dots, e_n$ är en ON-bas för V:
Ekv: (3) $\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(e_1) = \mathrm{Span}(v_1)$
Antag att $e_1, \dots, e_{j-1}$ är en ON-bas för $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$ för någon $1<j<n$ (gäller för $j=2$) $\Big\}$ (5)

Då är $v_j \notin \mathrm{span}(e_1, \dots, e_{j-1}) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$
Det betyder att $v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle e_k \neq 0$
så det divideras ej med 0 i (4) och $\|e_j\| = 1$
Och för alla $1 \leq i \leq j$ så är

$$\langle e_j, e_i \rangle = \left\langle \frac{v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle e_k}{\| v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle e_k \|}, e_i \right\rangle$$

$$= c_j^{-1} \left(\langle v_j, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \right)$$

$$\overset{(5)}{=} c_j^{-1} \left(\langle v_j, e_i \rangle - \langle v_j, e_i \rangle \right) = 0$$

Var sista ekvationen följer från att (5) $\Rightarrow \langle e_k, e_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{om } k=i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Konklusion: Har visat att om $e_1, \dots, e_{j-1}$ är en ON-bas för $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$
så blir $e_1, \dots, e_j$ en ON-bas för $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_j)$
Beviset följer ur induktion $\boxed{\checkmark}$

Ex. 2.9 Bestäm en ON-bas för $V(A)$ där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

obs = a_1, a_2, a_3 är bas för $V(A)$

Använd GS-metoden.

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1$$

$$e_2 = \frac{a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1}{\| a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1 \|} = \frac{a_2 + \frac{36}{\sqrt{12}} e_1}{\| a_2 + \frac{36}{\sqrt{12}} e_1 \|} = \frac{(3, 1, 1, -1)}{\sqrt{12}}$$

$$e_3 = \frac{a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle e_2}{\| a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle e_2 \|} = \frac{(-1, -1, 3, -1)}{\sqrt{12}}$$

Sats 2.5 (Pythagoras sats)

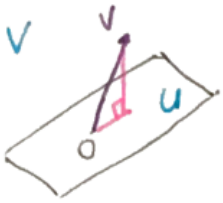
a) Om u och v är ortogonala i V, så är $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

b) Om $\{u_1, \dots, u_n\}$ är en ortogonalmängd i V, så är

$$\| \sum_{i=1}^{n} u_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

Bevis a)

a) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$ ☒



$V = U \oplus U^{\perp}$

Definition 2.5

Låt U vara underrum av V. Det ortogonala komplementet $U^{\perp}$ till U är definierad som $U^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$

$U^{\perp}$ är ett underrum av V (Sats 2.6) och Sats 2.8 (+ Lemma 2.1)

a) Om U är ett underrum av V med $\dim U = k \in [0, \infty)$, så är $V = U \oplus U^{\perp}$, dvs. varje $u \in V$ entydigt kan representeras $u = u' + u''$ var $u' \in U$ & $u'' \in U^{\perp}$

b) För en godtycklig ON-bas för U, $e_1, \dots, e_k$, så är

$$u' = \sum_{j=1}^{k} \langle u, e_j \rangle e_j =: \mathrm{Proj}_U u \quad (6)$$

Bevis:

Existens av en $u' \in U$ så att $u - u' \in U^{\perp}$: Enligt sats 2.4 $\exists$ ON-bas $e_1, \dots, e_k$ för U och u' i (6) uppfyller $\langle u - u', e_i \rangle =$

$$= \langle u, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle u, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle = 0 \ \forall i$$

Dvs. $u - u' \in \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)^{\perp} = U^{\perp}$

Konklusion: $\exists$ representation $u = u' + u''$ var $u' \in U$ och $u'' = u - u' \in U^{\perp}$

Representationen $u = u' + u''$ är entydig:

Antag att $u = u' + u''$ & $u = v' + v''$ var $u', v' \in U$ & $u'', v'' \in U^{\perp}$

$\Rightarrow u = u \ (u' + u'' = v' + v'') \Rightarrow \underbrace{u' - v'}_{\in U} = \underbrace{v'' - u''}_{\in U^{\perp}}$

$w = u' - v' \Rightarrow w = v'' - u''$

$\Rightarrow w \in U \cap U^{\perp}$ dvs w är ortogonal mot sig själv

$\langle w, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow u' = v'$ & $u'' = v''$ $\boxtimes$

Anmärkning: $u' = \mathrm{Proj}_U\, u$ kallas för ortogonalprojektionen av $u \in V$ på underrummet $U \subset V$.

Sats 2.7.

Låt $u \in V$ och antag att U är underrum av V. Följande egenskaper är ekvivalenta för en vektor $\bar{u} \in U$.

(i) $u - \bar{u} \in U^\perp$

(ii) $\|u - \bar{u}\| \leq \|u - w\|$ för alla $w \in U$

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii): För godtyckligt $w \in U$ så är $\bar{u} - w \in U$ och därmed ortogonal mot $u - \bar{u} \in U^\perp$

$$\|u - w\|^2 = \|(u - \bar{u}) + (\bar{u} - w)\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \|u - \bar{u}\|^2 + \underbrace{\|\bar{u} - w\|^2}_{\geq 0} \geq \|u - \bar{u}\|^2 \quad (7)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): sätt $u'' = u - \bar{u}$ (vill vi visa att $u'' \in U^\perp$)

För godtycklig $w \in U$ och $t \in \mathbb{R}$, så är $\bar{u} - tw \in U$ och

$$\|u - (\bar{u} - tw)\| = \|u - \bar{u} + tw\| \overset{(ii)}{\geq} \|u - \bar{u}\| = \|u''\|$$

$\Rightarrow$ Funktionen $\varphi(t) = \|u'' + tw\|$ har minimum vid $t = 0$ $\Rightarrow$

$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle u'' + tw, u'' + tw \rangle \Big|_{t=0} = 0$

$$\Rightarrow \left(\langle w, u'' + tw \rangle + \langle u'' + tw, w \rangle \right) \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \langle u'', w \rangle = 0 \quad (8)$$

Ekv. (8) gäller för alla $w \in U \Rightarrow u'' \in U^\perp$

Om $\dim(U) < \infty$ så implicerar sats 2.8 att $\bar{u} = \text{Proj}_U u$ och Sats 2.7

$$\|u - \text{Proj}_U u\| \leq \|u - w\| \quad \forall w \in U$$

Storgruppsövning 28/3

Definition Skalärprodukt:

V vektorrum, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

(1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$

(2) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(3) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle \quad \forall u_1, u_2, v \in V$

(4) $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

$T: V \to U$ avbildning om $V = U \Rightarrow$ operator

$U = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C} \Rightarrow$ funktional

$\langle u, u \rangle = \|u\|^2$

2.5 Är någon av följande skalärprodukter?

a) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x) g'(x)\, dx$

b) $\langle f, g \rangle = f(a) g(a) + \int_a^b f'(x) g'(x)\, dx \qquad V = C'([a,b])$

a) Vill att $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

$$0 = \langle f, f \rangle = \underbrace{\int_a^b (f'(x))^2 dx}_{L_2 \text{ normen}} = \|f'\|^2$$

Om att L_2-normen är en norm

$0 = \|f'\|_{L_2(a,b)} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f$ är konstant inte nödvändigtvis 0 (tag $f(x) = 5$)

$\Rightarrow$ Det är INTE en skalärprodukt.

$\to$

b) $0 = \langle f, f \rangle = f(a)^2 + \int_a^b f'(x)^2 dx \Rightarrow 0 = f(a)^2 + \|f'\|^2_{L_2(a,b)}$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{f(a)^2}_{\geq 0} = -\underbrace{\|f'\|^2_{L_2(a,b)}}_{\geq 0} \quad (\heartsuit)} \Big\} \leq 0$$

$f(a) = 0$ och $\|f'\|_{L_2(a,b)} = 0$

$\Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f$ är konstant

$\Rightarrow f(x) = 0 \; \forall x \in [a,b] \Rightarrow$ Det är en skalärprodukt

---

2.10 Betrakta rummet P_2 med skalärprodukt i exempel 2.1 (g)

$p, q \in P_n$ olika tidpunkter t_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$

$\langle p, q \rangle = p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2) + \ldots + p(t_{n+1})q(t_{n+1})$

med avseende på tidpunkterna $t_1 = -1$ $t_2 = 0$ $t_3 = +1$

Beräkna $\langle p, q \rangle$, $\|p\|$ och $\|q\|$ där $p(t) = 4 + t$ & $q(t) = 5 - 4t^2$

Bestäm den ortogonala projektionen av q på rummet som genereras av p

t_i	$q = 5 - 4t^2$	$p = 4 + t$	$p \cdot q$	q^2	p^2
-1	1	3	3	1	9
0	5	4	20	25	16
1	1	5	5	1	25

$\langle p, q \rangle = 3 + 20 + 5 = 28$

$\|p\|^2 = \langle p, p \rangle = 9 + 16 + 25 = 50 \Rightarrow \|p\| = \sqrt{50}$

$\|q\|^2 = \langle q, q \rangle = 1 + 25 + 1 = 27 \Rightarrow \|q\| = \sqrt{27}$

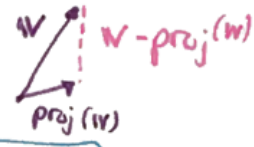
$\rightarrow$

Span$\{p\}$ $\alpha \cdot p$ där $\alpha \in \mathbb{R}$ är en skalning

Vill ha $\tilde{q} \in \text{Span}(p)$ där $\tilde{q}$ är projektionen av q

$$\boxed{\tilde{q} = \alpha \cdot p \quad (\heartsuit)}$$

$\langle q - \tilde{q}, p \rangle = 0 \; \forall p \in \text{Span}(p)$ $(\heartsuit)$



eller $\boxed{\langle q, p \rangle = \langle \tilde{q}, p \rangle \; \forall p \in \text{Span}(p) \quad (\bullet)}$

$\langle \tilde{q}, p \rangle = \langle q, p \rangle$ enligt $(\bullet)$. Smäll in $(\heartsuit)$ i VL

$\langle \alpha p, p \rangle = \alpha \langle p, p \rangle = \langle q, p \rangle$

$\Rightarrow \alpha \langle p, p \rangle = \langle q, p \rangle \Rightarrow \alpha = \dfrac{\langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle} = \dfrac{28}{50}$

Svar: $\tilde{q}(t) = \dfrac{28}{50}(4+t)$

L.2.11 Låt $u \neq 0$, $v \neq 0$ vara vektorer i ett vektorrum så att $\|u\| = \|v\| = \|u - v\|$. Bestäm "vinkeln" mellan u, v

Lösning:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad ☺}$$

Måste skriva om $\langle u, v \rangle$ i termer av $\|u\|$, $\|v\|$ och $\|u - v\|$ som är "kända"

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u - v \rangle - \langle v, u - v \rangle =$$
$$= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - (\langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle)$$
$$= \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\|u\|^2} - 2\langle u, v \rangle + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2}$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \right)$$

Eftersom $\|u\| = \|v\| = \|u - v\|$

$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\|v^2\|$

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{1}{2}\|v\|^2}{\|v^2\|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi/3}$$

L.2.15 Låt $V = C([-1,1])$ och $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

Bestäm en ortogonal bas för det rum som genereras av $\{1, t, t^2\}$

$$\langle 1, t\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot t\,dt = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

1 och t är ortogonala ☺!

Om $\langle 1, t^2\rangle \neq 0$ måste vi hitta ett nytt baselement $p_2(t)$ som uppfyller

$$\boxed{\begin{aligned} \langle p_2, 1\rangle &= 0 \quad (1) \\ \langle p_2, t\rangle &= 0 \quad (2) \end{aligned}}$$

Vi ansätter $p_2(t) = t^2 - \alpha_1 t - \alpha_2 \cdot 1$
$= t^2 - (\alpha_1 t + \alpha_2)$

Vill bestämma α_1 & α_2 m.h.a. (1) & (2)

$$\langle p_2, 1\rangle = \langle t^2 - \alpha_1 t - \alpha_2, 1\rangle = \langle t^2, 1\rangle - \alpha_1 \underbrace{\langle t, 1\rangle}_{=0} - \alpha_2 \langle 1, 1\rangle$$
$$= \langle t^2, 1\rangle - \alpha_2 \langle 1, 1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}} \text{ ☺}$$

$$\langle t^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\,dt = 2\int_0^1 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt = 2\int_0^1 dt = 2\,[t]_0^1 = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Bestäm α_1 mha. ekv (2) p.s.s.

$$\langle p_2, t\rangle = \langle t^2 - \alpha_1 t - \alpha_2, t\rangle = \underbrace{\langle t^2, t\rangle}_{=0} - \alpha_1 \langle t, t\rangle - \alpha_2 \underbrace{\langle 1, t\rangle}_{=0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{\langle t, t\rangle}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

Detta ger att $p_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$ $\quad \{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$ är vår O-bas

1.2.46 | Bestäm tredje ordningens Fourier approximation av
$f(t) = \sin^2(t)$, $0 < t < 2\pi$
L_2-normen, $L_2([0, 2\pi])$

Vi studerar span $\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(nt), \sin(nt)\}$
ON-bas

$$\langle \cos(t), \sin(t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\,dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$$\langle \cos(jt), \cos(kt) \rangle = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\langle \sin(jt), \sin(kt) \rangle = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Vi kan approximera godtyckliga $f \in L_2([0, 2\pi])$ med hjälp av trigonometriska funktioner. Detta kallas Fourier serien $\hat{f}_n$ av ordningen

$$\hat{f}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(it) + b_i \sin(it)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2n} \int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$f(t) = \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\hat{f}_n = f \qquad \hat{f}_3(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(t) + b\sin(t) + \dots +$$

$$a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = 0 \qquad a_0 = 1 \qquad a_2 = -\frac{1}{2} \qquad b_2 = 0$$

L2.44 $f(t) = 2\pi - t \,,\; 0 < t < 2\pi$

$\hat{f}_3(t)$ vill vi ha

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - t)^2\, dt = \ldots = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - t)\cos(nt)\, dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi \cos(nt)\, dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)\, dt}_{I_2}$$

Använd p.i. $\Rightarrow 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - t)\sin(nt)\, dt = \ldots = \frac{2}{n}$$

$$\hat{f}_n(t) = \pi + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i}\sin(it) \quad \text{for } f(t) = 2\pi - t$$

$$\hat{f}_3(t) = \pi + 2\sin t + \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t)$$

Föreläsning 9/4

Plan:

- Fundamentala underrum av $A \subset \mathbb{R}^{m \times n}$
- Minsta kvadratmetoden
- Ortogonala matriser

Repetition:

Låt U vara underrum till (reella) linjära rummet V.

- $U^\perp = \{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U \}$ (1)

  kallas för ortogonala komplementet till U.
- Sats 2.7. Om $\dim(U) = k < \infty$ så gäller $V = U \oplus U^\perp$

  Dvs. varje $v \in V$

kan representeras entydigt $v = v' + v''$ var $v' \in U$ och $v'' \in U^\perp$

För godtycklig ON-bas $e_1, \dots, e_k$ är $v' = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i =: \mathrm{Proj}_U v$

- Sats 2.8. Låt $u \in V$. För en vektor $\bar{u} \in U$ gäller att

  $u - \bar{u} \in U^\perp \iff \| u - \bar{u} \| \leq \| u - w \| \quad \forall w \in U$

Exempel: (uppg 2.39)

Bestäm andragradspolynomet $P(t) = at^2 + bt + c$ så att integralen

$$\int_{-1}^{1} (t^4 - P(t))^2 \, dt = \langle t^4 - P(t), t^4 - P(t) \rangle \quad \text{minimeras}$$

Några steg i lösningen:

$t \in \mathcal{P}_4$, $P(t) \in \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2$ är underrum till P_4. Sats 2.7 & 2.8 ger

$t^4 - \mathrm{Proj}_{\mathcal{P}_2} t^4 \in \mathcal{P}_2^\perp$ och $\| t^4 - \mathrm{Proj}_{\mathcal{P}_2} t^4 \| \leq \| t^4 - f(t) \| \quad \forall f \in \mathcal{P}_2$

Steg 1: Bestäm ON-bas för $\mathcal{P}_2$, t.ex. från $B = \{1, t, t^2\}$ och Gram-Schmidt

Steg 2: Projicera $P(t) = \mathrm{Proj}_{\mathcal{P}_2} t^4 = \sum_{i=1}^{3} \langle t^4, e_i \rangle e_i$ var $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ är min ON-bas för $\mathcal{P}_2$.

Steg 3: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [P]_B = T_{B \leftarrow \mathcal{E}} [P]_{\mathcal{E}}$

Låt $(U^\perp)^\perp = \{ v \in V \mid \langle v, u'' \rangle = 0 \quad \forall u'' \in U^\perp \}$ (2)

Lemma 2.2

Om direktsummauppdelningen $V = U \oplus U^\perp$ gäller då att $(U^\perp)^\perp = U$ (3)

Bevis:

Låt oss visa (i) $U \subset (U^\perp)^\perp$

(ii) $(U^\perp)^\perp \subset U$

Då implicerar (i) & (ii) att $U = (U^\perp)^\perp$

(i): $u \in U \overset{(1)}{\Rightarrow} \langle u, v'' \rangle = 0 \quad \forall v'' \in U^\perp$ (4)

$\overset{(2)}{\Rightarrow} u \in (U^\perp)^\perp$

(ii): $u \in (U^\perp)^\perp \subset V = U \oplus U^\perp$ så finns entydig representation

$u = u' + u''$ var $u' \in U$ & $u'' \in U^\perp$

(4) $\Rightarrow \underbrace{\langle u', v'' \rangle}_{=0} + \langle u'', v'' \rangle = 0 \quad \forall v'' \in U^\perp$

$\Rightarrow \langle u'', u'' \rangle = 0 \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = u' \in U$

(Så $u \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow \ldots \Rightarrow u \in U$) $\square$

Fundamentala underrum

I fortsättningen låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := x^T y$ för $x, y \in \mathbb{R}^n$

Sats 2.11

För $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och standardskalärprodukterna $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^k}$, $k = m$ och n gäller att

$$N(A) = V(A^T)^\perp, \quad N(A)^\perp = V(A^T) \qquad (5)$$

$$N(A^T) = V(A)^\perp, \quad N(A^T)^\perp = V(A) \qquad (6)$$

Bevis: För $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ $\quad a_i \in \mathbb{R}^m$

$A^T = [a_1', a_2', \dots, a_n']$ $\quad a_i' \in \mathbb{R}^n$

så
$$Ax = \begin{bmatrix} \langle a_1', x \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \} \overset{(7)}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a_i' \rangle = 0 \text{ för alla } 1 \leq i \leq n \}$$
$$= \operatorname{span}(a_1', \dots, a_m')^\perp = V(A^T)^\perp \qquad (8)$$

Vidare ger (8) $\quad N(A)^\perp = (V(A^T)^\perp)^\perp = V(A^T)$

Var sista ekv följer från Sats 2.7 & Lemma 2.2 sedan $\mathbb{R}^n = V(A^T) \oplus V(A^T)^\perp$.

Ekvation (5) med matrisen $B = A^T$ ger (6) $\boxed{4}$

Minsta kvadratmetoden

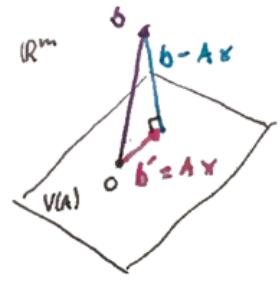
För $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och ekvationen $Ax = b$ (10)
finns det ej exakt lösning om $b \notin V(A)$
Man söker ofta bästa approximativa lösning.

Definition MK-lösning:
$x \in \mathbb{R}^n$ sägs vara lösning till (10), MK-mening om
$\|b - Ax\|^2 \leq \|b - Ay\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$
var $\|b - Ax\|^2 := \sum_{i=1}^{m} (b_i - (Ax)_i)^2$

Sats 2.12.
Det finns (minst) en MK-lösning till $Ax = b$, och x är MK-lösning
omm x löser normalekvationen $A^T A x = A^T b$

Bevis: $U = V(A)$ är ett underrum till $\mathbb{R}^m$.
Sats 2.8 ger att:
$\|b - Ax\|^2 \leq \|b - Ay\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$
omm $(b - Ax) \in V(A)^\perp \overset{(6)}{=} N(A^T)$
dvs. omm $A^T(b - Ax) = 0$ (tänk på $\bar{u} = Ax \in U$ och $w = Ay \in U$, jmf Sats 2.8)

Sedan $\dim V(A) \leq m < \infty$ ger sats 2.7 entydiga representationen
$b \in \mathbb{R}^m = V(A) \oplus V(A)^\perp$, $b = b' + b''$ var $b' = \mathrm{Proj}_{V(A)} b \in V(A)$
$b'' = b - \mathrm{Proj}_{V(A)} b \in V(A)^\perp$
Sedan $b' \in V(A)$ finns minst en lösning till $Ax = b'$ (11),
och varje lösning till (11) är en MK-lösning sedan
$b - Ax = b - b' = b'' \in V(A)^\perp$ ∎



ON-baser och skalärprodukt.

Låt $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ vara en ON-bas för V. Då bevarar motsvarigheten

$$V \ni u \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} x = [u]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^n \quad \text{skalärprodukten}$$

För $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ är $\langle u, v \rangle_V = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = \\ 0, i \neq \end{cases}}$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle [u]_{\mathcal{E}}, [v]_{\mathcal{E}} \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Basbyte mellan ON-baser

Låt $\mathcal{E}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ vara en annan ON-bas för V. Då har vi relationen

$$(12) \quad [u]_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'} [u]_{\mathcal{E}'} \quad \text{var } T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'} = [e_1', \dots, e_n']$$

Matrisen $T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$ uppfyller $T^T = T^{-1}$

Definition 2.7.
En kvadratisk matris A kallas ortogonal om $A^T A = I$

Lemma 2.4.
$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ är ortogonal omm $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ är en ON-bas (för $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$)

Bevis:
Ekvationerna $(A^T A)_{ij} = a_i^T a_j = \delta_{ij}$ för alla $1 \leq i, j \leq n$ gäller omm $\mathcal{A}$ är en ON-bas ∎

Lemma 2.4 och (12) ger:

$$[u]_{\mathcal{E}'} = T^{-1}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'} [u]_{\mathcal{E}} = T^{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'} [u]_{\mathcal{E}}$$

<u>Exempel:</u>

Två ON-baser för $\mathbb{R}^3$: $B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ och $C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$

<u>Bestäm:</u>

a) Koordinaterna till $[u]_B = \begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$ i basen C

b) Elementet $y \in \mathbb{R}^3$ så att $[y]_C = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

a) $[u]_C = T_{C \leftarrow B} [u]_B = T^{T}_{B \leftarrow C} [u] = \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}$

$T_{B \leftarrow C} = [c_1, c_2, c_3]_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$

b) $y = [y]_B$ och $[y]_C = T_{B \leftarrow C} [y]_B$

$\Rightarrow y = T_{B \leftarrow C} [y]_C = \begin{bmatrix}3\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

Storgruppsövning 9/4

2.9 Visa att $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Lösning:

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|v\| + \|u-v\|$$
$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|u\| + \|u-v\|$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \|u\| - \|v\| \leq \|u-v\| \\ \|v\| - \|u\| \leq \|u-v\| \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{\|u\| - \|v\|, -\|u\|\} \leq \|u-v\|$$

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\| \quad \blacksquare$$

2.25 (Matlab) Beräkna det minsta avståndet från $p = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ och skärningen mellan de affina mängderna

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^5$$

Lösning: Definiera matrisen A, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Ax = 0$ (1) Vi är intresserade av x som löser (1)
M.a.o. vi är intresserade av $N(A)$. Vill alltså projicera p på $N(A)$.

$$A \sim \ldots \sim U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \dim(\mathrm{Nol}(A)) = 2$$

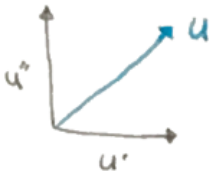
Minsta kvadratmetod

1) Hitta ON-bas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

2) $\hat{p} = \langle p, e_1 \rangle e_1 + \langle p, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \langle p, e_n \rangle e_n$

Dimensionssatsen: $\dim(V(A)) = n - \dim(\mathrm{Nol}(A)) = 5 - 3 = 2$
Sats om rangen: $\dim(V(A) = \dim(V(A^T)) = 2$
Sats 2.11: $N(A)^\perp = V(A^T)$

$\rightarrow$



$u' \in U = N(A)$ $\boxed{u = u' + u'' \iff u'' = u - u'}$

$u'' \in U^{\perp} = N(A)^{\perp} = V(A^T)$

Vi söker efter $\|u''\| = \|u - u'\|$

Vill jobba med $V(A^T)$ $\qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vi vill hitta u'' så att $u'' \in V(A^T)$ $\quad u'' = c_1 v_1 + c_2 v_2$

Så börja med att hitta en ON-bas till $V(A^T)$

Steg 1:

Använd Gram-Schmidt för att hitta en ON-bas till $V(A^T) = \text{span}\{v_1, v_2\}$

Mål: Hitta $\{e_1, e_2\}$ där $\text{span}\{e_1, e_2\} = \text{Span}\{v_1, v_2\}$

$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

1.1 Sätt $e_1 = v_1$

1.2. Sätt $e_2 = v_2 - \alpha e_1$ där α väljs så att $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$

$\langle e_2, e_1 \rangle = \langle v_2 - \alpha e_1, e_1 \rangle = \langle v_2, e_1 \rangle - \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{\langle v_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}} = \dfrac{v_2^T \cdot e_1}{e_1^T \cdot e_1} = -1 \qquad e_2 = v_2 + v_1$

O-bas $\{v_1, v_2 + v_1\}$

ON-bas: $e_1 \leftarrow \dfrac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$

$e_2 \leftarrow \dfrac{1}{\|e_2\|} \cdot e_2$

Vår vektor u'' ges av $u'' = \langle p \cdot e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle p, e_2 \rangle e_2 = 2e_1 + 3e_2 =$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \|u''\| = \boxed{\sqrt{13}}$ Detta är minsta avståndet mellan p & $N(A)$

Se även exempel 2.4 på sidan 78

2.26 U_1 & U_2 är underrum i ett linjärt rum V med skalärprodukt
Visa att $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

Lösning: Tag $z \in (U_1 + U_2)^\perp$

$$\boxed{\langle z, u_1 + u_2 \rangle = 0 \quad \forall u_1 \in U_1 \ \& \ \forall u_2 \in U_2}$$

Linjäriteten hos skalärprodukten ger $\langle z, u_1 + u_2 \rangle = \langle z, u_1 \rangle + \langle z, u_2 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle z, u_1 \rangle}_{\geq 0} = \underbrace{-\underbrace{\langle z, u_2 \rangle}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow \langle z, u_1 \rangle = 0 \quad \forall u_1 \in U_1 \quad \Rightarrow z \in U_1^\perp$

$\Rightarrow \langle z, u_2 \rangle = 0 \quad \forall u_2 \in U_2 \quad \Rightarrow z \in U_2^\perp$

$\Rightarrow z \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$ ∎

2.30 Anpassa modellen $y = A\cos(x) + B\sin(x)$ till mätdatan
Matlab $(1, 7.9), (2, 5.4), (3, -0.9)$

Vill att: $A\cos(1) + B\sin(1) = 7.9$
$A\cos(2) + B\sin(2) = 5.4$
$A\cos(3) + B\sin(3) = -0.9$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ \cos(2) & \sin(2) \\ \cos(3) & \sin(3) \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7.9 \\ 5.4 \\ -0.9 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$A^T y = \begin{bmatrix} 2.9122 \\ 11.4308 \end{bmatrix}$$

Vill lösa $Ax = b$ i MATLAB $x = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A \backslash b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = (A^T A)^{-1} \cdot (A^T y) =$

$= \begin{bmatrix} 2.3921 \\ 7.4973 \end{bmatrix}$

Svar: $A \approx 2.34$
$B \approx 7.50$

$a_1^T (y - \hat{y}) = \langle y - \hat{y}, a_1 \rangle = 0 \quad \forall a_1 \in \mathrm{kol}(A)$

$\Rightarrow A^T (y - \hat{y}) = 0 \quad \Rightarrow A^T (y - Ax) = 0$

$\boxed{A^T y = A^T A x \ (2)}$ (2) kallas för normalekvationen

$A^T A \sim 2 \times 2$
$A^T y \sim 2 \times 1$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1.4452.. & -0.0635 \\ -0.0635 & 1.5548 \end{bmatrix}$$

3.9 | Bestäm $\hat{p}(t) = at^2 + bt + c$ som minimerar

$$\|t^4 - \hat{p}\|^2_{L_2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} (t^4 - \hat{p}(t))^2 \, dt$$

Lösning: Vill välja a, b, c så att $\hat{p}$ är projektionen av $p(t) = t^4$ på integralen alla polynom av grad ≤ 2

Använd "minsta kvadrat" metoden:

Steg 1: Hitta ON-bas $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$

Steg 2: $\hat{p} = \langle p, \tilde{p}_1 \rangle \tilde{p}_1 + \langle p, \tilde{p}_2 \rangle \tilde{p}_2 + \langle p, \tilde{p}_3 \rangle \tilde{p}_3$

steg 1) Se uppgift 2.15 (som vi gjort på storgruppsövningen) där vi tog fram Legendre polynomen $\{1, t, (t^2 - \frac{1}{3})\}$

steg 2) $$\hat{p} = \underbrace{\frac{\langle t^4, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}}_{c_1} \cdot 1 + \underbrace{\frac{\langle t^4, t \rangle}{\langle t, t \rangle}}_{=0} \cdot t + \underbrace{\frac{\langle t^4, t^2 - \frac{1}{3} \rangle}{\langle t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3} \rangle}}_{c_2} \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\langle t^4, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^4 \cdot 1 \, dt = 2 \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{2}{5}$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dt = 2 \int_0^1 dt = 2$$

$$\langle t^4, t \rangle = \int_{-1}^{1} t^4 t \, dt = \int_{-1}^{1} t^5 \, dt = 0$$

$$\langle t^4, t^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \langle t^4, t^2 \rangle - \tfrac{1}{3} \langle t^4, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^6 \, dt - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{7} - \frac{2}{15} = 2\left(\frac{15 - 7}{7 \cdot 3 \cdot 5}\right)$$

$$= \frac{16}{7 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{16}{105}$$

$$\langle t^2 - \tfrac{1}{3}, t^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \tfrac{1}{3}\right)^2 dt = 2 \int_0^1 t^4 - \tfrac{2}{3} t^2 + \tfrac{1}{9} \, dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2 \cdot (9 - 5)}{45} = \frac{8}{45}$$

$$c_1 = \frac{2}{5 \cdot 2} = \frac{1}{5} \qquad c_3 = \frac{16}{105} \cdot \frac{5 \cdot 9}{2 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{6}{7}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$\frac{6}{7} t^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7}\right) =$$

$$= \frac{6}{7} t^2 - \frac{3}{35}$$

Svar: $\hat{p}(t) = \frac{6}{7} t^2 - \frac{3}{35}$

storgruppsövning 11/4

N. 1.6. Felfortplantning i $\sin(x)$ och relatera det till fel γ_i i variabeln x.

a) Gräns för absoluta felet
b) Gräns för relativa felet
c) Gräns för konditionstal
d) För vilka x => problem illakonditionerat

Lösning:

a) Medelvärdessatsen vid x_0

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\cdot(x - x_0) \quad \text{för ngt } \xi \in (x_0, x)$$

$$\delta f(x) \approx f'(x)\cdot \delta x$$

En övre gräns för absoluta felet ges alltså av

$$|\delta f| \leq |f'(x)|\cdot|\delta x| \qquad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow |\delta f| \leq \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1}|\delta y| \leq |\delta x|$$

b) Relativa felet vill begränsa $\left|\frac{\delta f}{f}\right| \leq \left|\frac{f'}{f}\cdot\delta x\right| = \left|x\,\frac{f'}{f}\cdot\frac{\delta x}{x}\right| \leq$

$$\leq \left|x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\cdot\left|\frac{\delta f}{x}\right|$$

$$\left|\frac{df}{f}\right| \leq \left|x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\delta x}{x}\right| = |x\cot(x)|\cdot\left|\frac{\delta x}{x}\right|$$

c) Konditionstal. $k = \dfrac{\text{relativ förändring i utsignal}}{\text{relativ förändring i insignal}} = \dfrac{\left|\frac{df}{f}\right|}{\left|\frac{dx}{x}\right|} \leq |x\cdot\cot(x)|$

d) När blåser k upp? $\dfrac{x}{\sin(x)}\cdot\cos(x)$ problem när $\sin(x) = 0$

Förutom när $x = 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\cos(0) = 1$

Problem när $x = n\cdot\pi$ $n = 1, 2, \ldots$

N.1.18 Längden (2-normen) av en vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definieras

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Ange hur man kan undika onödig "overflow" och skadlig "underflow" vid beräkningen

Lösning: Två fall: 1) Summera små tal, $x_i = \alpha \cdot UFL$ minsta talet

2) Summera stora tal $x_i = \alpha \cdot OFL$ största talet

Fall 1:

Beräknar $x_{max} = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i$

$$\|x\|_2 = x_{max} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{max}}\right)^2}$$

kan få "gradual underflow" men påverkar inte summan.

För att undika "utskiftning" uppkomma summerar stora & små tal

=> sortera i växande ordning så att de små talen blir större tillsammans

=> Samma ide för stora tal!

N.1.22

Låt x och y vara två icke-negativa intill varandra liggande tal i flyttalssystemet IEEE-DP.

a) Vad är minsta avståndet mellan dom?

b) Vad är största avståndet mellan dom?

IEEE-DP: $(\beta, t, L, U) = (2, 53, -1022, 1023)$

$x = m \cdot 2^e$, $L \leq l \leq U \iff -1022 \leq e \leq 1023$

$m = d_0 + \sum_{i=1}^{t-1} d_i \cdot \beta^{-i}$ $\quad 0 \leq d_i \leq \beta - 1 \quad 0 < d_0 \leq \beta - 1$

$i = 1, \ldots, t-1$

$m = 1 + \sum_{i=1}^{52} d_i \cdot 2^{-i}$

$x_{minst} = \left(1 + \sum_{i=1}^{52} 0 \cdot 2^{-i}\right) \cdot 2^{-1022} = 2^{-1022}$

$x_{näst\ minst} = (1 + 2^{-52})\, 2^{-1022} =$

$x_{minst} - x_{näst\ minst} = 2^{-52} \cdot 2^{-1022} = 2^{-1074}$

$x_{störst} = \left(1 + \sum_{i=1}^{52} 2^{-i}\right) \cdot 2^{1023}$

$x_{näst\ störst} \left(1 + \sum_{i=1}^{51} 2^{-i}\right) \cdot 2^{1023}$

$x_{störst} - x_{näst\ störst} = 2^{-52} \cdot 2^{1023} = 2^{971}$

N.1.13 Betrakta $x^2+ax+b=0$

a) är problemet att bestämma rötterna stabilt?

b) Antag att man använder $x_{1,2} = -a + \sqrt{a^2-b}$ med ändlig precision i aritmetiken. Får vi en stabil algoritm? Har koefficienterna värde någon betydelse?

Lösning: Vi har en funktion $\mathbb{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Input: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ Output: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Stabilt problem => Konditionstal

Stabilt algoritm => bakåt felet

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_1(a,b) \\ f_2(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+\sqrt{a^2-b} \\ -a-\sqrt{a^2-b} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{\frac{\|d\mathbb{f}\|}{\|\mathbb{f}\|}}{\frac{\|\delta \mathbb{x}\|}{\|\mathbb{x}\|}}$$

1 dim: $\delta f \approx f' \cdot dx$

Flerdim: & 1 output: $\delta f \approx \nabla f^T \cdot \delta x = \frac{\delta f}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$

Flerdim: & fler output: $\delta f \approx J \cdot \delta \mathbb{x}$ där J är jakobianen

$$J(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(a,b)}{\delta a} & \frac{\delta f_1(a,b)}{\delta b} \\ \frac{df_2(a,b)}{\delta a} & \frac{\delta f_2(a,b)}{\delta b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ db \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} df_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta f_1 = \frac{\delta f_1}{da} da + \frac{\delta f_1}{\delta b} \delta b \qquad \delta f_2 = \frac{\delta f_2}{\delta a} \delta a + \frac{\delta f_2}{\delta b} \cdot db$$

$\because$ $\delta \mathbb{f} \approx y \cdot \delta \mathbb{x}$ "Flerdimensionell medelvärdessats"

$$\frac{df_1}{da} = \frac{d}{da}\left(-a+\sqrt{a^2-b}\right) = -1 + \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{a^2-b}} \Rightarrow \frac{\delta f_1}{da} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b}}\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)$$

$\longrightarrow$

$$\frac{\partial f_1}{db} = \frac{-1}{2\sqrt{a^2-b}}$$

$$\frac{df_2}{da} = \frac{-1}{\sqrt{a^2-b}}\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)$$

$$\frac{df_2}{db} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{a^2-b}}\begin{bmatrix} a-\sqrt{a^2-b} & -1/2 \\ a+\sqrt{a^2-b} & 1/2 \end{bmatrix}$$

Sen hoppar vi till kapitel 5

$$\|y\| = \max_{\delta x \neq 0} \frac{\|y x\|}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \|J\delta x\| \leq \|J\| \cdot \|\delta x\|$$

$$K = \frac{\frac{\|df\|}{\|f\|}}{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}} = \frac{\|df\|\,\|x\|}{\|f\| \cdot \|dx\|} \leq \frac{\|J \cdot dx\|\,\|x\|}{\|f\|\,\|dx\|} \leq \frac{\|J\|\,\cancel{\|dx\|}\,\|x\|}{\|f\|\,\cancel{\|dx\|}} =$$

$$= \frac{\|M\| \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b}\,\sqrt{4a^2-b}}$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \|x\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$f = \begin{bmatrix} -a+\sqrt{a^2-b} \\ -a-\sqrt{a^2-b} \end{bmatrix} \qquad \|f\| = \sqrt{4a^2-2b^2}$$

$$\therefore \; K \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,\|M\|}{\sqrt{a^2-b}\,\sqrt{4a^2-b}}$$

Problem av illakonditionerat när $a^2 \approx b$

b) Algoritm => Bakåtfel

Exempel $(10, 3, -10, 10)$ $\quad a = 1\cdot 10^5 \quad b = 1\cdot 10^6$

$a^2 = 1\cdot 10^{10}$, $a^2 - b = (1 - 0.0001)\cdot 10^{10} = 0.9999\cdot 10^{10}$

$fl(a^2-b) = fl(0.9999\cdot 10^{10}) = 1\cdot 10^{10} = a^2$

Blir problemet då $x = -a + \sqrt{a^2-b}$

$a^2 \gg b \Rightarrow \sqrt{a^2-b} < \sqrt{a^2} = a$

kancellering => När man subtraherar två nästan lika stora tal

$\rightarrow$

Bakåtfel $\dfrac{\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|}$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{-1}(f_1(a,b)) \\ f_2^{-1}(f_2(a,b)) \end{bmatrix}$$

$$f_1^{-1}(a,b) = -\left(\frac{f_1(a,b) + f_2(a,b)}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{-a + \sqrt{a^2-b} + (-a - \sqrt{a^2-b}}{2}\right) = \hat{a}$$

$$f_2^{-1}(a,b) = f_1(a,b) f_2(a,b) =$$

$$= (-a + \sqrt{a^2-b})(-a - \sqrt{a^2-b}) = \hat{b}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-f_1(a,b) + f_2(a,b)}{2} \\ f_1(a,b) f_2(a,b) \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(a + \frac{f_1(a,b) + f_2(a,b)}{2} + b - f_1(a,b) f_2(a,b)\right)}$$

då är $a^2 << b$ $\quad \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \right\| \approx b$

Bakåtfelet $\leq \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = O(1)$

$\Rightarrow$ icke stabilt

Föreläsning 12/4

Hitta rötter till $f(x)=0$, var $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är icke-linjär

Inledning:

Låt x^* vara en rot till $f(x)=0$

En iterationsmetod utgår från startapprox. x_0 och beräknar iterativt en följd $x_1, x_2, \ldots$

Metoden hittar roten asymptotist om $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

Definition (konvergensordning)

Om $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot x^* så är konvergensordningen definierad som största $q \geq 1$ sådan att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^q} = C < \infty \quad \text{för ngt } C > 0$$

Ordningen kallas: $\begin{cases} \text{linjär om } q=1 \text{ och då måste } C<1 \\ \text{super linjär om } q>1 \end{cases}$

Exempel: $x_k = x^* + \delta^k$, $k = 1, 2, \ldots$ med $\delta \in (0,1)$

har konvergensordning $q=1$ ty

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \frac{\delta^{k+1}}{\delta^k} = d$$

Definition (enkel- och multipelrötter)

En rot x^* till $f(x)=0$ kallas för enkelrot om $f(x^*) \neq 0$ och annars för en multipelrot. Multipelroten x^* har multiplicitet m om

$$f'(x^*) = f''(x^*) = f^{(m-1)}(x^*) = 0 \text{ och } f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Exempel: $f(x) = (x-3)^2(x+1)$ har enkelroten $x_1^* = -1$

dubbelroten $x_2^* = 3$

Newtons metod

Motivation:

Antag att f är tillräckligt slät och att x_0 approximerar en rot x^* till $f(x) = 0$

1. Taylorutveckling kring x_0: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

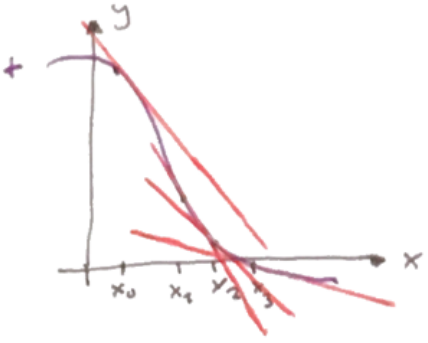
2. Ersätt $f(x) = 0$ med linjära problemet:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (1)$$

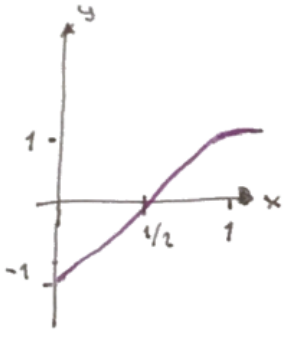
Newtons metod löser (1) iterativt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2) \quad k = 0, 1, \ldots$$



Exempel 2.4.

Lös ekvationen $\underbrace{x - e^{-x}}_{= f(x)} = 0$



Approximation: $x_0 = 0.6$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{1 + e^{-x_0}} = 0.56694991\ldots$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - e^{-x_1}}{1 + e^{-x_1}} = 0.56714328\ldots$$

$$x_3 = 0.56714329$$

Newtons metod är lokalt konvergent:

Sats (Newtons metod)

Antag att x^* är enkelrot till $f(x)=0$ och att det finns ett $\delta \in (0,1)$ sådant att

$$\max_{y,z \in B(x^*;\delta)} \left| \frac{f''(y)}{f'(z)} \right| = \hat{c} < \frac{2}{\delta} \quad (3)$$

Var $B(x_0;\delta) = \{ w \in \mathbb{R} \mid |w - x^*| \leq \delta \}$

Om $x_0 \in B(x^*;\delta)$ så konvergerar Newtons metod (2) mot x^* med ordning $q = 2$

Bevis: Enligt (2) så är $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = 0$ (4)

Och Taylorutveckling av $f(x^*)$ kring x_k

$$0 = f(x^*) = f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2 \quad (5)$$

var $\xi_k \in B(x^*; |x_k - x^*|)$

Ekv. (4) - (5)

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x^*) = \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x_k - x^*)^2$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \right| |x_k - x^*|^2 \quad (6)$$

Om $x_0 \in B(x^*;\delta)$, så måste $\xi_0 \in B(x^*; \underbrace{|x^* - x_0|}_{\leq \delta}) \subset B(x^*;\delta)$ för ξ_0 i (6), och (3) & (6) ger

$$|x_1 - x_*| \leq \frac{\hat{c}}{2} |x_0 - x^*|^2 < |x_0 - x^*|$$

och vid upprepning $|x_k - x^*| \leq \left(\frac{\hat{c}}{2}\right)^k |x_0 - x^*|^{2k} < |x_0 - x^*|^k < \delta^k$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} |x_k - x^*| = \lim_{k \to \infty} \delta^k = 0 \quad \text{(Konvergens)}$$

$\longrightarrow$

Konvergensordningen: Från (6) ser vi att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{|f''(\xi_k)|}{|f'(x_k)|} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|}}_{c}$$

Kommentar:

Om x^* är multipelrot konvergerar fortfarande Newtons metod lokalt, men konv. ordningen blir 1 (se ekv (6))

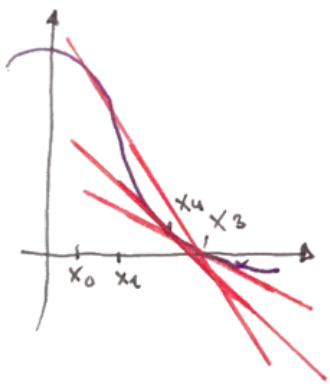
Sekantmetoden: $f'(x) = \int_{-\infty}^{x} \xi(x)\,dx$

Om vi inte känner derivatan till f eller om den är kostsam att beräkna, kan man istället differensapproximera

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (7)$$

Sekantmetoden är väldigt lik Newtons metod men med f' ersatt av differensapproximationen:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)} = x_k - f(x_k)\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} \quad (8) \quad k=1,2,\ldots$$



Det behövs här två startapprox x_0 och x_1

Egenskaper:

- Lokalt konvergent med ordning $q = 1.618$ vid enkelrot.

Exempel 2.5

Lös $x - e^{-x} = 0$

start approximation $x_0 = 0.5$ & $x_1 = 0.6$

$$x_2 \overset{(8)}{=} x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.5675\ldots$$

$\vdots$

$x_4 = 0.56714329\ldots$

Räknestuga 12/4

L.2.4 Visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ är en skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$. Bestäm en ortonormerad bas med avseende på denna skalärprodukt.

Lösning: Enligt definition kräver vi att $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$ gäller:

1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
2) $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
3) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$
4) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ och likhet endast för $\mathbf{x} = 0$

De tre första är enkla att kolla:

2) $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2(cx_1)y_1 - 2(cx_1)y_2 - 2(cx_2)y_1 + 5(cx_2)y_2 =$
$= c(2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2) =$
$= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

4) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 2\left((x_1 - x_2)^2 - x_2^2\right) + 5x_2^2$
$= 2(x_1 - x_2)^2 + 3x^2 \geq 0$ vi ser likhet endast då $\mathbf{x} = 0$

$\rightarrow$

För en ortonormerad bas vill vi ha $e, e' \in \mathbb{R}^2$

med $\left\{ \begin{array}{l} \langle e, e' \rangle = 0 \\ \|e\| = \|e'\| = 1 \end{array} \right\}$

$\langle e, e' \rangle = 2e_1e_1' - 2e_1e_2' - 2e_2e_1' + 5e_2e_2' = 0$

sätt $e_2 = 0$

$\Rightarrow 2e_1e_1' - 2e_1e_2' = 0$ märk $e_1 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2e_1' - 2e_2' = 0 \\ \Rightarrow e_1' = e_2' \end{array}\right\}$ Alltså i $e = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ för ngt $s \neq 0$

$e' = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ för ngt $t \neq 0$

$\|e\| = \sqrt{\langle e_1, e \rangle} = \sqrt{2e_1^2 - 4e_1e_2 + 5e_2^2} = \sqrt{2e_1^2} = \sqrt{2s^2} = 1$

ta tex: $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\|e'\| = \sqrt{2t^2 - 4t^2 + 5t^2} = \sqrt{3t^2} = 1$

Välj t.ex. $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Alltså $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ och $e' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ utgör en ortonormerad bas.

L.2.14 Låt $V = C[0,1]$ vara rummet av alla reell värda, kontinuerliga funktioner.

Låt $\langle u,v\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$, $f = 1-3t^2$, $g = t-t^3$

Beräkna $\langle f,g\rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$

Lösning: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (1-3t^2)(t-t^3)\,dt = \int_0^1 t-3t^3-t^3+3t^5\,dt =$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - t^4 + \frac{t^6}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1-6t^2+9t^4\,dt} = \sqrt{\left[t-2t^3+\frac{9t^5}{5}\right]_0^1} =$$

$$= \sqrt{1-2+\frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 t^2-2t^4+t^6\,dt} = \sqrt{\left[\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{35-42+15}{105}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{105}}$$

N.1.9 Betrakta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ för $x = 0.1$

a) Ange hur känslig beräkningen är för störningar i x

Lösning: Exempel 1.7 i boken: $\delta f \approx f'(x)\,dx$

$$f'(x) = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f'(0.1) = \frac{0.1}{0.99^{3/2}} \approx 0.1 \quad \Rightarrow \delta f \approx 0.1\,dx$$

$\rightarrow$

$$\left\{\text{medelvärdessatsen: } \frac{f(\hat{x})-f(x)}{\hat{x}-x} = f'(\xi) \quad \xi \in [x,\hat{x}] \quad = \frac{df}{dx}\right\}$$

b) Bestäm framåt och bakåtfel för $\hat{f}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} \approx f(x)$ då $x = 0{,}1$

Framåt fel: $\hat{f}(x) - f(x) = 1 + \frac{0.1^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-0.1^2}} \approx -3.8 \cdot 10^{-5}$

Bakåt fel: $f^{-1}(\hat{f}(x)) - x$

$$f^{-1}: f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{y^2} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$$

x måste vara positivt
därför + framför roten

$$f^{-1}(\hat{f}(x)) - x = \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\frac{0.1^2}{2})}} - 0.1 \approx -3.73 \cdot 10^{-4}$$

N1.17 Vilket av följande ekvivalenta uttryck

1: $x^2 - y^2$

2: $(x-y)(x+y)$ kan beräknas mest noggrant i ett IEEE system? När är skillnaden avgörande?

Vi antar att x, y är lagrade flyttal

Lösning: Använd framåtanalys. Kom ihåg: $fl(x \odot y) = (x \odot y)(1+\delta_1)$ där $|\delta_1| \leq \mu$.
maskintalet

$$fl(x-y) = (x-y)(1+\delta_1)$$
$$fl(x+y) = (x+y)(1+\delta_2)$$

$$\left| \frac{fl(fl(x-y)\,fl(x+y) - (x-y)(x+y))}{(x-y)(x+y)} \right| = \left| \frac{(x-y)(1+\delta_1)(x+y)(1+\delta_2)(1+\delta_3) - (x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} \right|$$

$$= \left| \frac{(x-y)(x+y)(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3)}{(x-y)(x+y)} \right| \leq \quad \rightarrow$$

$$\leq |d_1 + d_2 + \ldots| \leq 3\mu + O_1(\mu^2) + O_2(\mu^3)$$
$$\lesssim 3\mu$$

2: begränsad av 3μ oberoende av x & y

$$fl(x^2) = x^2(1+\delta_1) \qquad fl(y^2) = y^2(1+\delta_2)$$

$$\left| \frac{fl(fl(x^2) - fl(y^2) - (x^2-y^2)}{x^2-y^2} \right| = \left| \frac{(x^2(1+d_1) - y^2(1+\delta_2))(1+\delta_3) - (x^2-y^2)}{x^2-y^2} \right|$$

$$\left| \frac{(x^2 + x^2\delta_1 - y^2 - y^2\delta_2)(1+\delta_3) - (x^2-y^2)}{x^2-y^2} \right| = \left| \frac{x^2\delta_1 - y^2\delta_2 + \delta_3(x^2 + x^2\delta_1 - y^2 - y^2\delta_2)}{x^2-y^2} \right|$$

$$\leq |\delta_3| \left| \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} \right| + |1+\delta_3| \left| \frac{x^2\delta_1 - y^2\delta_2}{x^2-y^2} \right|$$

Om nu $\delta_1 \approx \delta_2 \Rightarrow \lesssim |\delta_3| + |1+\delta_3||\delta_1| \left| \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \right|$

om $x \approx y$ så blir gränsen väldigt stor

Avgörande då $x \approx y$

Fredag

Föreläsning 13/4

Fixpunktiteration

Består av skriva om $f(x)=0$ eller mer precist, hitta ett $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sådan att $x=g(x) \Rightarrow f(x)=0$ (9)

En punkt $\bar{x}$ sådan att $\bar{x}=g(\bar{x})$ kallas för en fixpunkt till g
Alla fixpunkter till g är rötter till $f(x)=0$ enligt (9)

Algoritm:

Startapproximation x_0

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad k=0,1,\ldots$$

Om $|x_k - g(x_k)| \to 0$ så är $\lim_{k\to\infty} x_k$ fixpunkt till g, och därmed rot till $f=0$.

Grafisk tolkning:

x är lösning till $x=g(x)$ omm x är lösning till systemet

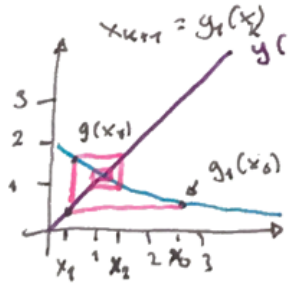
$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$$

dvs x är en skärningspunkt till kurvorna x och $g(x)$

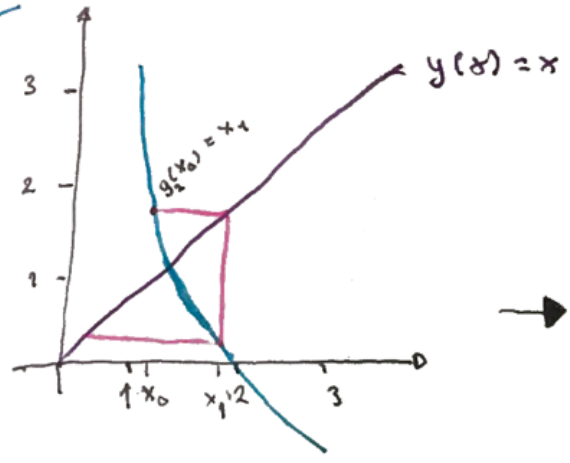
Exempel: Omskrivning av $f(x) = x + \log(x+1) - 2$

ger att $f(x)=0 \iff \begin{cases} x = \underbrace{2-\log(x+1)}_{g_1(x)} \\ x = \underbrace{e^{2-x}-1}_{g_2(x)} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 2-x = \log(x+1)$



när man börjar för långt från punkten kan de bli att man cirkulerar utåt istället



Observation:

Fixpunktiteration konvergerar i detta fallet med $x_{k+1} = g_1(x_k)$ men ej med $x_{k+1} = g_2(x_k)$

Det visar sig bero på

$$|g_1'(x^*)| = \left|\frac{1}{x^*+1}\right| < 1 \qquad (x^* = 1.2079..)$$
$$|g_2'(x^*)| = e^{2-x^*} > 1$$

Resultat

Fixpunktiteration konvergerar lokalt om $|g'(x^*)| < 1$ med ordning 1.

Bevis idee

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \lesssim |g'(x^*)||x_k - x_{k-1}| \lesssim \dots$$
$$\dots \lesssim |g'(x^*)|^k |x_1 - x_0|$$

Metodoberoende feluppskattning

Antag x^* är enkelrot och att du uppskattar felet $x_k - x^* = \delta x$

Taylorutveckling kring x^* ger $f(x_k) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + O(\delta x^2)$

För $\delta x \ll 1$ får vi $\delta x_k \approx \dfrac{f(x_k)}{f'(x^*)} \approx \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (10) $=: \widetilde{\delta x_k}$

$|x^* - x_k| = |x_{k+1} - x_k|$ $\qquad$ $|\widetilde{\delta x}| = |x_{k+1} - x_k|$

Exempel: Antag att $x_k = 0.55$ för något $k \in \mathbb{N}$ och iterationsmetod som löser $f(x) = x - e^{-x} = 0$

Enligt (10)

$$|x_k - x^*| \approx \left| \frac{f(0.55)}{f'(0.55)} \right| \leq 0.0172$$

Iterativa numeriska metoder för lösning av $f(x) = 0$, var $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (1) är icke-linjära.

Newtons metod

Låt x^* vara en rot till $f(x) = 0$ var $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ och låt $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ med $J_{ij}(x) := \frac{\partial f_i}{\partial f_j}$ $1 \leq i, j \leq n$

Taylorutveckling av $f(x)$ kring x_k ger följande linjära approximation av ekv. (1)

$$f(x_k) + J(x_k)(x - x_k) = 0 \quad (2)$$

Algoritm

Startapproximation $x_0 \in \mathbb{R}^n$ iteration:

$$\left.\begin{aligned} J(x_k)\, s_k &= -f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + s_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (3)$$

Kommentar:

$s_k = x_{k+1} - x_k$ kallas försöksriktningen.

Om $J(x_k)$ är inverterbar, kan (3) skrivas $x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k) f(x_k)$

Om $f(x_k) = 0$ och $J(x_k)$ är singulär använder vi konventionen.

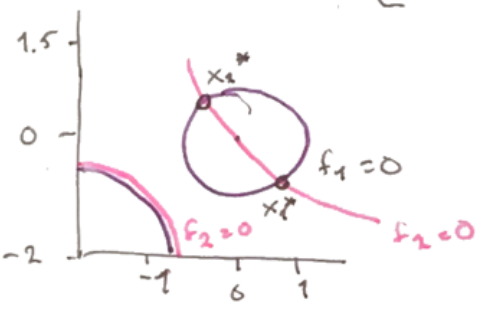
$x_{k+1} = x_k$

Och vi säger om $f(x_k) \neq 0$ och $\det |J(x_k)| = 0$ att metoden misslyckades.

Exempel: 2.12

Betrakta $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ e^{x_1 x_2} + x_1 + x_2 - 1 \end{bmatrix}$

med $J(x) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 e^{x_1 x_2} & +1 \end{bmatrix}$



Med startapprox $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$x_1 = x_0 - J^{-1}(x_0) f(x_0) = \begin{bmatrix} 0.9038 \\ -0.5104 \end{bmatrix}$

$x_2 = x_1 - J^{-1}(x_1) f(x_1) = \begin{bmatrix} 0.8625 \\ 0.5078 \end{bmatrix}$

Grov felskattning $\|x_2 - x_1^*\| = \|J^{-1}(x_2) f(x_2)\| \leq 8.74 \cdot 10^{-4}$

Konvergens:

- Newtons metod i n-dimensioner är lokalt konvergent
- Om $J(x^*)$ är inverterbar (dvs i roten x^*) kallas x^* en reguljär rot, och konvergensordningen är kvadratisk, dvs. $q = 2$
  ($\det(J(x^*)) \neq 0$ liknar på $f'(x^*) \neq 0$ i 1D)
- Om $J(x^*)$ är singulär kallas x^* en singulär rot och konvergensordningen är linjär, dvs $q = 1$
  ($\det(J(x^*)) = 0$ liknar på att $f'(x^*) = 0$ i 1D)

Svagheter: lokala konvergensen och lösning av $J(x_k) s_k = -f(x_k)$ leder typiskt till $O(n^3)$ beräkningskostnad.

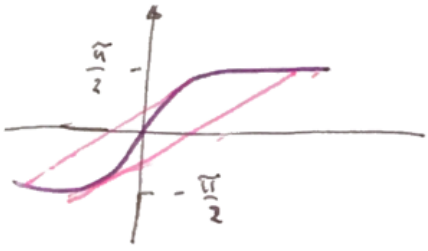
Dämpad Newtons metod

Består av att dämpa storleken på söksteget i eler (3)

$$\left.\begin{aligned} J(x_k)\, s_k &= -f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots$$

var $\alpha_k \in (0, 1]$ väljs tex. sådan att $\|f(x_{k+1})\| < \|f(x_k)\|$

Exempel: 1D



För $f(x) = \arctan(x)$ är $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$x_0 - x_0^2 \leq x_0 - 2x_0 = x_0$

Om $x_0 = 2$ så är $f(x_0) > 1$ och

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0 - (1 + x_0^2)$$
$$< -(x_0+1) < -3$$

$\Rightarrow x_2 > 4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow |x_k| > k \quad \forall k$

Exemplet med $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k \frac{f(\bar{x}_k)}{f'(\bar{x}_k)}$ med $\bar{x}_0 = 2$ och

$\alpha_k = \frac{1}{2}$ ger konvergens $\bar{x}_k \to 0$

Fixpunktiteration

Går ut på att hitta ett $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så att
$x = g(x) \Rightarrow f(x) = 0$ (7)

Algoritm:

Startapprox $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x_{k+1} = g(x_k) \quad k = 0, 1, \ldots$

Om $\|x_k - g(x_k)\| \to 0$, så är $\lim_{k \to \infty} x_k$ fixpunkt till g och enligt (7) också rot till $f(x) = 0$

G är Jacobianen till g

Om $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ och deras Jacobian uppfyller $\|G(x^*)\| < \mu < 1$ då konvergerar metoden lokalt och

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \|x_{k+1} - x_k\| \quad (8)$$

Idé: $\|x^* - x_k\| = \|\sum_{i=k}^{\infty} x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_{i+1} - x_i\|$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) - g(x_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|G'(x^*)\| \, \|x_i - x_{i-1}\|$$

Föreläsning 16/4

Låt $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att $x = g(x) \Rightarrow f(x) = 0$.
låt x^* vara fixpunkt till g och låt $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ vara g:s Jacobian

Resultat:

Om $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ och det finns $\mu, \delta \in (0,1)$ sådana att

$$\|G(x)\| \leq \mu \quad \forall x \in B(x^*, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x^* - y\| \leq \delta\}$$

och om $x_0 \in B(x^*, \delta)$, då gäller att

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \|x_{k+1} - x_k\| \quad (8)$$

Bevis:

(konvergens) Sedan $x_1 = g(x_0)$ & $x^* = g(x^*)$ är

$$\|x_1 - x^*\| = \|g(x_0) - g(x^*)\| = \|G(\xi_0)(x_0 - x^*)\| \leq \|G(\xi_0)\| \cdot \|x_0 - x^*\|$$

var $\xi_0 \in B(x^*; \delta)$

$$\leq \mu \|x_0 - x^*\|$$

$\Rightarrow x_1 \in B(x^*, \delta)$ sådan $\|x_1 - x^*\| \leq \mu \|x_0 - x^*\| < \delta$

$\Rightarrow \|x_2 - x^*\| \leq \mu \|x_1 - x^*\| \leq \mu^2 \|x_0 - x^*\|$

$\Rightarrow x_2 \in B(x^*; \delta) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \|x_k - x^*\| \leq \mu^k \|x_0 - x^*\| \quad \forall k \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{k \to 0} \|x_k - x^*\| = 0$$

(bevis (8))

Använd att $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset B(x^*; \delta)$

För $k \geq 0$ och $l \geq 1$ gäller

$$\|x_{k+l+1} - x_{k+l}\| = \|g(x_{k+l}) - g(x_{k+l-1})\| \leq \mu \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leq \ldots \leq$$
$$\leq \mu^l \|x_{k+1} - x_k\| \quad (9)$$

$\longrightarrow$

Vidare är:

$x^* = \lim_{k \to \infty} x_k$, och därför

$$x^* - x_k = \sum_{l=1}^{\infty} x_{k+l+1} - x_{k+l}$$

$$\| x^* - x_k \| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \| x_{k+l+1} - x_{k+l} \| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l \| x_{k+1} - x_k \| = \frac{\mu}{1-\mu} \| x_{k+1} - x_k \|$$

$\blacksquare$

Kommentarer:

Lokal konvergens om $\| G(x^*) \| < 1$

ej lokal konvergens om $\| G(x^*) \| > 1$

Fallet $\| G(x^*) \| = 1$ kan ge konvergens.

Exempel: $g(x) = -x$ har fixpunkt $x^* = 0$ men

$x_{k+1} = g(x_k)$ ger $|x_{k+1}| = |g(x_k)| = |x_0| \ \forall k$

dvs ej lokal konvergens och $|g'(x^*)| = 1$

$g(x) = x(1-x^2)$ har också en fixpunkt $x^* = 0$ och lokalt är

$|x_{k+1}| = |x_k(1-x_k^2)| < x_k$

$\Rightarrow$ lokal konvergens även om $|g'(x^*)| = 1$

Feluppskattning

För att uppskatta felet $\|x_k - x^*\|$ kan vi Taylorutveckla f kring x^*

$$f(x_k) = f(x^*) + J(x^*)(x_k - x^*) + O(\|x_k - x^*\|^2) \approx J(x_k)(x_k - x^*)$$

$$\Rightarrow \|x_k - x^*\| \approx \|J^{-1}(x_k) f(x_k)\|$$

Plan:

- Polynominteration, Newtons form
- Interpolation med splines.

Interpolation

Antag $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och vi har punkten $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ där vi känner $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$

Interpolationsproblemet

bestämma en funktion $\hat{f}$ som går igenom f i punkterna $x_0, x_1, \dots, x_n$. dvs $\hat{f}(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, 1, \dots, n$

Exempel: Linjärinterpolation. $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $\hat{f} = x$

Motivation: Interpolanten $\hat{f}$ kan t.ex. approximera:

- $f(x) \approx \hat{f}(x)$ $\forall x \in [x_0, x_n]$
- $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} \hat{f}(x)\,dx$
- $f'(x) \approx \hat{f}'(x)$
- $\max_{x \in [x_0, x_n]} f(x) \approx \max_{x \in [x_0, x_n]} \hat{f}(x)$

Polynominterpolation

Antag att vi känner $(x, \overset{f_i = f(x_i)}{f_i})$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$

Vi önskar bestämma att interpolationspolynom p_n sådan att

(2) $P_n(x_i) = f_i \ , \ i = 0, 1, \dots, n$

Newtons form:

Vi gör ansatsen $p_n \in P_n$ och skriver polynomet på Newtons form:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (3)$$

Villkoren (2) leder till ekv. systemet

$$\left.\begin{aligned}
P_n(x_0) &= c_0 = f_0 \\
P_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_0 - x) = f_1 \\
P_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \dots + c_n \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i) = f_n
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Vi kan skriva (4): $AC = f$ var $c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ $\quad f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ och

$A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ är nedåt triangulär och sedan $\det A = \prod_{i<j}(x_j - x_i) \neq 0$ är A inverterbar

---

Konklusion:

Det finns ett entydlig $p_n \in P_n$ som går genom punkterna $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ och på formen (3) har $p_n(x)$ koefficienterna $c = A^{-1}f$

Kommentar:

- Ekv systemet (4) kostar $O(n^2)$ beräkningar att lösa med framåtsubstitution
- Interpolynomet p_n kan representeras på alternativa former. T.ex. $\tilde{p}_n(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \dots + \tilde{c}_n x^n$ (kanonisk form)

och

$$p_n(x) = \frac{\prod_{i \neq 0}(x - x_i)}{\prod_{i \neq 0}(x_0 - x_i)} f_0 + \frac{\prod_{i \neq 1}(x - x_i)}{\prod_{i \neq 1}(x_1 - x_i)} f_1 + \dots + \frac{\prod_{i \neq n}(x - x_i)}{\prod_{i \neq n}(x_n - x_i)} f_n \quad \text{(Lagrange formen)}$$

Kanoniska formen leder till ekv. systemet $\tilde{A}\tilde{c} = f$ var $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ är full matris och systemet kostar $\Theta(n^3)$ att lösa

Lagrangeformen $\hat{p}_n(x)$ kostar $O(n^2)$ att evolvera i varje punkt och är numerisk ostabil

Extra fördel Newton form. Man kan enkelt införa extra interpolationspunkt $P_{n+1}(x) = P_n(x) + c_{n+1}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Exempel:

Anpassa $p_2 \in P_2$ och $p_3 \in P_3$ till de respektive 3 och 4 första punktvärdena i

x_i	0	1	3	5
f_i	1	3	1	7

och bestäm värdet f approximativt vid $x = 4$

Lösning: Newton form

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) =$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$$

Interpolationsvillkoren $p_2(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \ldots$ ger ekv. system.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Med lösning $c_0 = 1 \quad c_1 = 3 - c_0 = 2$

$$6c_2 = 1 - c_0 - 3c_1 = -6 \quad \Rightarrow c_1 = -1$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1 + 2x - x(x-1)$$

Vi använder formen $p_3(x) = p_2(x) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ för att bestämma p_3. Vi ser att $p_3(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2$ är redan uppfyllt och vi måste bara bestämma $p_3(x_3) = f_3$

$$c_3\, 5(5-1)(5-3) = 7 - p_2(5) \Rightarrow c_3 = 2/5$$

Approximation: $f(4) \approx p_3(4) = \frac{9}{5}$

Trunkeringsfel vid interpolation

Trunkeringssatsen

Låt $p_n \in P_n$ vara interpolationspolynomet till $f \in C^{n+1}[a,b]$ genom punkterna $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Då gäller följande $\forall x \in [a,b]$

$$p_n(x) - f(x) = \frac{-f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (5) \quad \text{där } \xi(x) \in [a,b]$$

$$R_T(x) = p_n(x) - f(x)$$

Kallas för trunkeringsfelet

Exempel 3.2

Låt $p_1(x)$ vara linjärinterpolationen av $f \in C^2(\mathbb{R})$ genom punkterna x_0 och $x_1 = x_0 + h$, $h > 0$

Då ger (5) att:

$$R_T(x) = p_1(x) - f(x) = \frac{-f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

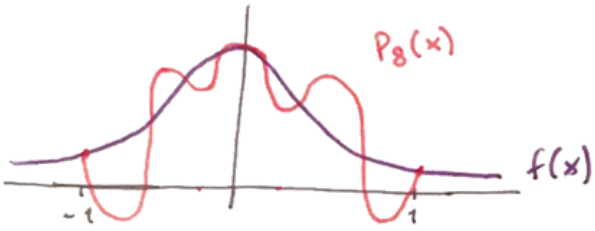
$$\max_{x \in [x_0,x_1]} |R_T(x)| \leq \max_{x \in [x_0,x_1]} \frac{|(x_0-x_1)(x-x_1)|}{2} \cdot \max_{x \in [x_0,x_1]} |f''(x)|$$

$$= \frac{h^2}{8} \max_{x \in [x_0,x_1]} |f''(x)|$$

Runges fenomen

Polynominterpolation av funktionen
$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ genom $n+1$ punkter $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$ $i = 0, 1, \ldots, n$

ger ett trunkeringsfel $\max_{-1 \leq x \leq 1} |R_1(x)|$ som växer när ökar gradtalet n på interpolationspolynomet $p_n(x)$



se storgruppsövning 23/4

räknestuga 16/4

N2.17 a) Formulera Newtons metod för följande system:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

Vi vill alltså hitta $\mathbf{x}$ så att $\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Newtons metod: } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k \text{ där } J(\mathbf{x}_k)\mathbf{p}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \\ \text{1D: } x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{array} \right\}$$

$J(\mathbf{x}_k)$ är Jacobianen $\quad J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x})'_{x_1} & f_1(\mathbf{x})'_{x_2} \\ f_2(\mathbf{x})'_{x_1} & f_2(\mathbf{x})'_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

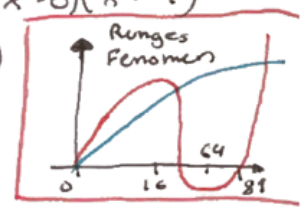
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k+1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{k} + \mathbf{p}_k \quad \text{där} \quad \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_k = -\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}^k$$

N3.6 Bestäm interpolationspolynomet $p_3(x)$ som interpolerar $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ i $x = 0, 2, 16, 81$. Beräkna $p_3(64)$ och jämför med $f(64)$. Varför är skillnaden så stor?

Lösning:

$$\begin{cases} p_3(0) = f(0) = 0 \\ p_3(1) = f(1) = 1 \\ p_3(16) = f(16) = 2 \\ p_3(81) = f(81) = 3 \end{cases}$$

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1) + c_3(x-0)(x-1)(x-16)$$



$$\Rightarrow \begin{aligned} p_3(0) &= c_0 \\ p_3(1) &= c_0 + c_1 \\ p_3(16) &= c_0 + 16 + 16 \cdot 15\, c_2 \\ p_3(81) &= c_0 + 81 + 81 \cdot 80\, c_2 + 81 \cdot 80 \cdot 65\, c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} p_3(0): \\ p_3(1): \\ p_3(16): \\ p_3(81): \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 16 \cdot 15 & 0 \\ 1 & 81 & 81 \cdot 80 & 81 \cdot 80 \cdot 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$c_0 = 0 \qquad c_1 = 1$

$c_2 = \dfrac{2 - 16}{16 \cdot 15} = \dfrac{-2 \cdot 7}{16 \cdot 15} = \dfrac{-7}{8 \cdot 15}$

$c_3 = \dfrac{1}{1404}$ klar!

$$\boxed{p_3(64) - f(64) \approx -33.4}$$

N4.2. Använd trapetsformeln och Richardsonextrapolation för att approximativt bestämma

$$\int_{x_0=0}^{x_1=1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Lösning: Trapetsformeln: $T(h) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$

där $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ och $x_i = x_0 + ih \quad i = 0, 1, \dots n$

$h = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 = n$

$$\Rightarrow T\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{f(0)}{2} + f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{1}}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{16}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{9}{16}} + \frac{\frac{1}{2}}{2}\right) \approx 0.78279$$

$h = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 8 \quad T\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{8}\right) + \dots + f\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{f(1)}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{1}{1}}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{64}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{49}{64}} + \frac{\frac{1}{2}}{2}\right) \approx 0.78475$$

Richardsonextrapolation: $T(h)^{(2)} = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3}$

$$T\left(\tfrac{1}{8}\right)^{(2)} = T\left(\tfrac{1}{8}\right) + \frac{T\left(\frac{1}{8}\right) - T\left(\frac{1}{4}\right)}{3} = 0.78475 + \frac{0.78475 - 0.78279}{3}$$

$$= 0.7854$$

$$\left[\arctan(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.78539$$

Föreläsning 17/4

Låt $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ vara interpolationspunkter och $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

En spline av grad k är en funktion

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Som uppfyller

(i) över varje interpolationsintervall $[x_i, x_{i+1}]$ är $s = s_i$ ett polynom av grad k

(ii) $s \in C^{k-1}[x_0, x_n]$

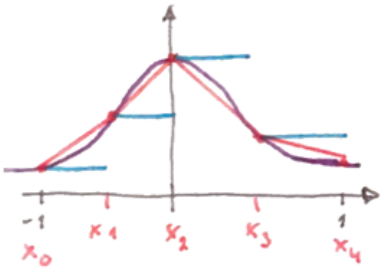
En linjär spline ($k=1$) har villkoren

$s_i(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$

$s_{n-1}(x_n) = f(x_n)$

$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, n-2$

som ger $2n$ ekvationer för att bestämma $2n$ koefficienter



(Illustrerar att man kan undvika Runges fenomen med splines.)

En kvadratisk spline ($k=2$) har villkor

$$\left.\begin{aligned} & s_i(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ & s_{n-1}(x_n) = f(x_n) \\ & \left.\begin{aligned} s_i(x_{i+1}) &= s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s_i(x_{i+1}) &= s_{i+1}(x_{i+1}) \end{aligned}\right\} \; i = 0, 1, \dots, n-2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ett extra villkor behövs t.ex. $s'(x_0) = f'(x_0)$

se boken för kubisk spline

Exempel 3.4

Bestäm den kvadratiska splinen s som interpolerar $f(x) = x^3 + x$ i punkterna 0, 1 och 2 med extravillkoret $s'(0) = 0$

Enligt (7) har vi funktionen

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 & x \in [0,1) \\ s_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 & x \in [1,2] \end{cases}$$

med ekvationerna (se (7))

$$\begin{aligned}
s_0(0) &= f(0) = 0 && \overset{1}{\Rightarrow} a_0 = 0 \\
s_1(1) &= f(1) = 2 && \overset{5}{\Rightarrow} a_1 + b_1 + c_1 = 2 \\
s_1(2) &= f(2) = 10 && \overset{6}{\Rightarrow} a_1 + 2b_1 + 4c_1 = 10 \\
s_0(1) &= s_1(1) && \overset{3}{\Rightarrow} c_0 = s_1(1) = 2 \\
s_0'(1) &= s_1'(1) && \overset{4}{\Rightarrow} b_1 + 2c_1 = 4 \\
s_0(0) &= f'(0) && \overset{2}{\Rightarrow} b_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\overset{4,5,6}{\Rightarrow} a_1 = 2,\ b_1 = -4,\ c_1 = 4$$

dvs

$$s(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \in [0,1) \\ 2 - 4x + 4x^2 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Numerisk integration.

Vi ska se på numeriska metoder för att approximera

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{var } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

En kvadrattur formel är en numerisk integral på formen

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i \quad \text{som approximerar} \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{var } w_i \text{ är}$$

vikter sådana att $\sum_{i=0}^{n} w_i = b-a$ och $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ är kvadraturpunkter.

Trunkeringsfelet ges av $R_T = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i - \int_a^b f(x)\,dx$

Trapetsregeln

Går ut på att ersätta f med linjära interpolanten P_1 genom punkterna a & b dvs.

$$f(x) \approx P_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \text{och}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_1(x)\,dx = \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)(b-a)$$

Trunkeringsfelsatsen ger att:

$$P_1(x) - f(x) = -\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b) \quad (\heartsuit) \qquad \forall x \in [a,b], \ \xi(x) \in [a,b]$$

Om vi antar vidare att $f''(\xi(\cdot)) \in C[a,b]$ så är

$$R_T = \int_a^b P_1(x) - f(x)\,dx \overset{\heartsuit}{=} \int_a^b -\frac{f''(\xi(x))}{2} \underbrace{\frac{(x-a)(x-b)}{\int_a^b (y-a)(y-b)\,dy}}_{= p(x)} dx \int_a^b (y-a)(y-b)\,dy$$

$\rightarrow$

p är en täthetsfunktion dvs. $\int_a^b p(x)\,dx = 1$
& $p \geq 0$

$$= \int_a^b f''(\xi(x))\, p(x)\, dx \cdot \left(\frac{(b-a)^3}{12}\right)' = \frac{f''(\bar{\xi})}{12}(b-a)^3 \quad (\heartsuit)$$

för ngn $\bar{\xi} \in [a,b]$

$$R_T = \frac{f''(\bar{\xi})}{12}(b-a)^3 \quad (\heartsuit) \qquad \bar{\xi} \in [a,b]$$

Uppgift:

Använd $f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_a(x))}{2}(x-a)^2 +$
$+ f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_b(x))}{2}(x-b)^2 \Big)$

till att visa att $R_T = f''(\bar{\xi})\frac{(b-a)^3}{12}$, $\bar{\xi} \in [a,b]$

observation:
- Trapetsregeln är exakt för alla $f \in C^2[a,b]$ med $f''(0)$
- Om f är konvex är $T(h) \geq \int_a^b f(x)\,dx$ och om f är konkav är det omvänt.

Trapetsformeln

Fås vid att dela in $[a,b]$ i n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ med $x_i = a + ih$ och $h = \frac{b-a}{n}$ för $i = 0, 1, \dots, n$
och använda trapetsregeln över varje intervall:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h}_{T(h)}$$

Konvergens:

Från (♡) får vi $R_T = T(h) - \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$ var $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Om vi antar att $f''(\xi(\cdot)) \in C[a,b]$ så finns $\bar{\xi} \in [a,b]$ sådan att

$$\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = \frac{h^2}{12}(b-a)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_i)}{n} = \frac{h^2}{12}(b-a)\,f''(\bar{\xi})$$

$$\Rightarrow \quad R_T(h) = \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\bar{\xi}) \quad (2)$$

Exempel 4.3 (ändrat)

a) Approximera $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2)$ med trapetsmetoden för $h = 1$ & $\frac{1}{2}$

b) Bestäm en övre gräns $\bar{h}$ sådan att $|T(h) - I| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ $\forall h \leq \bar{h}$

---

a) $T(1) = \frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) = \frac{\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1}}{2} = 3/4$

$T(1/2) = \frac{f(0)+f(\frac{1}{2})}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{f(\frac{1}{2})+f(1)}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{24}$

$|R_T(1)| = |\frac{3}{4} - \ln(2)| \approx 0.057$

$|R_T(\frac{1}{2})| = |\frac{17}{24} - \ln(2)| \approx 0.015$

observera att $\frac{|R_T(\frac{1}{2})|}{|R_T(1)|} \approx \frac{1}{4}$ som är konsistent med (2)

b) $|T(h) - I| = |R_T(h)| \leq \frac{1}{12}h^2 \cdot \max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$

$\leq \frac{h^2}{6}$

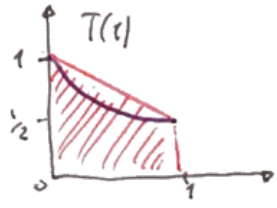
$f(x) = \frac{1}{1+x}$

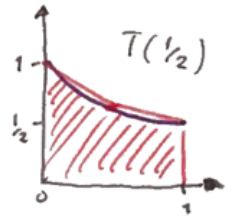
$f'(x) = -(1+x)^{-2}$

$f''(x) = 2(1+x)^{-3}$

$|R_T(h)| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow \bar{h} = \sqrt{3}\cdot 10^{-2}$





Simpsons regel

Fås vid att ersätta f med interpolanten $p_2 \in P_2$ genom punkterna $a, \frac{a+b}{2}, b$

$$p_2(x) = f(a) + 2\frac{\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right)}{b-a}(x-a) + 2\left(\frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{(b-a)^2}\right)(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

Man kan visa att

$$R_T = \int_a^b p_2(x) - f(x)\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \quad (3) \quad \text{för ngn } \xi \in [a,b]$$

(i) Dela in $[a,b]$ i n delintervall från punkterna $x_i = a + ih$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$ med $h = \frac{b-a}{n}$ och n är ett jämt tal

(ii) Använd simpsons regel över $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2(1+i)}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2h}{6}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)})\right) =: \int(h) \quad (4)$$

Från (3) & (4) kan man härleda $R_T(h) = f(h) - \int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \frac{b-a}{180} h f^{(4)}(h) \quad (5) \quad \text{för ngn } n \in [a,b]$$

Föreläsning 19/4

Definition: (Isomorfism)

Två reella linjära rum U och V sägs vara isomorfa om

(i) Det finns en bijektiv avbildning $\phi : U \to V$
(dvs ϕ är 1-1 och ϕ är surjektiv; $\phi(U) = V$
(då finns $\phi^{-1} : V \to U$))

(ii) Avbildningen bevarar U:s vektorsrumstruktur.
Dvs. $\left.\begin{aligned} \phi(u+v) &= \phi(u) + \phi(v) \\ \phi(\alpha u) &= \alpha \phi(u) \end{aligned}\right\}$ $\forall\, u, v \in U$ & $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Notation: Om U och V är isomorfa, skriver vi $\boxed{U \cong V}$

Tolkning: Om $U \cong V$ så har varje $u \in U$ en entydig motsvarighet i $\phi(u)$ i V och viceversa:

$$U \ni u \xleftrightarrow{\phi} v \in V \quad \text{var} \quad u = \phi^{-1}(v) \text{ och } v = \phi(u)$$

Att U och V har samma struktur betyder att många problem kan antingen lösas i U eller V.

t.ex. ger isomorfismen att

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = 0 \iff \alpha_1 \phi(b_1) + \alpha_2 \phi(b_2) + \dots + \alpha_n \phi(b_n) = 0$$

Konklusion: $b_1, b_2, \dots, b_n$ i U är linj. oberoende omm $\phi(b_1), \phi(b_2), \dots, \phi(b_n)$ i V är linj. oberoende och

$$\dim \operatorname{span}(b_1, \dots, b_n) = \dim \operatorname{span}(\phi(b_1), \phi(b_2), \dots, \phi(b_n))$$

Exempel: $P_2 = \text{span}\{1, t, t^2\} \cong \mathbb{R}^3$ som följer från isomorfismen $\phi : P_2 \to \mathbb{R}^3$

$$\phi : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \forall p \in P_2 \text{ var } p = a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2$$

Bestäm om $p_1, p_2, p_3 \in P_2$ är linjärt oberoende var $p_i = a_i + b_i t + c_i t^2$

Lösning: Ekvationen $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$ har icke-trivial lösning omm $\phi(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3) = \phi(0) = 0$ har icke-trivial lösning dvs. omm $\alpha_1 \phi(p_1) + \alpha_2 \phi(p_2) + \alpha_3 \phi(p_3) = 0$ har icke-trivial lösning

Sedan $\phi(p_i) \in \mathbb{R}^3$, löses problemet enkelt genom att beräkna det A för $A = [\phi(p_1) \ \phi(p_2) \ \phi(p_3)] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Motsvarigheter $\xleftrightarrow[B]{}$ är isomorfismer

Låt U vara linj. rum med $\dim(U) = n$ och bas $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Kom ihåg att för $u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in U$ ger motsvarigheten: $U \ni u \xleftrightarrow[B]{} x \in \mathbb{R}^n$

Motsvarighetsavbildningen $[\cdot]_B : U \to \mathbb{R}^n$ definierad som $[u]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right]_B := x$ är linjär (dvs uppfyller (ii) av Def 1)

Sedan för alla $u, v \in V$, skrivna:

$[u]_B = x$, $[v]_B = y$ så är

$$[u+v]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) b_i\right]_B = x + y = [u]_B + [v]_B \quad \text{och}$$

$$[\alpha u]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i b_i\right]_B = \alpha x = \alpha [u]_B \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$

Vidare är $[\cdot]_B$ bijektiv där

$[\cdot]_B^{-1} : \mathbb{R}^n \to U$ ges av $[x]_B^{-1} := \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$
(dvs. Def 1 (i) är uppfyllt)

<u>Konklusion:</u>

$[\cdot]_B : U \to \mathbb{R}^n$ är en isomorfism mellan U och $\mathbb{R}^n$, och varje linj. rum U med $\dim U = n$ är isomorft med $\mathbb{R}^n$

Matrisen för en avbildning.

Låt, som ovan, U ha basen B och låt V vara ett linj. rum med basen $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
Låt $F: U \to V$ vara en linjär avbildning.
För varje $u \in U$ och $v = F(u) \in V$ med $u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ $v = \sum_{i=1}^{m} y_i c_i$ gäller då:

$$\mathbb{R}^m \ni y = [F(u)]_C = \left[F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right]_C = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i F(b_i)\right]_C =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(b_i)]_C x_i = Ax \quad \text{var } A = [F(b_1)\ F(b_2) \dots F(b_n)]_C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Kallas för matrisen till F i baserna B och C.

<u>Tolkning:</u> där $[\cdot]_B$ ger isomorfismen $U \cong \mathbb{R}^n$
och $[\cdot]_C$ ger isomorfismen $V \cong \mathbb{R}^m$

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{är matrisen } A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ uppfyller } v \ni F(u) \underset{C}{\Longleftrightarrow} Ax \in \mathbb{R}^m \\ \forall u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in U \quad \text{dvs } [F(u)]_C = A[u]_B \quad \forall u \in U \end{array} \right.$

<u>Konklusion:</u> För varje linjära $F: U \to V$ finns det minst en basberoend matrisrepresentation A som uppfyller (2)

$\to$

Obs! • I standardbaserna för $U = \mathbb{R}^n$ och $V = \mathbb{R}^m$ är varje linjära $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ på formen $F(x) = Ax$ där $A = [F(e_1)\ F(e_2) \dots F(e_n)] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kallas för standard-matrisen till F

• Om $F: U \to U$ var U har basen B, kallas $A = [F(b_1)\ F(b_2) \dots F(b_n)]$ matrisen till F i basen B

Exempel:

Låt $U = \mathbb{R}^n$ och $V \in \text{span}\{e\}$ för en $e \in U$ med $\|e\| = 1$

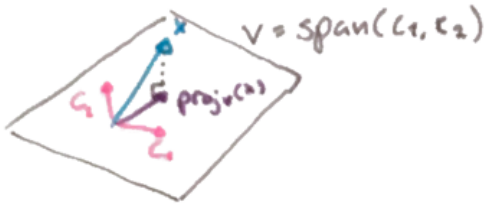
Då är V = linjen genom origo parallell med e

$$\text{Proj}_V(x) = \langle x, e \rangle e = (x^T e) e = (e^T x) e = e e^T x = Ax$$

var $A = e e^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Låt $U = \mathbb{R}^n$ och $V = \text{span}\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ var $c_1, c_2, \dots, c_k$ är ON-bas för V.

Då är $\text{proj}_V(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle x, c_j \rangle c_j = \left(\sum_{j=1}^{k} c_j c_j^T \right) x$ (3)



Spegling i U

En spegling i underrum U av $\mathbb{R}^n$ kan definieras som avbildningen $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som håller $\text{Proj}_U(x)$ oändrat och byter tecken på komponenten i $U^\perp$

$$F(x) = \text{Proj}_U(x) - (x - \text{Proj}_U(x)) = 2\,\text{proj}_U(x) - x$$

Om vi antar $c_1, \dots, c_k$ är ON-bas för U, får F formen

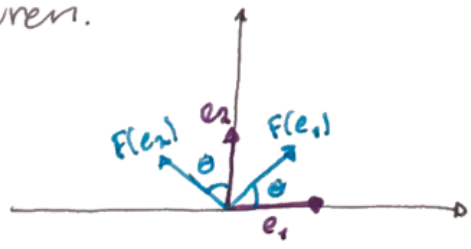
$$F(x) = \underbrace{\left(2\sum_{j=1}^{k} c_j c_j^T - I\right)}_{A} x$$

Ex. Spegling i x-axeln i $\mathbb{R}^2$ $\quad U = \text{span}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{e_1}\right)$

$$F(x) = (2e_1 e_1^T - I)x = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} - I\right)x = \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}x$$

Rotation $F: U \to U$

Om $\dim(U) = 2$ och $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ är ON-bas för U så är rotation i positiv led med vinkeln θ definierad implicit från figuren.



dvs. $F(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$

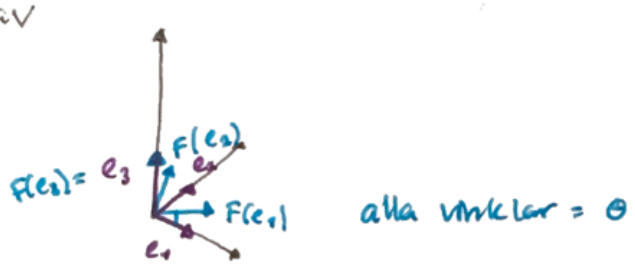
$F(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$

$$\Rightarrow \quad y = [F(x_1e_1 + x_2e_2)]_{\mathcal{E}} = \underbrace{[F(e_1) \;\; F(e_2)]_{\mathcal{E}}}_{= A = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

Var A är matrisformen till basen $\mathcal{E}$.

Om $\dim(O) = 3$ definieras rotationen runt en axel/linje
Om rotationen är runt linjen med $\text{span}(z)$ så är
$F(x) = x \quad \forall x \in \text{span}(z)$.
Låt vidare e_1, e_2 vara ON-bas för $(\text{spann}(z))^{\perp}$ $\quad e_3 = \frac{z}{\|z\|}$
Då definieras rotationen med vinkeln θ i positiv led på e_1, e_2 av



Dvs. $F(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$
$F(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$
$F(e_3) = e_3$,

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ är matrisen till F i basen $\mathcal{E}$

Föreläsning 20/4

Notation:

Låt U & V vara linj. rum och låt $L(U,V)$ vara mängden av linjära avbildningar från U till V. (Om $V = U$, skriver vi $L(U) := L(U,U)$
Kom ihåg att:

$$F \in L(U,V) \quad \text{så} \quad N(F) = \{u \in U \mid F(u) = 0\}$$
$$\text{och} \quad V(F) = \{v \in V \mid v = F(u) \text{ för ngt } u \in U\}$$
$$= F(U)$$

Sats 3.1 (Dimensionssatsen)

Låt $F \in L(U,V)$ var $\dim U = n < \infty$ (V kan vara oändligdimensionellt)
Då gäller att $\dim N(F) + \dim V(F) = \dim U$.

Bevis →

Bevisidé: $(\dim V(F) = n-p)$

Antag att $\dim N(F) = p$, $0 < p < n$.
Låt $e_1, \dots, e_p$ vara bas för $N(F)$.
Sats 1.9 $\Rightarrow \exists\, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ så att
$e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ är bas för U.

För varje $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in U$ gäller

$$F(u) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \underbrace{F\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right)}_{=0 \text{ (sedan } e_1, \dots, e_p \in N(F))} + F\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=p+1}^{p} \lambda_i F(e_i)$$

$\Rightarrow V(F) = \operatorname{span}(F(e_{p+1}), \dots, F(e_n))$

Återstår att bevisa att $F(e_{p+1}), \dots, F(e_n)$ är lin. oberoende och därmed bas för $V(F)$. (anpassa argumentet i beviset till sats 1.19

$\Rightarrow \dim N(F) + \dim V(F) = p + n - p = n = \dim U$ ∎

Konklusion:
Sedan $\dim U = n$ är $U \cong \mathbb{R}^n$. Om $\dim V(F) = n$ så är $V(F) \cong \mathbb{R}^n$ och F är en isomorfism mellan U och $V(F)$.
Annars, om $\dim V(F) < n$, så är F en många till 1 avbildningar.

dvs. för varje $v \in V(F)$ är alla $u \in u_p + N(F)$ lösning till $F(u) = v$ där $F(u_p) = v$ (se sats 1.4)

$$(F(u_p + \bar{u}) = F(u_p) + \overbrace{F(\bar{u})}^{=0} = 0$$

$\bar{u} \in N(F)$

Exempel:

Ortogonal projektion på en linje $U = \text{span}(e)$ i $\mathbb{R}^n$ med $\|e\| = 1$
dvs. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x) = \langle x, e \rangle e = e e^T x$ har $N(F) = (\text{span}(e))^\perp$ och $V(F) = \text{span}(e)$
$\Rightarrow \mathbb{R}^n = N(F) \oplus V(F)$ och $\dim N(F) = n-1$, $\dim V(F) = 1$

Exempel:

linjär avbildning från P_2 till P_4

Betrakta $F \in L(P_2, P_4)$ var $F(p(t)) = (1+t^3)\,p(t)$
Beräkna $\dim V(F)$ och $\dim N(F)$

Med respektive standardbaser $\mathcal{E}_2 = \{1, t, t^2\}$ & $\mathcal{E}_4 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$
blir matrisen till F i basema $\mathcal{E}_2$ och $\mathcal{E}_4$

$$A = \left[F(1) \quad F(t) \quad F(t^2) \right]_{\mathcal{E}_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$$

sedan $F(1) = 1 + t^2$ $\quad [1 + t^2]_{\mathcal{E}_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad F(t) = t + t^3$ $\quad F(t^2) = t^2 + t^4$

Lektion 12 visade att $[\cdot]_{\mathcal{E}_4} : P_4 \to \mathbb{R}^5$ är en isomorfism, så
$\dim V(F) = \dim \text{span}(F(1), F(t), F(t^2)) =$
$= \dim \text{span}([F(1)]_{\mathcal{E}_4}, [F(t)]_{\mathcal{E}_4}, [F(t^2)]_{\mathcal{E}_4}) = \dim V(A) = 3$

Konklusion:

$\dim V(F) = 3$ & $\dim N(F) = \dim(P_2) - \dim V(F) = 0$

Notera: $p \in N(F) \Leftrightarrow [F(p)]_{\mathcal{E}_4} = 0 \Leftrightarrow A[p]_{\mathcal{E}_4} = 0 \Leftrightarrow [p]_{\mathcal{E}_2} \in N(A)$
så vi kunde beräknat $\dim N(F)$ genom att beräkna $\dim(A)$,
sedan $\dim N(F) = \dim N(A)$

$\dim V(F) = \dim \operatorname{span}(F(1), F(t), F(t^2)) =$
$= \dim \operatorname{span}([F(1)]_{\mathcal{E}_4}, [F(t)]_{\mathcal{E}_4}, [F(t^2)]_{\mathcal{E}_4})$

Isomorfismen $[\ ]_{\mathcal{E}_4} : P_4 \to \mathbb{R}^5$ ger att $p_1, p_2, p_3, \ldots$ i P_4 är lin. oberoende omm $[p_1]_{\mathcal{E}_4}, [p_2]_{\mathcal{E}_4}, [p_3]_{\mathcal{E}_4}, \ldots$ är lin. ober. i $\mathbb{R}^5$

Basbyte vid linjära avbildningar

Låt $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ och $B' = \{b_1', \ldots, b_n'\}$ vara två olika baser för linjära rummet V.
Låt $F \in L(V)$ och antag att vi känner $A = [F(b_1) \ldots F(b_n)]_B$ och att vi önskar bestämma matrisen till F i basen B', dvs $A' = [F(b_1') \ldots F(b_n')]_B$

För $u \in V$ och $v = F(u)$, är
$[u]_B = x \quad [u]_{B'} = x' \quad [v]_B = y \quad [v]_{B'} = y'$

Det ger $y = [F(u)]_B = [F(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i)]_B = Ax$ (2)
och analogt $y' = A'x'$ (3)

Från kapitel 1.7 har vi:
$y = [v]_B = T_{B \leftarrow B'} [v]_{B'} = T_{B \leftarrow B'} y'$ (4)
och $x = T_{B \leftarrow B'} x'$
Kort formen $T = T_{B \leftarrow B'}$ och (2)-(4) ger att
$Ty' = y = Ax = ATx'$
$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1}AT}_{=A'} x'$

Från (5) konkluderar vi:

Sats 3.2
$A' = T^{-1}AT$ (6) som sedan
$T^{-1} = T_{B' \leftarrow B}$ också kan skrivas
$A' = T_{B'B} A \quad T_{B \leftarrow B'}$

$\rightarrow$

Notera att $\det(A') = \det(T^{-1}AT)$
$= \det(T^{-1})\det(A)\det(T)$ $\quad \det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$
$= \det(A)$

dvs. avbildningen F sin matris har samma determinant i alla baser. Determinantvärdet kallas avbildningens determinant.

Definition 3.2.
Två matriser $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ som är relaterade enligt (6) dvs. för vilka det finns en inverterbar $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sådan att $A' = T^{-1}AT$ kallas similara.

Exempel

Låt $F \in L(\mathbb{R}^3)$ med standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm matrisen till F i basen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Lösning: Låt $\mathcal{E}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Enligt (6) är $A' = T^{-1}AT$ var $T = T_{\mathcal{E} \leftarrow B} = \left[[b_1]_{\mathcal{E}} \; [b_2]_{\mathcal{E}} \; [b_3]_{\mathcal{E}} \right]$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lös i matlab $A' = T \backslash AT$

Egenskaper hos ortogonala matriser

Kom ihåg att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kallas ortogonal om $A^TA = I$
t.ex. rotationen och speglingar är ortogonala.

$\rightarrow$

Sats 3.3

Antag att $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är ortogonal. Då gäller:

a) $\det(A) \in \{-1, 1\}$

b) $(Ax) \cdot (Ay) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

b') $\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

c) Om $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ också är ortogonal så är AB och BA ortogonala.

Bevis:

a) $1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = (\det(A))^2$

b) $Ax \cdot Ay = (Ax)^T \cdot Ay = A^T x^T A y = x^T I y = x \cdot y$

b') Följer från (b) med $y = x$

c) $(AB)^T / AB = B^T A^T A B = B^T I B = I$

Geometrisk betydelse av ortogonalmatriser i $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^3$

Om A är ortogonal 2×2 matris representerar A en avbildning som antingen är en rotation eller en spegling i linje genom origo (sats. 3.4)

Om A är ortogonal 3×3 betyder 1) $\det(A) = 1$ att A representerar en rotationsavbildning

2) $\det(A) = -1$ att A representerar en rotationsavbildning följd av en spegling i origo $(f(x) = -x)$

Föreläsning 23/4

För att studera egenvärden och egenvektorer till linjära avbildningar behöver vi anta i fortsättningen att V är ett komplext vektorrum $(V, \oplus, \odot, \mathbb{C})$
(som beskrivs i Def 1.1 med skalärer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ istället för i $\mathbb{R}$)

Exempel 1.18 (b)

Mängden $V = \mathbb{C}^n$ med skalärer $\mathbb{C}$ och vanlig komponentvis komplex addition och multiplikation med skalär.
$\mathbb{C}^n$ har basen $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{E}$
var e_k är k-te kolonn, enhetsmatrisen $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sedan $z \in \mathbb{C}^n$ entydigt representeras $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$

Från $\mathbb{C}^n = \text{span}(\mathcal{E})$ följer det att $\dim(\mathbb{C}^n) = n$.

Definition 4.1

Låt V vara ett komplext linjärt rum och $F \in L(V)$.
Ett tal $\lambda \in \mathbb{C}$ kallas ett egenvärde till F om det finns en $u \in V \setminus \{0\}$ sådan att $F(u) = \lambda u$ (1)

Varje $u \neq 0$ som uppfyller (1) kallas en egenvektor till F och λ

Egenrummet hörande till λ $E(\lambda) := \{u \in V \mid F(u) = \lambda u\}$
är ett underrum av V.

Om $\{b_1, \dots, b_n\} = B$ är en bas för V kan sambandet (1)
representeras vid $F(u) = \lambda u \xleftrightarrow[B]{} Ax = \lambda x$
var $A = [F(b_1) \dots F(b_n)]_B$ och $[u]_B = x$

dvs. (2) $Ax = \lambda x$, $x \neq 0 \iff F(u) = \lambda u$, $u = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \neq 0$

Exempel:

- Avbildningen $F(u) = u$ har endast egenvärdet 1 och $E(1) = V$ (dvs varje $u \neq 0$ är egenvektorer till F och $\lambda = 1$
- Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ och avbildningen $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ har två egenvärden $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ med respektive egenvektorer
  $e_1 = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $e_2 = \hat{c}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{c} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{c} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \lambda_2 e_2$$

(Föreläsning 23/4)

Hur bestämmer man egenvärden generellt?

Sats 4.1.

Låt $F \in \mathcal{L}(V)$ var V är komlext linjärt rum av dimension n.
Om A är matrisen till F i någon bas så är λ egenvärdet till F omm. $\det(A - \lambda I) = 0$

$$(2) \quad Ax = \lambda x \iff F(u) = \lambda u$$

Bevis:

Från (2) följer det att λ är egenvärde till F omm.
$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sådan att $Ax = \lambda x$.
och $(A - \lambda I)x = 0$ för $x \neq 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0$ $\boxtimes$

Om A är matrisen till F i basen B och A' är matrisen till F i basen B' så ger Sats 3.2 relationen
$A' = T^{-1} A T$ var $T = T_{B \leftarrow B'}$ (3)

{ A och B är similära om $\exists$ inverterbar C sådant att $A = C^{-1}BC$ }

och $\det(A' - \lambda I) \overset{3}{=} \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \det(T^{-1})\det(A - \lambda I)\det(T)$
$= \det(A - \lambda I)$, sedan $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$

Konklusion:

A och A' har samma egenvärden och för polynomet $P_A(\cdot) := \det(A - \lambda I)$ gäller att $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$ för alla similära matriser A och A'.

Definition 4.2.

$P_A(\lambda)$ kallas karakteristiska polynomet till A (eller till F) och ekvationen $P_A(\lambda)=0$ kallas den karakteristiska ekvationen.

Exempel 4.9.

Beräkna egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

Lösning: Vi söker lösningar till $P_A(\lambda)=0$

dvs. $\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2+\lambda-2$

$\lambda^2-\lambda-2=0$ ger $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$

Egenvektorer fås genom att lösa $(A-\lambda_1 I)x=0$

dvs $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x = 0$ tex. $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

och λ_2: $(A-\lambda_2 I)x=0$ dvs. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} x = 0$ t.ex. $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Det karakteristiska polynomet

Vid utveckling får man för

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & (a_{nn}-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\right)\lambda^{n-1} + \ldots + \det(A) \quad (4.$$

Motivering: endast produkten $\prod_{k=1}^{n}(a_{kk}-\lambda)$ bidrar till λ^n och λ^{n-1}-termer och $P_A(0) = \det(A)$.

Sedan $P_A(\lambda)$ är polynomet av grad n, så finns det enligt algebrans fundamentalteori n rötter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

Det betyder att följande representation också gäller $\rightarrow$

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$
$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) \lambda^{n-1} + \dots + \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Sats 4.1 $\Rightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är egenvärdena till A, och (4) & (5) ger relationerna

- $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} =: Sp(A)$
- $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det(A)$

Sats 4.2.

Matriserna A och A^T har samma egenvärden

Bevis

$$P_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda) \quad \blacksquare$$

Block-triangulära matriser

x_i är en sida i boken typ introduktionen

Om $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

var $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ och $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ med $n_1 + n_2 = n$ kallas A 2×2 block-uppåt triangulär

Då följer (se sidan x_i) att $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

$$= \det \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I_{n_1} & A_{12} \\ & A_{22} - \lambda I_{n_2} \end{bmatrix} = \det(A_{11} - \lambda I_{n_1}) \det(A_{22} - \lambda I_{n_2})$$

Konklusion: λ är egenvärde till A omm λ är egenvärde till A_{11} och/eller A_{22}.

Resultatet gäller också för $N \times N$ block-uppåt triangulära matriser och sedan A och A^T har samma egenvärden också för block-nedåt triangulära matriser.

Exempel 4.10.

Bestäm egenvärdena till $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$

Lösning: Sedan A är block uppåt triangular med $A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ och $A_{22} = [2]$ är egenvärdena

$$P_{A_{11}}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 2$$

Exempel 4.11

Låt $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ och D vara deriveringoperatorn
$D(f)(t) = f'(t)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Bestäm egenvektorer & egenfunktioner.

Lösning: För varje $\lambda \in \mathbb{C}$ är $f_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ är en egenfunktion sedan $D(f_\lambda)(t) = f_\lambda'(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f_\lambda(t)$

En $n \times n$ matris $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ har alltid n-egenvärden (med multiplicitet) men det finns ej alltid n linjärt oberoende motsvarande egenvektorer,

---

Exempel 4.13

För matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är $P_A(\lambda) = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Egenvektorer till $\lambda = 0$ måste lösa $(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$

$\Rightarrow$ A har endast en linj. oberoende egenvektor. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Definition 4.3

Den algebraiska multipliciteten $m_a(\lambda)$ är multipliciteten till egenvärdet λ som rot till $P_A(\lambda) = 0$.

Den geometriska multipliciteten $m_g(\lambda) := \dim(E(\lambda))$

(är det maximala antalet linj. oberoende egenvektorer hörande till λ)

I ex. 4.13 såg vi att $1 = m_g(0) < m_a(0) = 2$

Om $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$ kallas egenvärdet λ för defekt.

Lemma 4.1

Om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Storgruppsövning 23/4

Definition: Konvergensordning (sida 37, ekv. 2.4)
$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ talföljd konvergerar mot x^* => konvergens ordning är det största tal q i $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k - x^*|^q} = c < \infty$

N. 2.10 Visa att Newtons metod konvergerar linjärt med assymptotiska felkonstanten $c = 1/2$ vid dubbelrötter

Lösning: Vill visa $q=1$ & $c = 1/2$

Newtons metod $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ => $0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ (1)

Vi Taylorutvecklar $f(x^*)$ där x^* är roten.

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2 \quad (2)$$

där $\xi \in (x_k, x^*)$

Vi sätter (1) = (2) och förenklar $\cancel{f(x_k)} + f'(x_k)(x_{k+1} - \cancel{x_k}) =$

$$= \cancel{f(x_k)} + f'(x_k)(x^* - \cancel{x_k}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad -f'(x_k)(x^* - x_{k+1}) = \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2 \quad (3) \quad \text{där } \xi \in (x^*, x_k)$$

$f(x) = (x - x^*)^2 h(x)$ där $h(x^*) \neq 0$ =>

=> $f'(x) = 2(x - x^*)h(x) + (x - x^*)h'(x)$

Vi vet att $f'(x^*) = 0$ => $0 = f'(x^*) = f'(x_k) + f''(\xi_k)(x^* - x_k)$ för ngt $\xi \in (x^*, x_k)$

=> $f'(x_k) = -f''(\xi_k)(x^* - x_k)$ (4)

(4) i (3): => $f''(\tilde{\xi}_k)\cancel{(x^* - x_k)}(x^* - x_{k+1}) = \frac{f''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^{\cancel{2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f''(\tilde{\xi}_k)} \quad \text{där } \xi_k, \tilde{\xi}_k \in (x^*, x_k)$$

→

Vet $\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{\xi}_k = x^*$

Enligt definition av konvergensordning: $\lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|} =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_k)}{f''(\tilde{\xi}_k)} \right| = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f''(x^*)} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

N.2.13 | Vi vill beräkna $\sqrt{a}$ mha. $f(x)=0$ med $f(x) = x^2 - a$

Undersök två varianter av fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ är lokalt konvergenta då $a=3$

Kontrollera först att fixpunktsomskrivningarna är korrekta.

a) $g(x) = a + x - x^2$

b) $g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{a}$

c) Hur ser fixpunktsinterationen ut för Newtons metod?

Idé: skriv om $f(x)=0$ till $x=g(x)$ lokalt konvergent om $|g'(x^*)| < 1$

a) $f(x) = x^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 - x + x - a = 0 \Rightarrow g(x) = a - x - x^2 = x$

$g'(x) = 1 - 2x$

$|g'(\sqrt{a})| = |g'(\sqrt{3})| = |1 - 2\sqrt{3}| > 1$ instabil

b) $f(x) = x^2 - a = 0 \Rightarrow a\left(\frac{x^2}{a} - 1\right) = 0 \Rightarrow a\left(\frac{x^2}{a} + x - x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a} - x + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + x - \frac{x^2}{a} = g(x)$

$g'(x) = 1 - \frac{2x}{a}$

$|g'(\sqrt{a})| = |g'(\sqrt{3})| = \left|1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right| < 1$ stabil

$\longrightarrow$

c) " $x^* = g(x^*)$ "

Newtons $x_{k+1} = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{g(x_k)}$

$$\left.\begin{aligned} f(x_k) &= x_k^2 - a \\ f'(x_k) &= 2x_k \end{aligned}\right\} g(x_k) = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right)$$

N. 2. 18 | Betrakta $x_1 - 1 = x - 1 = 0$

$x_2 x_1 - 1 = xy = 0$

a) För vilken startapproximation x_0 misslyckas Newtons metod?

b) Visa att metoden konvergerar efter två iterationer?

En iteration med Newtons metod

i) $\begin{cases} J(x_k)\,\delta_k = -f(x_k) \text{ där } \delta_k = x_{k+1} - x_k \\ x_{k+1} = x_k + \delta_k \end{cases}$

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x - 1 \\ xy - 1 \end{bmatrix} \qquad J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix}$$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$$

När J är singulär (dvs. icke inverterbar) funkar ej Newtons metod $\det(J) = x$ $\det(J(x_0)) = x_0$ funkar ej när $x_0 = 0$

b) En iteration med Newtons metod

$$\left\{ \begin{array}{l} J(x_k)\,\delta_k = -f(x_k) \quad \text{där} \quad \delta_k = x_{k+1} - x_k \\ x_{k+1} = x_k + \delta_k \end{array} \right\}$$

$x_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta_0$ ges av $J(x_0)\delta_0 = -f(x_0)$

Iteration 1:

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix}, \quad -f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x & -1 \\ x\,y & -1 \end{bmatrix}$$

$\delta_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}$ löser

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-x_0 \\ y_0 & x_0 & 1-x_0y_0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-x_0 \\ 0 & x_0 & 1-y_0 \end{array}\right]_{\forall x_0} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-x_0 \\ 0 & 1 & \frac{1-y_0}{x_0} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \delta_0 = \begin{bmatrix} 1-x_0 \\ \frac{1-y_0}{x_0} \end{bmatrix}$$

1.2. $x_1 = x_0 + \delta_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_0 \\ \frac{1-y_0}{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y_0 + \frac{1-y_0}{x_0} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{matrix} 1 \\ y_0 + \frac{1-y_0}{x_0} \end{matrix}$

Iteration 2:

δ_2 ges av $J(x_1)\delta_2 = -f(x_1)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \quad -1 \\ y_0 + \frac{1-y_0}{x_0} & 1 & 1-\left(y_0 + \frac{1-y_0}{x_0}\right) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ y_0 + \frac{1-y_0}{x_0} & 1 & 1-\left(y_0 + \frac{1-y_0}{x_0}\right) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\left(y_0 + \frac{1-y_0}{x_0}\right) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\left(y_0 + \frac{1-y_0}{x_0}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = x_1 + \delta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \cancel{y_0 + \frac{1-y_0}{x_0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\left(\cancel{y_0 + \frac{1-y_0}{x_0}}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x^* \quad \blacksquare$$

N.3.1 Bestäm interpolationspolynomet till
$(-1,1) = (x_0, y_0)$, $(0,0) = (x_1, y_1)$, $(1,1) = (x_2, y_2)$

Lösning: Vill hitta $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$.
Vi skriver vårt polynom på Newton form:
$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$

I vårt fall: $p(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x$ (1)

Vill välja c_0, c_1, c_2 så att p går genom punkterna

$\underset{= y_0}{p(-1) = 1}$ $\quad \underset{= y_1}{p(0) = 0}$ $\quad \underset{= y_2}{p(1) = 1}$

$$p(-1) = c_0 + 0c_1 + 0c_2 = 1$$
$$p(0) = c_0 + c_1 + 0c_2 = 0$$
$$p(1) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gausselimination ger:
$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = 1 + (-1(x+1) + 1(x+1)x) = 1 - (x+1) + 1(x+1)x = 1 - x - 1 + x^2 + x$$
$$= x^2$$

Svar: $p(x) = x^2$

N. 3.9 | Är det allmänhet möjligt att passa en kvadratisk spline till n datapunkter så att

a) Kontinuerligt deriverbar

b) två ggr kont deriverbar?

Om nej, hur många datapunkter

a) Ja, en spline av grad k kommer alltid ha k-1 kont. derivator

b) Nej, endast två kont. derivator när n=3 ty då är spline-interpolationspolynom.

Föreläsning 24/4

Diagonalisering av matriser

Sats 4.5

Antag att $n \times n$ matrisen A har n linjärt oberoende egenvektorer e_i, $i = 1, \dots, n$ med tillhörande egenvärden λ_i. Då gäller att:

$$T^{-1}AT = D \quad \text{där } T = [e_1\ e_2\ \dots\ e_n]$$

och

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_3 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

och varje egenvärde uppfyller $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$

Bevis:

Från ovan hur vi $AT = [Ae_1\ Ae_2\ \dots\ Ae_n] = [\lambda_1 e_1\ \lambda_2 e_2\ \dots\ \lambda_n e_n] =$

$$= \left[T\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad T\begin{bmatrix}0\\\lambda_2\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \dots \quad T\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\lambda_n\end{bmatrix} \right] = TD$$

Sedan $e_1, \dots, e_n$ är linjärt oberoende är T inverterbar och $T^{-1}AT = D$. (Återstår, multiplicitet samma $m_g = m_a$)

Låt $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_k'$ beteckna de olika egenvärdena till A. Då följer det att $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j') = n = \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j')$ ∎

Lemma 4.1

$$m_g(\lambda_k\ m_a(\lambda)) \Rightarrow m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j)$$

Definition 4.4 Diagonaliserbar:

Matrisen A kallas diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris T och diagonalmatris D sådana att: $A = TDT^{-1}$

Sats 4.6

Egenvektorerna till A tillhörande olika egenvärden är linjärt oberoende

Bevis: Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vara olika egenvärden till A med motsvarande egenvektorer $e_1, \dots, e_k$

Låt $m = \dim(\text{span}(e_1, \dots, e_k))$

Antag $m < k$ ← visa att detta är motsägelse

Efter ev. omnumrering kan vi anta $e_1, \dots, e_n$ är linj. oberoende och $\Rightarrow$ $e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m$ (1)

då gäller

Applicera A på ekv. (1): $\lambda_k e_k = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m e_m$ (2)

$\lambda_k \cdot$ ekv(1) − ekv(2) ger: $0 = \alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)e_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_k - \lambda_m)e_m$ (3)

Eftersom $\lambda_k - \lambda_j \neq 0 \ \forall j = 1, \dots, m$ implicerar (3) att $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ ($e_1, \dots, e_m$ linj. ober)

Ekvation (1) med $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ ger att $e_k = 0$, som är en motsägelse.

$\dim(\text{span}(e_1, \dots, e_k) = m < k$

$\Rightarrow$ omnumrert $e_k = 0 \Rightarrow$ motsägelse $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\text{span}(e_1, \dots, e_k)) = k$ ∎

$n \times n$ matrisen är diagonaliserbar

- omm inget egenvärde är defekt (Sats 4.8)
- Specialfall 1: om A har n olika egenvärden (Sats 4.7)
- Specialfall 2: om A är symmetrisk, dvs. om $A = A^T$ (spektralsatsen

---

Exempel 4.14

I ex. 4.10 såg vi att $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdena

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ och $\lambda_3 = 2$

Hittar e_i genom att lösa $(A - \lambda_i I) e_i = 0$ $i = 1, 2, 3$

$i = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} e_1 = 0$ ger t.ex. $e_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

och på samma sätt $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Sats 4.6 $\Rightarrow$ e_1, e_2, e_3 är linj. oberoende och
Sats 4.5 $\Rightarrow$ $T^{-1} A T = D$ var $T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Symmetriska avbildningar

Egenvärderna till symmetriska linjära avbildningar visar sig vara reella. Därför betraktar vi i fortsättningen ett reellt vektorrum $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R})$ med skalärprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Definition 4.5

a) $F \in L(V)$ kallas symmetrisk om $\langle u, F(u) \rangle = \langle F(u), v \rangle \ \forall u, v \in V$

b) En matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas symmetrisk om $A^T = A$

Sats 4.9 $\quad [\cdot]_\varepsilon : V \to \mathbb{R}^n$

Låt $\varepsilon = e_1, \ldots, e_n$ vara ON-bas för V, låt $F \in L(V)$ och låt A vara matrisen till F i basen ε. Då är F symmetrisk omm $A = A^T$

Sats 4.10

Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk så är alla egenvärdena reella

Bevis: Låt (λ, x) vara egenpar till A, dvs. $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ (4) och antag att vi ännu inte uteslutit att $\lambda \in \mathbb{C}$ och $x \in \mathbb{C}^n$

{Låt $\bar{\cdot}$ beteckna komponentvis komplex konjugat $\bar{x}^T = x^H$}

$\rightarrow$

Från (4) har vi $\bar{x}^T A x = \bar{x}^T \lambda x = \lambda |x|^2$ (5)

och

$(\overline{Ax})^T = (\overline{\lambda x})^T x$ dvs. $\bar{x}^T \bar{A}^T x = \bar{\lambda} |x|^2$

sedan $|x|^2 \neq 0$ Symmetri och $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ implicerar (5) & (6)

$\bar{x}^T A x = \bar{\lambda} |x|^2$ (6)

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \operatorname{im}(\lambda) = 0$ $\square$

Lemma 4.3

Om $\dim(V) = n$, $n \in [1, \infty)$ och $F \in L(V)$ är symmetrisk så har F minst ett (reellt) egenvärde.

Bevis: Låt $\mathcal{E} = e_1, e_2, \dots, e_n$ vara ON-bas V och låt A vara matrisen till F i basen $\mathcal{E}$.

Då gäller:

$$F(u) = \lambda u \iff A[u]_{\mathcal{E}} = \lambda [u]_{\mathcal{E}} \quad (7)$$

Sedan A är symmetrisk. (Sats. 4.9) finns minst ett egenpar $\lambda \in \mathbb{R}$ och $x \in \mathbb{R}^n$ sådan att $Ax = \lambda x$

(7) $\Rightarrow F(u) = \lambda u$, var $u = [x]_{\mathcal{E}}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $\square$

Sats 4.11

Antag att $F \in L(V)$ är symmetrisk. Då är egenvektorer hörande till olika (reella) egenvärden ortogonala.

Bevis: Antag att $F(u_1) = \lambda_1 u_1$ och $F(u_2) = \lambda_2 u_2$ (8) var $\lambda_1 = \lambda_2$

Då F är symmetrisk gäller $\langle u_1, F(u_2) \rangle = \langle F(u_1), u_2 \rangle$ (9)

(8) & (9) $\Rightarrow \langle u_1, \lambda_2 u_2 \rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle \iff (\lambda_2 - \lambda_1) \langle u_1, u_2 \rangle = 0$

sedan $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0$ $\square$

Sats 4.12 (Spektakelsatsen)

Låt $F \in L(V)$ vara symmetrisk och V är ändligtdimensionell (reellt) linjärt rum. Då finns en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F.

Bevis:

Om $\dim V = 1$ måste $F(u) = \lambda u$ för ngt $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Satsen håller

$\boxed{\text{Antag att satsen håller för alla linjära rum } V \text{ av dimension } n \text{ och } F \in L(V), \text{ symmetrisk}}$ (10)

Betrakta godtyckligt V med dimension $n+1$ och en symmetrisk $F \in L(V)$.

Lemma 4.3 $\Rightarrow \exists$ egenpar (λ_1, e_1) sådan att $F(e_1) = \lambda_1 e_1$ var $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\|e_1\| = 1$

Låt $U = \text{span}(e_1)^\perp$. Då är $V = \text{span}(e_1) \oplus U$ och $\dim(U) = n+1 - \dim(\text{span}(e_1)) = n$ (Sats 2.9.)

Låt $\hat{F} : U \to V$ vara definierad som $\hat{F}(u) = F(u)$ $\forall u \in U$

Symmetrin till F ger att $\langle \hat{F}(u), e_1 \rangle = \langle F(u), e_1 \rangle = \langle u, F(e_1) \rangle =$
$= \langle u, \lambda_1 e_1 \rangle = 0$ $\forall u \in U$

$\Rightarrow \hat{F}(u) \in U$ $\forall u \in U$, dvs. $\hat{F} \in L(U)$

$\hat{F}$ är symmetrisk: $\langle \hat{F}(u), v \rangle = \langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle = \langle u, \hat{F}(v) \rangle$
$\forall u, v \in U$

Sedan U är linjärt rum med $\dim(U) = n$, implicerar (10) att $\exists$ ON-bas $e_2, \dots, e_{n+1}$ för U bestående av egenvektorer till $\hat{F}$ med motsvarande egenvärden $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$

Sedan $F(e_k) = \tilde{F}(e_k) = \lambda_k e_k$ för $k = 1, \dots, n+1$
är $e_1, \dots, e_{n+1}$ egenvektorer för F och ON-bas för
$V = \text{span}(e_1) \oplus U$.

Med induktion gäller satsen för godtycklig n och
symmetrisk $F \in L(V)$ ∎

Användning:

För $u \in V$ kan vi skriva $u = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u \rangle e_k$ i ON-egenvektorba till symmetrisk $F \in L(V)$.

$$F(u) = F\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u \rangle e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, u \rangle e_k$$

$$F^2(u) = F \circ F(u) = F\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, F(u) \rangle e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \langle e_k, u \rangle e_k$$

och $F^N(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N \langle e_k, u \rangle e_k \quad \forall N \in \mathbb{N}$ och om $\lambda_k \neq 0 \ \forall k$

$$F^{-1}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \langle e_k, u \rangle e_k$$

Storgruppsövning 25/4

N.4.1 Beräkna approx. till $\int_0^1 x^3\,dx$ mha Trapetsregeln och Simpson: Uppskatta trunkeringsfelet

Trapetsregeln: $I_T = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ (mitt punktsregeln)

$b=1,\ a=0$ i vårt fall

$$\begin{cases} f(b) = f(1) = 1^3 = 1 \\ f(a) = f(0) = 0^3 = 0 \end{cases}$$

Simpson: $I_S = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(0+1+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$

$= 1/6 \cdot 3/2 = 1/4$

Trunkeringsfel: Trapets: $R_T = \frac{f^{4}(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \xi \in (0,1)$

Simpsons: $R_S = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^I$

$f'(x) = 3x^2$ $\qquad f'(\xi) = 6\cdot\xi$

$f''(x) = 6x$ $\qquad f'''(x) = 0 \Rightarrow R_S = 0$

$f'''(x) = 6$

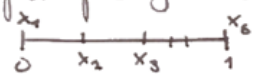
$$R_T = \frac{6}{12}\cdot(1-0)^3 = \frac{1}{2}\xi = \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}$$

N.4.3 Antag $\sum_{i=1}^{n} w_i$, $f(x_i)$, $0 \leq x \leq 1$

vikter

kvadratformel som bygger på polynominterpolation.

Visa att $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$



Bevis: Välj $f(x) = \mu$ Konstant funktion

$\int_0^1 f(x)\,dx = \mu\int_0^1 dx = \mu$ dessa 2 är lika ger $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i\cdot\mu = \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)$

$\Rightarrow \cancel{\mu} = \cancel{\mu}\sum_{i=1}^{n} w_i \Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{n} w_i$ ■

N.4.9) För att beräkna ett visst integralvärde användes trapetsformeln med $h = 0.2$ och trunkeringsfelet uppskattas till $R_T = 10^{-3}$. Hur skall man välja h så att R_T blir mindre än 10^{-5} (under antagandet att felformlerna gäller)?

Lösning: $R_T = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2 = \frac{f''(\xi)}{3}(b-a)\frac{h^2}{4} = \frac{f''(\xi)}{3}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2$

I vårt fall $R_T(h) = R_T(0.2) = R_T(2\cdot 10^{-1}) = 10^{-3}$

$$10^{-3} = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)\cdot(2\cdot 10^{-1})^2 = \frac{f''(\xi)}{3\cdot \cancel{4}}(b-a)(\cancel{4}\cdot 10^{-2})$$

$$\Rightarrow 10^{-3} = \frac{f''(\xi)}{3}(b-a)\cdot 1\cdot 10^{-2} \Rightarrow \frac{f''(\xi)}{3}(b-a) = 10^{-1}$$

Vi vill att $R_T \doteq 10^{-5}$

$$10^{-5} = \frac{f''(\xi)}{3}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 10^{-1}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow h = 2\cdot 10^{-2} = 0.02$$

L.3.1. a,b) Låt x, y vara koord map. en ON-bas e_1, e_2 i ett plan. Bestäm matrisen i basen e_1, e_2 för följande avbildningar:

a) Rotation ett kvarts varv i positiv led

b) Ortogonal projektion på linjen $x+y=0$

Linjär avbildning: vektorvärda funktioner

stoppa in en vektor, spottar ut en annan

$T: V \to W$ om $V = W \to$ operatorer, om $W = \mathbb{R} \to$ funktional

Linjär: $v_1, v_2 \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\to$

Två villkor måste uppfyllas:

① $T(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) = T(\mathbb{v}_1) + T(\mathbb{v}_2)$

② $T(\alpha \mathbb{v}) = \alpha T(\mathbb{v})$

$\Big\}\ T(\alpha \mathbb{v}_1 + \beta \mathbb{v}_2) = \alpha T(\mathbb{v}_1) + \beta T(\mathbb{v}_2)$

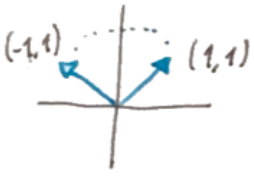
för varje avbildning finns unik matris

$T(\mathbb{x}) = A \cdot \mathbb{x}$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ON-bas

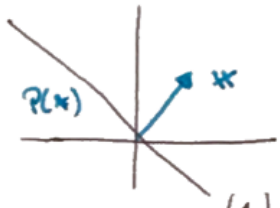
$A = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad \dots \quad T(e_n)]$

a) Rotationsmatrisen ges av

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad R(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



b) $y = -x$



Hitta en ON-bas för linjerna

$\tilde{\mathbb{k}}$ (normaliserad) $= \frac{1}{\|\mathbb{k}\|}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (= ON-bas för linjerna)

linjen har riktningsvektorn $\mathbb{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P_r(\mathbb{x}) = P \cdot \mathbb{x}$

$P_r(e_1) = \langle \tilde{k}, e_1 \rangle \tilde{k} \qquad P_r(e_2) = \langle \tilde{k}, e_2 \rangle \tilde{k}$

$P_r(e_1) = (\tilde{k}^T \cdot e_1)\tilde{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{k}} =$

$P_r(e_2) = (\tilde{k}^T \cdot e_2)\tilde{k} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

andra kolumnen

$P = [P_r(e_1) \quad P_r(e_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

L.3.3 Sätt $F(u) = \frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt}$

a) Visa att F är en linjär operator

b) Bestäm matrisen till F på P_3 i basen $B = \{1, t, t^2, t^3\}$

vi vill visa: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad p, q \in P_n \Rightarrow F(\alpha p + \beta q) = \alpha F(p) + \beta F(q)$

a) $$F(\alpha p + \beta q) = \frac{d^2}{dt^2}(\alpha p + \beta q) - 2t\frac{d}{dt}(\alpha p + \beta q) =$$

$$= \alpha\frac{d^2p}{dt^2} + \beta\frac{d^2q}{dt^2} - 2t\left(\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt}\right) =$$

$$= \alpha\left(\frac{d^2p}{dt^2} - 2t\frac{dp}{dt}\right) + \beta\left(\frac{d^2q}{dt^2} - 2t\frac{dq}{dt}\right) =$$

$$= \alpha \cdot F(p) + \beta \cdot F(q) \quad \blacksquare$$

b) Vi låter F verka på varje baselement vilket ger oss varje kolonn i matrisen.

$$F(1) = \frac{d^2 1}{dt^2} - 2t\frac{d1}{dt} = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$F(t) = \frac{d^2 \cdot t}{dt^2} - 2t\frac{dt}{dt} = -2t = 0\cdot 1 - 2\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3 = \begin{bmatrix}0\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$F(t^2) = \frac{d^2t^2}{dt^2} - 2t\frac{dt^2}{dt} = 2 - 4t^2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\0\\-4\\0\end{bmatrix}$$

$$F(t^3) = 6t - 2t\cdot 3t^2 = 6t - 6t^3 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\6\\0\\-6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [F]_B = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\0 & -2 & 0 & 6\\0 & 0 & -4 & 0\\0 & 0 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

L.3.11 Beräkna $\int (xe^x\cos(x) - 3e^x\sin(x)\,dx$ med "matrismetoden" i exempel 3.5

Lösning: Steg 1 Hitta basfunktioner $\begin{bmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\\f_4(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^x\cos x\\e^x\sin x\\xe^x\cos x\\xe^x\sin x\end{bmatrix}$

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix}0\\-3\\1\\0\end{bmatrix}$$

vår integral

$$f_1'(x) = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x$$
$$= f_1 - f_2$$

$\rightarrow$

$f_2'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = f_2 + f_1$

$f_3'(x) = (xe^x)' \cos x + xe^x (\cos x)' = e^x \cos(x) + xe^x \cos x + xe^x \sin x$

$= f_1 + f_3 - f_4$

$f_4'(x) = f_2 + f_3 + f_4$

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{D = \text{derveringsmatris}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$f_1' \quad f_2' \quad f_3' \quad f_4'$

$D \cdot \mathbb{C} = \mathbb{b}$ ← integralen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\mathbb{C} = D/\mathbb{b}}_{\text{matlab}}$ ger $\mathbb{C} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

integral

$I = \frac{1}{2} e^x (3\cos x - 4 \sin x + x \cos x + x \sin x)$ $(+ C)$ ← konstant

---

L. 3.16 | Visa att om $A = QR$ med Q icke singulära så är A similärt ekvivalent med RQ.

Similärt: $\tilde{A} = P^{-1}AP$ sats 3.2

Singulär: Kvadratisk utan invers

icke singulär => Kvadratisk med invers.

Q^{-1} finns $I = QQ^{-1} = Q^{-1}Q$ $A \cdot I = A$

Lösning: $A = QR = QRI = QRQQ^{-1} \Rightarrow A = Q(RQ)Q^{-1}$

innebär att A är similär med RQ ∎

Föreläsning 26/4

Spektralsatsen för matriser

Sats 4.13

Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk så finns en ON-bas $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bestående av egenvektorer till A så att $T^T A T = D$

var $T = [e_1 \dots e_n]$ och $D = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

med $A e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \dots, n$

Bevis:

Sats 4.12 tillämpad på $F \in L(\mathbb{R}^n)$, $F(x) := Ax$ ger $\exists$ egenvektor ON-bas $\mathcal{E}$ för rummet $\mathbb{R}^n$.

Sats 4.12:

$\dim(V) = n$ & $F \in L(V)$ är symmetrisk så $\exists$ ON-bas $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ för rummet V som består av egenvektorerna till T.

$$\langle F(x), y \rangle = \langle x, F(y) \rangle \quad \forall x, y$$
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$
$$(Ax)^T y = x^T (Ay)$$
$$x^T A^T y = x^T (Ay)$$
$$x^T A y = x^T A y$$

Sats 4.5 $\Rightarrow T^{-1} A T = D$ för matriserna T & D ovan

Och sedan $e_j^T e_k = \delta_{jk}$ $1 \leq j, k \leq n$ så är $T^{-1} = T^T$ ∎

Tillämpningar av diagonalisering

Exempel 4.18 Beräkning av A^k

Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar så gäller $A = TDT^{-1}$

$\Rightarrow A^k = A \cdots A = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD^kT^{-1}$

$\Rightarrow A^k = TD^kT^{-1}$ var $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$

Betrakta differensekv.

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

x_n - andel befolkning i staden år n

y_n - andel befolkning på landsbygden år n

startvillkor $x_0 + y_0 = 1$ $\quad x_0, y_0 \geq 0$

Vad händer $n \to \infty$?

Lösning: $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \dots = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

Diagonalisering A: $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0.9-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{bmatrix} =$

$= \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$

$p_{A_1}(\lambda) = 0$ ger lösningar $\lambda_1 = 1$ & $\lambda_2 = 0.7$

med respektive egenvektorer

e_1: lösning till $(A - \lambda_1 I)x = 0$ dvs. $\begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} x = 0$

t.ex. $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ & $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vi får att $A = TDT^{-1}$ (2) var $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}$ $\quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(2) ger: $\begin{bmatrix} x^n \\ y^n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \overset{2}{=} TD^nT^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.7)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2(x_0+y_0) + (0.7)^n(x_0 - 2y_0) \\ (x_0+y_0) - (0.7)^n(x_0 - 2y_0) \end{bmatrix} \longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2(x_0+y_0) \\ (x_0+y_0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisering, linj. differensialekv.

För begynnelsevärdeproblemet

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} (4) \quad \text{var } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ och } x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Söker vi lösning $x \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}^n)$

Om A är diagonaliserbar, dvs. $A = TDT^{-1}$ var $D = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ (5)

Kan vi skriva: $x' = TDT^{-1}x \iff T^{-1}x' = DT^{-1}x$

T är en konstant matris.

Definiera $y(t) = T^{-1}x(t)$ (6) $\Rightarrow y' = Dy$

$$\text{dvs.} \quad \left.\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \lambda_n y_n \end{aligned}\right\} (7) \quad \text{som har lösning} \quad \begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ y_n(t) &= c_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

$$\left\{ x(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j = Tc \right\}$$

Lösningen i $x(t)$ fås (5) & (6):

$$x(t) = Ty(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t) e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j$$

Vektorn $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ bestäms från begynnelsevillkoren:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow Tc = x_0 \Rightarrow c = T^{-1}x_0$$

Exempel, övning 4b tenta 2017-08-19

Lös $x'(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}^{A} x \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

A är symmetrisk och $p_A(\lambda) = (4-\lambda)(-4-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 25$
$\Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -5$ med egenvektorer (normerade)

e_1 löser: $(A - \lambda_1 I) z = 0$ dvs. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} z = 0$

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$A = T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} T^T$ var $T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Det ger $x' = Ax = TDT^T x$
$y = T^T x$ ger $(T^T x)' = DT^T x$

att $y' = Dy$ dvs. $\left.\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 \\ y_2' &= -5y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$

Vi har att $x(t) = Ty(t) = c_1 e^{5t} e_1 + c_2 e^{-5t} e_2$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3e^{5t} - e^{-5t} \\ e^{5t} + 3e^{-5t} \end{bmatrix}$

Hakon: "egentligen är detta inte så intressant" medans han går igenom en definition

Definition 4.6.

En kvadratisk form $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är definierad som

$$q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{var } a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n$$

kan associeras till en matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ med $A_{ij} = a_{ij}$

Där $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(a_{ij} + a_{ji})}{2} x_i x_j$

Vi ser att $q(x) = x^T A x = x^T \left(\frac{A + A^T}{2} \right) x$

så för alla kvadratiska former kan vi associera $[a_{ij}]_{ij}$ till en kvadratisk matris $A_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$

Exempel:

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1 x_2 = x^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x$$

Då A är symmetrisk kan vi diagonalisera $q(x) = x^T A x =$

$$x^T T D T^T x = \xi^T D \xi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \quad (8) \qquad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = T^T x$$

$$(x = T\xi = e_1 \xi_1 + \dots + e_n \xi_n) \qquad [x]_{\mathcal{E}} = \xi \in \mathbb{R}^n$$

Exempel 4.25

Beskriv kurvan $q(x) = 5$ (9) där $q(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1 x_2 =$

$$= x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}}_{A} x$$

$$p_A(\lambda) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \ \& \ \lambda_2 = 10$$

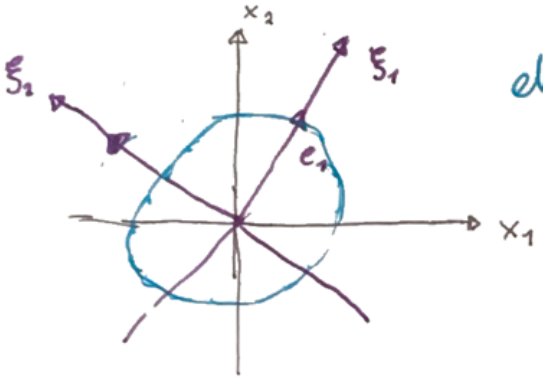
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

I koordinaterna ξ blir kurvan $q(\xi) = 5\xi_1^2 + 10\xi_2^2 = 5$

dvs. kurvan $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 = 1$

dvs. en ellips med halvaxlar 1 och $1/\sqrt{2}$



ellips och symmetriaxlarna ξ_1, ξ_2

Definition 4.7.

Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kallas positivt definit om $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$ och positiv semi definit om $x^T A x \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Sats 4.18

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen mängd och $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$
Antag $\nabla f(a) = 0$ för $a \in \Omega$ och låt A vara Hessianen till f i punkten A. Dvs. $A_{ij} = \frac{d^2 f(a)}{dx_i dx_j}$ $1 \leq i,j \leq n$

Om A är positivt definit så är punkten a ett lokalt strikt minimum till f.

Beviside: för $x \in \Omega$ nära a är $f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) +$
$+ \frac{1}{2}(x-a)^T A (x-a) + o(\|x-a\|^2) =$
$= f(a) + \underbrace{\frac{1}{2}(x-a)^T A (x-a)}_{\text{Hessian term}} + o(\|x-a\|^2) > f(a)$

för alla x nära a, $x \neq a$

räknestuga 26/4

L.3.1 Låt x_1, x_2 vara koordinater med avseende på en ON-bas e_1, e_2 i ett plan. Bestäm matrisen i basen e_1, e_2 för följande avbildningar.

a) rotation ett kvarts varv i pos. led

b) ort. projektion på linjen.

c) spegling i linjen $x_1 + x_2 = 0$

d) rotation $\pi/6$ rad i neg. led

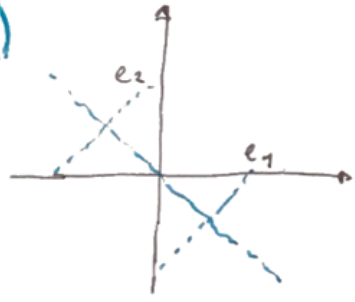
a) basens koordinatvektorer: $e_1 \cong \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\hat{e}_1 \cong \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$Re_1 = e_2$

$Re_2 = -e_1$

$$M_R = (Re_1 \; Re_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

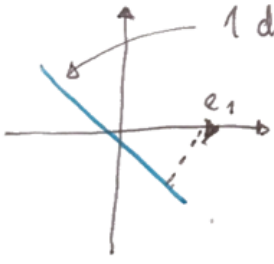


$Se_1 = -e_2$

$Se_2 = -e_1$

$$M_S = (-e_2 \; -e_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)



1 dim underrum av $\mathbb{R}^n$ med normerad basvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

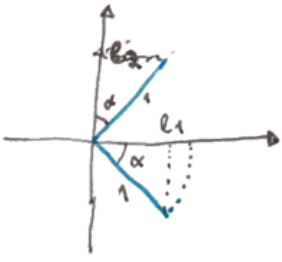
Låt p vara en punkt i planet

$\Rightarrow p = p_1 e_1 + p_2 e_2$

$\Rightarrow$ projektionsmatrisen ges av $b^T b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

$$\boxed{P(p) = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j, p \rangle b_j} \qquad \langle b_j, p \rangle = b_j^T p$$

d)



$Re_1 = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\end{bmatrix}$ $\quad Re_2 = \begin{bmatrix}\sin\alpha\\\cos\alpha\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow M_R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

L.3.2 Bestäm matrisen M i en ON-bas e_1, e_2, e_3 för följande linjära avbildningar

b) ort. projektion på planet $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = P$

c) spegling i planet $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

b) Vill använda formeln $M = B(B^TB)^{-1}B^T$ (på s.102 i boken)

där $B = \begin{bmatrix} | & | \\ b_1 & b_2 \\ | & | \end{bmatrix}$ och b_1, b_2 är basvektorer av underrummet P

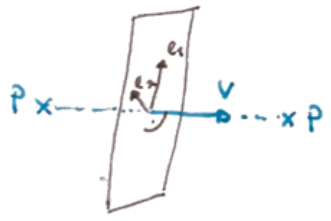
$\Rightarrow$ ta $b_1 = (1,-1,0)$, $b_2 = (1,0,-1)$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \right)^{-1}}_{= \underbrace{\frac{1}{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}_{= 1/3} \underbrace{\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c)



$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 v$

$Sp = p' = p - 2\underbrace{p_3}_{\langle v, p\rangle} v$

~ Householdermatrisen ges av $H = I - 2vv^T$

$= I - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

För alla vektorer $w \in E$ har vi $\underbrace{v \cdot w}_{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3} = 0$

$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

L.3.8/ Låt P_n vara VR av alla polynom av grad högst n.
Betrakta deriveringsavbildningen $Dp(x) = p'(x)$, $p \in P_n$
Bestäm matrisen för den linj. avb. D i baserna

a) $B = \{1, x, \dots, x^n\} = \{b_0, \dots, b_n\}$

b) $B = \{1, x-c, \frac{1}{2!}(x-c)^2, \dots, \frac{1}{n!}(x-c)^n\}$ $c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow M_D^{\{e_1, \dots, e_n\}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ D(e_1) & D(e_2) & \dots & D(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad b_j = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, \overset{j+1}{1}, \dots, 0}_{n+1})$$

a) $Dx^j = j x^{j-1}$, $\quad Db_j = j b_{j-1}$, $\quad Db_0 = 0$

$$\Rightarrow M_D^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 4 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $D\left(\frac{1}{j!}(x-c)^j\right) = \frac{j}{j!}(x-c)^{j-1} = \frac{1}{(j-1)!}(x-c)^{j-1}$

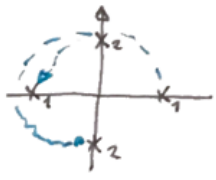
$$D b_j' = b_{j-1} \quad \Rightarrow \quad M_D^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

L.3.12./ Vilken geometrisk tolkning har en ort. 2×2 matris T sådan att $T^2 + I = 0$

$$\Rightarrow T^2 = -I_2 \Rightarrow \underbrace{\det(T^2)}_{\text{rotation pga se sats i boken}} = \det(-I_2) = 1$$

$T^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ~ rotation med vinkeln π

$\Rightarrow$ T rot med vinkeln $\pi/2$



L.4.2 Bestäm baser för egenrummen motsvarande de angivna egenvärdena till matriserna.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\lambda = 4$

b) Varje egenvektor uppfyller $Av = \lambda v$

$$2v_1 + v_2 = 2v_1 \Rightarrow v_2 = 0$$
$$2v_2 = 2v_2$$
$$v_1 + v_2 + 3v_3 = 2v_3 \Rightarrow v_1 = -v_3$$

Lösningsmängd $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} s : s \in \mathbb{R} \right\}$

Nu betraktar vi $Av = \lambda v \iff$

$$\iff \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ \\ \\ \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= A - \lambda I} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0$$

(i) $\Rightarrow 2v_3 - v_1 = 0 \Rightarrow 2v_3 = v_1$

(ii) $\Rightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_3$

tar $v_1 = 1 \Rightarrow v_3 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{3}{2}$

$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$N(A - \lambda I)$ = egenrum motsvarande λ

L.4.4 d) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till följande matriser: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Betrakta det karakteristiska polynomet $\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (2-\lambda) \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{(2-\lambda)(1-\lambda)} - \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{= 1-\lambda} = ((2-\lambda)^2 - 1)(1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ $(2-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

$\rightarrow$

Vi bestämmer egerrummen:

ta först $\lambda_1 = 1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ v_1 + 2v_2 \\ v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{matrix}$$

ta $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 = v_2$$

$$v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_3$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L.4.7 Låt $F: V \to V$ vara en bijektiv och linjär avbildning. Visa att varje E vektor med E värden λ till F är egenvektor med egenvärde $1/\lambda$ till F^{-1}

$$Fv = \lambda v \quad | F^{-1}(\,)$$

$$v = F^{-1}(\lambda v) = \lambda F^{-1}(v)$$

$$\Rightarrow F^{-1}(v) = \tfrac{1}{\lambda} v$$

L.4.19 Låt A vara en kvadratisk matris sådan att summan av elementen i varje kolonn är 1.
Visa att A har egenvärdet 1.

Betrakta egenvärdesekvationen för A:

$$Av = \lambda v \iff (Av)_1 = \lambda v_1$$
$$\vdots$$
$$(Av)_n = \lambda v_n$$

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (Av)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

$$A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

samma för A^T

A & A^T har samma egenvärden

$\Rightarrow$ 1 är egenvärde av A^T $\Rightarrow$ 1 är egenvärde av A

L.2.26 Antag att en reell matris A är sådan att $A^2 = A$
Visa att A är diagonaliserbar.

Låt λ vara ett egenvärde och x den motsvarande egenvektorn

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \underbrace{A^2 x}_{Ax} = \lambda \underbrace{Ax}_{=\lambda x} \Rightarrow Ax = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda = \lambda^2$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ eller $\lambda = 1$

Om för $\lambda = 1$ & $\lambda = 0$ den geometriska mult. är lika med den alg. mult. så är $E(1) \oplus E(0) = \mathbb{R}^n$ och A är diagonaliserbar

egenrum motsvarande $\lambda = 1$

Vi visar att $E(0) = N(A)$ och $E(1) = V(A)$

$v \in E(0) \Rightarrow Av = 0$

$V(A)$ är ett värderum

Låt $x \in E(1)$ så $Ax = x \Rightarrow x \in V(A)$ "$V(A) \subseteq E(1)$" $\rightarrow$

Låt $x \in V(A)$ $Ax \in V(A) \Rightarrow x - Ax \in V(A)$

Betrakta $A(x - Ax) = Ax - A^2x = Ax - Ax = 0 \Rightarrow x - Ax \in N(A)$

$V(A) \cap N(A) = \{0\}$

$\Rightarrow x - Ax = 0 \Rightarrow x = Ax \Rightarrow x \in E(1)$

$\dim(V(A)) + \dim(N(A)) = n$ (då $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$E(1) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dim(E(0)) + \dim(E(1)) = n \Rightarrow E(0) \oplus E(1) = \mathbb{R}^n$

<u>Storgruppsövning 2/5</u>

Definition: Egen - värden & vektorer

$T: V \to V$, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$T(v) = \lambda v$, $v \neq 0$ då kallas λ egenvärde & v egenvektor

Säg att $T(x) = Ax \Rightarrow A \cdot v = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0$

$\Rightarrow A \cdot v - \lambda I \cdot v = 0 \Rightarrow \boxed{(A - \lambda I)v = 0 \quad (1)}$

(1) ger oss egenvektorer. För att $v \neq 0$

$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2)}$

(2) Kallas karakterisk ekvation ger oss λ

<u>L. 4. 2 a)</u> Bestäm baser för egenrummet motsvarande de angivna egenvärdena till matrisen

<u>Lösning:</u> Tag λ_1, λ_2 & λ_3 sätt in i ekv (1) och få ut v_1, v_2, v_3

$\lambda = 1 \quad A - \lambda I = A - I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(A - I)v_1 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

s

egenvektor $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ■

L.4.4 c) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till följande matris.

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Lösning: $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ $\quad$ Vi vill beräkna $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^2(-\lambda)\left[(4-\lambda)(2-\lambda) - 0\cdot 1\right] + (-1)^3 \cdot 1\left[-4(2-\lambda) - 0\cdot -2\right] +$$
$$+ (-1)^4 \cdot 0 \cdot \left[-4\cdot 1 - (-2)(4-\lambda)\right] =$$
$$= -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4(2-\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda(4-\lambda) + 4) =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = -(\lambda-2)^3 = 0$$

$\lambda = 2$ är en trippelrot.

Vi löser $A - \lambda I$ för att få ut egenvektorer $A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{s}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(A - 2I)\mathbf{x} = \emptyset \qquad -2x_1 + x_2 = 0 \qquad$ detta ger $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ■

$x_1 = \frac{x_2}{2}$

L.4.6 | Visa att om om u är en egenvektor till avbildningen F med egenvärde λ så är u en egenvektor till avbildningen F^k $k \geq 1$ heltal med egenvärdet λ^k

Lösning: $F^2(u) = F(F(u))$

Vet att $F(u) = \lambda u$ $\quad F^2(u) = F(\underbrace{F(u)}_{\lambda u}) = F(\lambda u) = \lambda \cdot F(u) =$

$= \lambda \cdot \lambda u = \lambda^2 u$

$\Rightarrow F^2(u) = \lambda^2 u$

$F^3(u) = F(F^2(u)) = F(\lambda^2 u) = \lambda^2 F(u) = \lambda^2 \cdot \lambda u = \lambda^3 u$

$F^3(u) = \lambda^3 u$

$\vdots$

$F^k(u) = \lambda^k \cdot u$ ∎

L.4.8 | Låt T vara en linj. avb. samt u_1 & u_2 egenvektorer λ_1, λ_2 egenvärden

Visa att $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ så är $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ inte en egenvektor till T.

Lösning: Antag att $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ är egenvektor med λ egenvärde

$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \cdot \lambda u_1 + \alpha_2 \cdot \lambda u_2$ (1)

T är linjär så VL kan skrivas om $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2)$

$= \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 \Rightarrow T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2$ (2)

(1) = (2)

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda u_1 + \alpha_2 \lambda u_2 = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2$

$\Rightarrow \alpha_1 (\lambda - \lambda_1) u_1 + \alpha_2 (\lambda - \lambda_2) u_2 = 0$ (3)

Vet att egenvektorer med olika egenvärden är linjärt oberoende.

$\Rightarrow (\lambda - \lambda_1) = 0$ & $(\lambda - \lambda_2) = 0$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ motsägelse! ∎

L.4.17 En kvadratisk matris A kallas nilpotent om det finns ett heltal $k \geq 1$ så att A^k är nollmatrisen. Visa att varje nilpotent matris har ett och endast egenvärde & bestäm detta.

Lösning: Låt w egenvektor till A med egenvärde λ.

$A \cdot w = \lambda \cdot w$, $A^2(w) = A(A(w)) = A(\lambda w) = A^k(w) = \lambda^k w$

I detta fall är $A^k = 0$

$\Rightarrow \lambda^k \cdot w = 0 \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Annars testa λ_1 & λ_2 ■

L.4.21 Visa att om A är både inverterbar och diagonaliserbar så gäller samma sak för A^{-1}

Lösning: A diagonaliserbar $P^{-1}AP = D$

P är inverterbar. matris D är diagonal.

$PP^{-1}AP = PD \Leftrightarrow IAP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow \boxed{A = PDP^{-1} \ (1)}$

$A^{-1} = (PDP^{-1}) = (P^{-1})^{-1}(PD)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ A^{-1} diagonaliserbar ■

Föreläsning 3/5

Idag:

- stora ekv. system $Ax=b$
- Beräkningskostnad (flops)
- LU-faktorisering

Exempel stora problem

Relation mellan "bild"
$g \in C[0\ 1]$ och ljuskälla f - styckvis kant på

$$g(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy = (kf)(x)$$

var $k(x,y) = c e^{-(x-y)^2/\gamma^2}$ $\quad c, \gamma > 0$

Kärnfunktion - modell för suddning av ljuskällan vid bildformation

Problem bilden $g \leftarrow$? hur såg ljuskällan f ut?

Diskretisering:

$h = \frac{1}{n}$, gitter $x_i = (i - \frac{1}{2})h$, $i = 1, \dots, n$
matris approx $\hat{k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
var $\hat{k}_{ij} = k(x_i, x_j)$

bild: $\hat{g}_i = g(x_i)$ $\quad$ Problem: $\hat{k}\hat{f} = \hat{g}$

(lösningen $\hat{f} \approx f(x_i)$)

Beräknings kostnad

För att jämföra effektiviteten till algoritmen räknar man antalet flyttalsoperationer $(+, -, \cdot, /)$ (flops) som behövs

T.ex.: skalärprodukten av $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
gör n produkt & $(n-1)$ additioner
$= O(n)$ flops.

Multiplikation med skalär $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$ ger n produkt $O(n)$ flops

---

Matrisvektorprodukt $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

1. n-kost multiplikation med skalär $a_i = O(nm)$
2. $(x_i a_i)_{i=1}^{n}$ $\begin{bmatrix} x_1 a_{11} + \ldots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + \ldots + x_n a_{mn} \end{bmatrix}$ är $O(mn)$

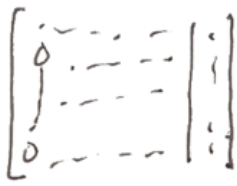
Totalkostnad Ax: $O(mn)$ flops.

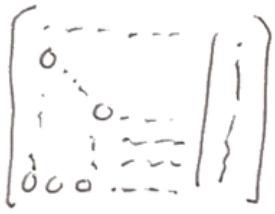
Matris-Matris prod: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$AB = [Ab_1 \; Ab_2 \; \ldots \; Ab_p]$ $\qquad$ kostnad $= p$-kostnad(AB)
$= p\, O(mn)$
$= O(mnp)$

Gausselimination $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$[A \mid b] \sim$  fås ur

 $\sim$  $\sim$ Varje rad kostar n produkt och +n additioner. Totalt $= O((n-1)n)$

$\sim$  totalt $O((n-2)(n-1))$ $\sim \dots \sim$ 

Kostar $O(2)$

Total kostnad $O\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) = O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$ flops

<u>Konklusion:</u>

Att lösa $Ax=b$ med Gaussisk elimination kostar $O(n^3)$
Att beräkna A^{-1} kostar också $O(n^3)$

Framåtsubstition

Om matrisen $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar och nedåt triangulär löses problemet $Lx=b$ dvs.

$$\left.\begin{aligned} L_{11}x_1 &= b_1 \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ L_{n1}x_1 + \dots + L_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \text{ med } \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{L_{11}} \\ x_2 &= \frac{1}{L_{22}}(b - L_{21}x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{L_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} L_{nj}x_j\right) \end{aligned}$$

$\rightarrow$

dvs. för $k=1$ to n

$$x_k = \frac{1}{L_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj} x_j\right)$$

end

Att lösa $Lx=b$ kostar $O(n^2)$ flops.

LU-faktorisering (utan pivotering)

Trappstegsformen till $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ fås vid

$U = L_k \cdots L_2 L_1 A$ var L_i är en elementär matris på formen

(3×3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

flyttar rad 1 → 3

Addera $-4 \cdot$ rad 1 till rad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Definition: LU-faktorisering är representationen $A = LU$ var $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är nedåt triangulär med ettor på diagonalen och $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är uppåt triangulär.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ger $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} A = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{U}$

dvs $L_1 A = U \Rightarrow A = L_1^{-1} U$ sedan $L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ är

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad c = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

3x3 exempel

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -4 & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} A = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{matrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} L_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U}$$

$\Rightarrow L_2 L_1 A = U \quad \& \quad A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$

$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 4 & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 3 & 1 \end{bmatrix} U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ 4 & & \\ 8 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2 l_{21} + 4 = 0 \Rightarrow l_{21} = -\frac{4}{2}$

$2 l_{3,1} + 8 = 0 \Rightarrow l_{31} = -\frac{8}{2}$

Observation:

För $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{2,1} & 1 & \\ l_{3,1} & & 1 \end{bmatrix}$ och $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$ fick vi $L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{2,1} & 1 & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$

Kan vi generalisera?

Om radbyte ej behövs så gäller $L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = U$ för $A \in \mathbb{R}^{n \times}$

$\longrightarrow$

var

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad k = 1, \dots, n-1$$

Vi skriver $L_k = I + l_k e_k^T$ var e_k är k-te kolonven enhetsmatrisen.

och $l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix}$

<u>observation 2:</u>

$$L_k^{-1} = I - l_k e_k^T$$

<u>Bevis:</u> observera att $e_k^T = l_{k,k} = 0 \ \forall k$

$$L_k(I - l_k e_k^T) = (I + l_k e_k^T)(I - l_k e_k^T) = I + l_k e_k^T - l_k e_k^T - l_k \underbrace{(e_k^T l_k)}_{=0} e_k$$
$$= I \quad \boxed{\checkmark}$$

Generalisering $L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} = (I - l_1 e_1^T)(I - l_2 e_2^T) \dots (I - l_{n-1} e_{n-1})$

$$= I - \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^T$$

(sedan $e_k^T l_r = 0$ för alla $1 \le k \le n-1$ och $r > k$)

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -l_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n-1} & \dots & -l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Algoritm LU utan pivotering

sätt $A^{(1)} = A$ och $L = I$ för $k = 1$ to $n-1$

Bestäm $l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -A^{(k)}_{k+1,k} / A^{(k)}_{k,k} \\ \vdots \\ -A^{(k)}_{n,k} / A^{(k)}_{k,k} \end{bmatrix}$

så att $L_k = I + l_k e_k^T$ ger matris.

$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)}$

med nollor under diagonalen i kolonn k

end för

Output: $U = A^{(n)}$ $\quad (A^{(n)} = L_{n-1} \dots L_1 A)$

och $L \overset{(2)}{=} I - \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^T$

Hur löser man $Ax = b$ med LU faktorisering?

$[L, U] = lu(A)$

$Ax = b$

Lös $Ax = b$

$O(n^3)$ flops

$LUx = b$

1. $Ly = b$ ← fram sub

2. $Ux = y$

Beräkningskostnad $O(n^2)$ flops.

storgruppsövning 315

L.4.23 | Låt A vara en reell symmetrisk matris sådan att $A^3 = I$
Visa att $A = I$

Lösning: Sats 4.13 på sidan 140

$\exists\, T$ ortogonal $\exists\, D$ diagonal $T^T \cdot AT = D$

$T^{-1} = T^T$ $\quad T^TAT = D$ $\quad T = [v_1, \dots, v_n]$ $\quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$T^TAT = D \Rightarrow \underbrace{T \cdot T^T}_{I} A \underbrace{TT^T}_{I} = TDT^T \Rightarrow \boxed{A = TDT^T \quad (1)}$$

$$A^2 = (TDT^T)(TDT^T) \Leftrightarrow AA = TD\underbrace{T^TT}_{I}DT^T$$

$$\Rightarrow TD \cdot DT^T = TD^2T^T \Rightarrow \boxed{A^2 = TD^2T^T}$$

p.s.s $\quad A^3 = TD^3T^T \quad I = TD^3T^T \quad T^TIT = D^3 \Rightarrow T^TT = D^3$

$$\Rightarrow I = D^3 \Rightarrow D = I$$

$$\Rightarrow A = TDT^T \Rightarrow A = TITT^T \Rightarrow A = I \quad \blacksquare$$

L.4.25 | A symmetrisk kan faktoriseras $A = B^T B$ där B har full rang. Visa att alla egenvärden är positiva.

Lösning: Sats 4.14 (kvadratiska former) s. 154

$\Rightarrow$ $q(x) = x^T A x$ är positivt definit omm A har positiva egenvärden

def 4.7 $q(x) > 0 \; \forall x \neq 0$

B har full rang $\Rightarrow$ inverterbar $Bw = 0 \Rightarrow B^{-1}Bw = Iw =$
$= w = B^{-1}0 = 0 \Rightarrow w = 0$

Vill visa $q(x) = x^T A x > 0 \; \forall x \neq 0$

$$x^T A x = x^T B^T B x = (x^T B^T)(Bx) = (Bx)^T (Bx) = \underbrace{\|Bx\|}_{\neq 0}^2$$

För reella vektorer $\langle x, y \rangle = x^T y$ $\quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^T x$

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore$ A är pos. definit

$\therefore$ A har positiva egenvärden $\blacksquare$

L.4.29 | Låt $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$

a) Diagonalisera A
b) Bestäm B så att $B^3 = A$

Lösning: A reell symmetrisk $\Rightarrow$ Sats 4.13
$(A^T = A) \Rightarrow T^T A T = D$, $T = [\mathbb{v}_1 \ \mathbb{v}_2]$ $\quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Vi måste: 1) Beräkna egenvärden Karak. ekv. $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
2) Beräkna egenvektorer

Givet λ_1 & λ_2 $\Rightarrow$ $(A - \lambda_1 I)\mathbb{v}_1 = \mathbb{0}$
$(A - \lambda_2 I)\mathbb{v}_2 = \mathbb{0}$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - \lambda & 9/2 \\ 9/2 & 7/2 - \lambda \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A - \lambda I) = \left(\frac{7}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{7}{2} - \lambda\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda - \frac{7}{2} = \pm\frac{9}{2}$
$\lambda = \pm\frac{9}{2} + \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = \frac{16}{2} = 8$
$\lambda_2 = -\frac{9}{2} + \frac{7}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

Steg 2: $\lambda_1 = 8$ $\qquad (A - 8I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Nu löser vi $(A - 8I)\mathbb{v}_1 = \mathbb{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -9/2 & 9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\qquad x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbb{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ $\quad \tilde{\mathbb{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Normalisera för att få $\mathbb{v}_1$ & $\mathbb{v}_2$

$\mathbb{v}_1 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbb{v}}_1\|}\tilde{\mathbb{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$

b) $B^3 = A = P A P^T = P \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{bmatrix}$

$B = P \cdot D^{1/3} P^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

lämnar multiplikationsuträkningen

L. 4.32) a_k & b_k definieras av $(k \geq 0)$

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + 2b_k, & a_0 = 3 \\ b_{k+1} = 2a_k + b_k, & b_0 = 1 \end{cases}$$

Beräkna a_{10} & b_{10}

Lösning: Diagonalisera

$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ $\qquad x_{k+1} = A x_k$

Börja med x_0, $x_1 = A x_0$, $x_2 = A x_1 = A(A x_0) = A^2 x_0$

$x_k = A^k x_0$ Vi vill beräkna A^k, $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ gånger}}$

$A = P D P^T \qquad A^k = P D^k P^T$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad 0 = (1-\lambda)^2 - 4$

$\lambda = 1 \pm 2 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \qquad A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = P D P^T \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{10} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 3^{10} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{10}+1 & 3^{10}-1 \\ 3^{10}-1 & 3^{10}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{10}+1 \\ 2 \cdot 3^{10}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix}$

L.4.50

Ange den allmänna lösningen till $(x_1(t), x_2(t))$

$$x_1'(t) = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 4e^{2t}$$
$$x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 2e^{2t}$$

Lösning: $\left(\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}\right)$

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + f(t) \quad (*)$$

$$f(t) = 2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \dot{f}(t) = 4\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = 2f(t) = 2\Big(\underbrace{2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}}_{f}\Big)$$

$$\dot{f}(t) = 2f(t) \qquad A \cdot f(t) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = 2e^{2t}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2e^{2t}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 8e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4f(t)$$

$$\Rightarrow A \cdot f = 4 \cdot f \quad (2)$$

$$f = \frac{1}{2}(Af - \dot{f}) \quad (\heartsuit)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \underbrace{\frac{1}{2}(Af - \dot{f})}_{2f} \qquad \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\dot{f} = A\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}f\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}f\right) = A\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}f\right) \quad (\star)}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}f \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} - \frac{1}{2}f$$

$$\dot{\mathbf{y}} = A \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}$$

Vi beräknar egenvärden & egenvektorer

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} \qquad \boxed{\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} \quad (*)}$$

Föreläsning 4/5

Idag:

- $PA = LU$, LUP - faktorisering
- Matrisnormer
- Stabilitet linj. ekv. system

Repetition

LU faktorisering utan pivotering

$A = LU$ var $U = L_{n-1} L_{n-2} \dots L_1 A$

var $L_k = I + l_k e_k^T$ och $L = I - \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^T$

LU faktorisering

Radbyte behövs t.ex. för att faktorisera.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{Sätt } A^{(1)} = A$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -7 & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} A^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

Problem: Sedan $A^{(2)}_{2,2} = 0$ behövs radbyte för att fortsätta algoritmen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{PA} A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{(3)} = U}$$

$PA = LU$

Resultat: $U = P_2 A^{(2)} = P_2 L_1 A$ (1)

Observation 1: $P_2^{-1} = P_2$ så vi kan skriva $U = P_2 L_1 P_2^{-1} P_2 A = P_2 L_1 P_2 P_2 A$

$P_2 = [e_1 \ e_3 \ e_2]$

$\rightarrow$

2.) $L_1 P_2 = (I + l_1 e_1^T)[e_1\ e_3\ e_2] = P_2 + [l_1\ 0\ 0] = P_2 + l_1 e_1^T$

3.) $P_2 L_1 P_2 = P_2(P_2 + l_1 e_1^T) = I + \underbrace{P_2 l_1}_{\hat{l}_1} e_1^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -7 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

Från (M) får vi: $U = \hat{L}_1 P_2 A \Rightarrow P_2 A = (\hat{L}_1)^{-1} U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 7 & 1 & \\ 2 & & 1 \end{bmatrix}}_{L} U$

LUP - faktorisering

För $1 \leq k \leq n-1$, låt P_k = radbyte (k,j) var $j \geq k$

Stabil pivotstrategi: byt rader så att komponenten med störst belopp i kolonnen blir pivotelement.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ \boxed{5} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Algoritm - LUP

Sätt $A^{(1)} = A$ för $k = 1$ to $n-1$

$j = \underset{k \leq j \leq n}{\operatorname{argmax}} |A^{(k)}_{j,k}|$ % om j inte är entydig, välj minsta j

P_k = radbyte (k,j)

$\tilde{A}^{(k)} = P_k A^{(k)}$

$$l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\tilde{A}^{(k)}_{k+1,k} / \tilde{A}^{(k)}_{k,k} \\ \vdots \\ -\tilde{A}^{(k)}_{n,k} / \tilde{A}^{(k)}_{k,k} \end{bmatrix}$$

Resultat: $U = A^{(n)} = L_{n-1} \tilde{A}^{(n-1)} = L_{n-1} P_{n-1} A^{(n-1)} = \dots = L_{n-1} P_{n-1} \dots L_1 P_1 A$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P_{n-1} \dots P_1 \\ PA = LU \end{array} \right\}$$

Vad med L & P i $PA = LU$?

Fallet $n = 4$:

$$U = L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = \overbrace{L_3 P_3 L_2 P_3^{-1}}^{\hat{L}_2} \overbrace{P_3 P_2 L_1 P_2^{-1} P_3^{-1}}^{\hat{L}_1} \overbrace{P_3 P_2 P_1}^{P} A \quad (\heartsuit)$$

$$\underline{\hat{L}_1} = P_3 P_2 L_1 P_2^{-1} P_3^{-1}$$

$$\underline{\hat{L}_2} = P_3 L_2 P_3^{-1}$$

$$\underline{\hat{L}_3} = L_3$$

Man kan visa att:

$$\hat{L}_1 = I + \underbrace{P_3 P_2 \ell_1}_{\hat{\ell}_1} e_1^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \hat{\ell}_{1,1} & 1 & & \\ \hat{\ell}_{2,1} & & 1 & \\ \hat{\ell}_{3,1} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_2 = I + \underbrace{P_3 \ell_2}_{\hat{\ell}_2} e_2^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \hat{\ell}_{3,2} & 1 & \\ & \hat{\ell}_{4,2} & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_3 = L_3 = I + \hat{\ell}_3 e_3^T$$

ekv $(\heartsuit)$ ger att:

$U = \hat{L}_3 \hat{L}_2 \hat{L}_1 PA$ dvs. $PA = (\hat{L}_3 \hat{L}_2 \hat{L}_1)^{-1} U$ var

$$L = \hat{L}_1^{-1} \hat{L}_2^{-1} \hat{L}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\hat{\ell}_{2,1} & 1 & & \\ -\hat{\ell}_{3,1} & -\hat{\ell}_{3,2} & 1 & \\ -\hat{\ell}_{4,1} & -\hat{\ell}_{4,2} & -\hat{\ell}_{4,3} & 1 \end{bmatrix}$$

Generellt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gäller $PA = LU$ var $P = P_{n-1} \dots P_1$
& $L = (\hat{L}_{n-1} \dots \hat{L}_1)^{-1}$

$\rightarrow$

Resultat

Varje $n \times n$ matris har en LUP-faktorisering $PA = LU$

Tillämpning

Antag att vi har N ekv. system att lösa
$Ax_m = b_m$, $m = 1, \dots, N$ var $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{cases} PA = LU \\ PAx = Pb \\ LUx = Pb \\ Ux = L \backslash Pb \\ x = U \backslash (L \backslash Pb) \end{cases}$$

Två algoritmer:

Alg 1:

```
for m = 1 to N
    x_m = A \ b_m ; (Gausselim)
end
```

Alg 0:

```
A_inv = inv(A)
for m = 1 to N
    x_m = A_inv * b
end
```

Alg 2:

```
[L,U,P] = lu(A)
for m = 1 to N
    x_m = L \ P * b      Framåt sub.
    x_m = U \ y_m        Bakåt sub.
end
```

Beräkningskostnad:

Alg 1: $O(N \cdot n^3)$
Alg 2: $O(n^3 + Nn^2)$

Konklusion: Om $N \gg n$ så är LUP mer effektiv än Ag 1

$x_{inv} = A^{-1} b$ $\qquad$ $x_{LU} = U^{-1}(L^{-1} b)$

$|Ax_{LU} - b| \ll |Ax_{inv} - b|$ $\qquad$ $|x_{LU} - x| \approx |x_{inv} - x|$

Vektor och matrisnormer

Repetition:

En funktion $p: V \to [0, \infty)$ är en norm om den uppfyller lagarna

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & P(x) \geq 0 \quad \forall x \in V \ \& \ P(x) = 0 \text{ endast om } x = 0 \\ \text{(ii)} & P(\lambda x) = |\lambda| \, P(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \& \ x \in V \\ \text{(iii)} & P(x+y) \leq P(x) + P(y) \quad \forall x, y \in V \end{array}\right\} (3)$$

Exempel: Vektornormer $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Två $\|\cdot\|$ och $|||\cdot|||$ kallas ekvivalenta om $\exists \, 0 < c < \hat{c} < \infty$

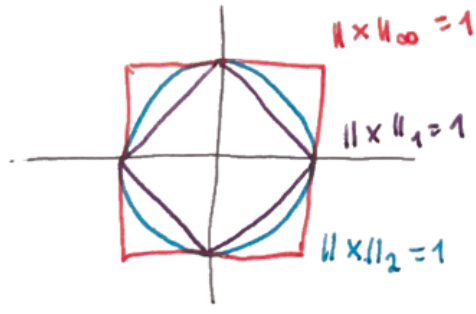
sådana att $\quad c\|x\| \leq |||x||| \leq \hat{c}\|x\| \quad \forall x \in V$

Resultat: Alla normer på $\mathbb{R}^n$ är ekvivalenta för fix $n \in \mathbb{N}$

Exempel: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = n\|x\|_\infty$

(Ekvivalens vid $c = 1$ & $\hat{c} = n$)

Enhetsbollen:



Inducerade Matrisnormer

Från varje vektornorm kan en matrisnorm induceras för $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\|A\| : \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Matrisnormen uppfyller lagarna (3)
och

$$\left.\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A\| \, \|x\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \, \|B\| \end{aligned}\right\} (4)$$

Man kan visa att $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \sqrt{Ax \cdot Ax} = \max_{\|x\|=1} \sqrt{x^T A^T A x}$$

$$= \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ ger } \|A\|_1 = \left\| A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = 5$$

$$\|A\|_2 = \left\| A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = 3$$

$$\|A\|_\infty = \left\| A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 4$$

Stabilitet för ekv. system

Betrakta funktionen $x = x(A,b) = A^{-1}b$ som löser problemet $Ax = b$

Är problemet stabilt?

Beror på konditionstalet $\dfrac{\text{relativfel utdata}}{\text{relativ indata}}$

Störning i högerledet: $\hat{b} = b + \delta b$ ger lösning

$$\hat{x}(\hat{b}) = A^{-1}(b + \delta b) = x + \underbrace{A^{-1}\delta b}_{\delta x}$$

och $$k = \frac{\|\delta x\| / \|x\|}{\|\delta b\| / \|b\|} = \frac{\|A^{-1}\delta b\| \cdot \|b\|}{\|\delta b\| \cdot \|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|\cancel{\delta b}\| \, \|Ax\|}{\|\cancel{\delta b}\| \, \|x\|} \overset{(4)}{\leq}$$

$$\overset{(4)}{\leq} \frac{\|A^{-1}\| \, \|A\| \, \|\cancel{x}\|}{\|\cancel{x}\|}$$

$K(A) := \|A\| \, \|A^{-1}\|$ kallas konditionstalet till matrisen A

Störning i matrisen A: $\hat{A} = A + \delta A$

$$\hat{x} = x(\hat{A}) = \hat{A}^{-1}b$$

$$\hat{x} = \ldots = x \underbrace{- A^{-1}\delta A \hat{x}}_{\delta x}$$

$$k = \frac{\|\delta x\| / \|x\|}{\|\delta A\| / \|A\|} \lesssim \|A^{-1}\| \, \|A\|$$

Exempel.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ med $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ har

$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 5 \cdot 5 = 25$$

och t.ex. för $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ och $\delta b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = A^{-1} b = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\hat{x} = A^{-1}(b + \delta b) = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\|x - \hat{x}\|_\infty / \|x\|_\infty}{\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty} = \frac{8/10}{2/10} = 8 < k_\infty(A)$$

Läs om bakåtfel

Föreläsning 7/5

Plan:

- QR - faktorisering $A = QR$
- SVD - faktorisering $A = U\Sigma V^i$

QR-faktorisering

Om $A = \mathbb{R}^{m\times n}$ med $m \geq n$, så finns ett $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ och en uppåt triangulär $\hat{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sådana att

$$A = Q\hat{R} = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}_{\}m-n} \quad (1)$$

var $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är uppåt triangulär.

Om vi skriver $Q = [Q_1 \ Q_2]$ var $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times(m-n)}$ får vi:

$$A \overset{1}{=} [Q_1 \ Q_2]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R \quad (2)$$

(1) & (2) kallas respektivt för full och kompakt QR-faktorisering.

Kompakt QR-faktorisering

Antag att $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ har linj. oberoende kolonner

Vid Gram Schmidts process bildas ON-bas: $e_1, \dots, e_n$ för $V(A)$:

$$u_1 = a_1, \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad u_2 = a_2 - \langle e_1, a_2\rangle, \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = a_3 - \langle e_1, a_3\rangle - \langle e_2, a_3\rangle e_2, \quad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$$\dots \quad u_n = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k, a_n\rangle e_k \qquad e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

$\rightarrow$

Det följer att $a_k \in \text{Span}(e_1, \dots, e_n)$ $\forall k$ och att

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \langle e_1, a_1 \rangle e_1 \\ a_2 &= \langle e_1, a_2 \rangle e_1 + \langle e_2, a_2 \rangle e_2 \\ &\vdots \\ a_n &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, a_n \rangle e_k \end{aligned}\right\} (3)$$

Ekv (3) kan skrivas:

$$\underbrace{[a_1\ a_2 \dots a_n]}_{A} = \underbrace{[e_1\ e_2 \dots e_n]}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle e_1, a_1 \rangle & \langle e_1, a_2 \rangle & \dots & \langle e_1, a_n \rangle \\ 0 & \langle e_2, a_2 \rangle & \dots & \langle e_2, a_n \rangle \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \langle e_n, a_n \rangle \end{bmatrix}}_{R}$$

$A = QR$ (4)

dvs.

$$R_{ij} = \begin{cases} \langle e_i, a_j \rangle & i \leq j \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

<u>obs.</u> $\langle e_k, a_k \rangle = \langle e_k, u_k \rangle = \|u_k\|$ $\forall k$ (5)

- Om full QR-faktorisering behövs kan Q_2 bestämmas vid att komplettera $e_1, \dots, e_n$ med en ON-bas $e_{n+1}, \dots, e_m$ av $\text{span}(e_1, \dots, e_n)^\perp = V(A)^\perp$. $Q_2 = [e_{n+1} \dots e_m]$

<u>Exempel:</u> (Relaterad till Ex. 2.9 Linj. Alg boken)

Bestäm QR-faktoriseringen till $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

$$u_1 = a_1 \ \& \ e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = a_2 - \langle e_1, a_2 \rangle e_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right)}_{= -3\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

$$u_3 = a_3 - \langle e_1, a_2\rangle e_1 - \langle e_1, a_3\rangle e_2 = \dots = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = [e_1 \ e_2 \ e_3] \ \& \ R \overset{4}{=} \begin{bmatrix} \langle e_1, a_1\rangle & \langle e_1, a_2\rangle & \langle e_1, a_3\rangle \\ 0 & \langle e_2, a_2\rangle & \langle e_2, a_3\rangle \\ & 0 & \langle e_3, a_3\rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{12} & -3\sqrt{12} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{12} & 5\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{bmatrix} \quad \& \ A = Q_1 R$$

I Matlab:

```
[Q,R] = qr(A)    % full QR
[Q,R] = qr(A,0)  % kompakt QR
```

QR och Mk-problemet

Antag $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $m \geq n$, att $A = [Q_1 \ Q_2]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, att rang$(A) = n$ och att vi söker Mk-lösningen till $Ax = b$.

Resultat: x är Mk-lösningen omm x löser $Rx = Q_1^T b$

Bevis: Sedan Q är ortogonal gäller $QQ^T = I$
och $\|Qz\|_2^2 = (Qz)^T Qz = z^T Q^T Q z = z^T z = \|z\|_2^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^m$

Det ger att:

$$\|Ax - b\|_2^2 = \left\|Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}x - QQ^T b\right\|_2 = \left\|Q\left(\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}x - Q^T b\right)\right\|_2 =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}x - Q^T b\right\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix} Rx \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1^T b \\ Q_2^T b \end{bmatrix}\right\|_2^2 =$$

$$= \|Rx - Q_1^T b\|_2^2 + \|Q_2^T b\|_2^2 \quad \rightarrow$$

Sedan $Q_2^T b$ är oberoende av x minimeras $\|Ax-b\|_2^2$ var lösningen till $Rx = Q_1^T b$

Vidare är R uppåt triangulär och $|\det R| = \prod_{k=1}^{n} |\langle e_k, a_k \rangle| \neq 0$
$\Rightarrow$ R är inverterbar så lösningen finns och är entydig $\boxtimes$

$$A^T A x = A^T b$$
$$Q_1 R x = b$$

Stabiliteten till resp. problem beror på konditionstalen

$$k_2(A^T A) = \|A^T A\|_2 \, \|(A^T A)^{-1}\|_2 \approx \|A\|_2^2 \, \|A^{-1}\|_2^2 = k_2(A)^2$$

$$k_2(Q_1 R) \simeq k_2(A)$$

SVD faktorisering

För varje $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, godtyckligt m & n, finns en singulärvärdesfaktorisering $A = U \Sigma V^T$ var
U är ortogonal $m \times m$
V är ortogonal $n \times n$
och

$$\Sigma = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ & 0 & \end{bmatrix}}_{n} \Big\} m$$

är "diagonal" $m \times n$ var $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ är singulärvärdena till A. (Om $m \geq n$)

Hur bestäms U, Σ, V?

SVD-faktorisering ger att $A^T A = (U \Sigma V^T)^T (U \Sigma V^T) =$
$= V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T$
$A A^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$ var $\Sigma \Sigma^T = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_n^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (m \times m)$ $\rightarrow$

$$\Sigma^T \Sigma = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_n^2 \end{bmatrix} (n \times n) \qquad \text{om vi antar } m \geq n$$

<u>Konklusion:</u> $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ är egenvärdena till A^TA och AA^T med respektive motsvarande egenvektorer V och U

<u>Exempel:</u> $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ger $A^TA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{matrix}$

Egenvärden: $P_{A^TA}(\lambda) = (34-\lambda)^2 - 30^2 \quad \lambda_1 = 64, \ \lambda_2 = 4$
med egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 34-64 & 30 \\ 30 & 34-64 \end{bmatrix} V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Vi har beräknat $\lambda_1 = \sigma_1^2 = 64$
$\lambda_2 = \sigma_2^2 = 4$

$\Rightarrow \sigma_1 = 8, \ \sigma_2 = 2$

$$AA^T = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & -30 & 0 \\ -30 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med egenvärden $\lambda_1 = 64, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$

med egenvektorer $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{V^T}$$

Kompakt SVD

Om $\operatorname{rang}(A) = r \leq n$ finns endast r positiva singularvärden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ & $\sigma_{r+1} = 0$.

Vi kan skriva
$$U\Sigma V^T = [\underbrace{U_1}_{r}\ \ \underbrace{U_2}_{m-r}] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \underbrace{0}_{n-r} \end{bmatrix} \}m-r \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

Var $\Sigma_1 = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \end{bmatrix}$

U_1 är $m \times r$ och V_1 är $r \times n$

$A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ kallas för kompakt SVD.

Tolkning: $N(A) = V(V_2)$
$V(A) = V(U_1)$

SVD och MK-metoden

Antag att $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \geq n$ $\operatorname{rang}(A) = r \leq n$ och att
$$A = [U_1\ \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

Resultat: x är MK-lösning till $Ax = b$ om $x = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T b$ (6)
Var $\Sigma_1^{-1} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} \\ \sigma_2^{-1} \\ \vdots \\ \sigma_r^{-1} \end{bmatrix}$

Bevis: $\|Ax - b\|_2^2 = \|U\Sigma V^T x - UU^T b\|_2^2 = \|\Sigma V^T x - U^T b\|_2^2 =$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_1 V_1^T x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^T b \\ U_2^T b \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\Sigma_1 V_1^T x - U_1^T b\|_2^2 + \|U_2^T b\|_2^2$$

Endast första termen beror på x och $\|Ax - b\|_2^2$ minimeras därmed av att lösa $\Sigma_1 V_1^T x = U_1^T b$ $\blacksquare$

Ekv (6) ger möjlig lösning om $r<n$ och entydig lösning om $r=n$.

Notation: $A^T = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^{-1} v_j u_j^T$

betecknar Moorse-Penrose pseudoinversen till A

Det följer att $x = A^T b$ alltid är lösningen till MK-problem.

Matlab:

```
[U, S, V] = svd(A)
Aplus = pinv(A)
```

---

storgruppsövning 7/5

N.5.1 Lös följande system med och utan radpivotering, avrunda alla svar till tre värdesiffror

a) $\begin{bmatrix} 0.02 & 1 \\ 1 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lösning: $\left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 1 & 0.02 & 1 \end{array}\right] \cdot (0.02)^{-1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 0 & -49.98 & -49 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1.00 & 1.00 \\ 0.00 & 50.0 & -49.0 \end{array}\right]$

$\left\{ 0.02 \cdot \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \Rightarrow \left(\frac{1}{50}\right)^{-1} = 50 \right\}$

$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 49/50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right] \cdot (-1)$

$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.98 \end{bmatrix}$

radpivotering: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0.02 & 1 \\ 0.02 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdot -0.02 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0.02 & 1 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right] \cdot -0.02 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.98 \\ 0 & 1 & 0.98 \end{array}\right]$

$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.98 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$

b) funkar ej utan pivotering

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N.5.6 Lös systemet $Ax = b$ med LU-faktorisering utan pivotering då $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Lösning:}}$

$A = L \cdot U$ L - "Low" nedättriangulär, ettor på diag.
U - "Upp" trappstegsformad till A

$$\boxed{L^{-1}A = U \quad \& \quad L^{-1}L = I}$$

Algoritm: 1.) Radreducera A till U
2.) Konstruera L så att samma radoperationer transformerar L till identiteten I.

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix} 5 \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Givet våra tre kolonner, dividera med de översta nollskilda elementet.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad U = \begin{matrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow L(Ux) = b \Rightarrow \begin{cases} L \cdot y = b & (1) \\ U \cdot x = y & (2) \end{cases} \rightarrow$$

Lös $[L \,|\, \mathbb{b}]$ för att få $\mathbb{y}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{y} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi får ut $\mathbb{x}$ genom att lösa $[U \,|\, \mathbb{y}]$

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \Rightarrow \mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right] \qquad \mathbb{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

L.5.14 | Låt A, B & C vara $n \times n$-matriser, med B och C icke-singulära, och $\mathbb{b}$ vara en $n \times 1$ vektor.
Hur kan man beräkna

$$\mathbb{x} = B^{-1}(2A + I) \cdot (C^{-1} + A)\mathbb{b}$$

utan att beräkna inversen?

Lösning:

Steg 1: Beräkna $\mathbb{y}_1 = A \cdot \mathbb{b}$

Steg 2: Lös $C\mathbb{y}_2 = \mathbb{b}$ för att få $\mathbb{y}_2 = C^{-1}\mathbb{b}$

Steg 3: Bestäm $\Sigma = \mathbb{y}_1 + \mathbb{y}_2$

Steg 4: Beräkna $\underbrace{\mathbb{z}}_{n \times 1} = \underbrace{(2A + 1)}_{n \times n} \underbrace{\Sigma}_{n \times 1}$

Steg 5: (Vill ha $\mathbb{x} = B^{-1}\mathbb{z}$)

Lös ut $\mathbb{x}$ genom att lösa $B \cdot \mathbb{x} = \mathbb{z}$

N.5.16 Betrakta följande matris A med invers A^{-1} med $|\varepsilon| << 1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{2\varepsilon+\varepsilon^2}\begin{bmatrix} -1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1 \end{bmatrix}$$

Vi vill lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$

Ange en gräns för $\|\delta \mathbf{b}\|_\infty$ då vi kräver att det relativa felet inte överskrider $0.5 \cdot 10^{4}$

Ange noggrannheten i decimaler av $\sqrt{3}$ då $\varepsilon = 10^{-2}$ & $\varepsilon = 10^{-4}$

Lösning: (5.5 på sidan 109-110)

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{R}^n \in \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i| \\ \|A\|_\infty &= \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}| \end{aligned}\right\} \|A \cdot \mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \qquad \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{b}\| \Rightarrow \|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

$$\left\{\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} &\Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \\ \delta \mathbf{b} = A \cdot \delta \mathbf{x} &\Rightarrow \|\delta \mathbf{b}\| = \|A\delta \mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\delta \mathbf{x}\| \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{\sqrt{3}} \\ \tilde{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{b}\|_\infty}{\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4}}$$

$$\delta \mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \tilde{\sqrt{3}} \\ 2 - \tilde{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \tilde{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\delta \mathbf{b}\|_\infty = |\sqrt{3} - \tilde{\sqrt{3}}| \qquad \|\mathbf{b}\|_\infty = 2 \qquad \|A\|_\infty = 2 + \varepsilon \qquad \rightarrow$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)} \cdot (2+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \frac{1}{\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

$$\frac{\|b\|_\infty}{\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty} = \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right) \cdot \varepsilon$$

$$\|\delta b\|_\infty \leq \left[\frac{2}{2+\varepsilon}\right] \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 10^{-4} \leq \varepsilon \cdot 10^{-4}$$

$$|\varepsilon| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \|\delta b\|_\infty \leq \varepsilon \cdot 10^{-4}$$

<u>Fall 1:</u> $\varepsilon = 10^{-2} \Rightarrow \|\delta b\|_\infty \leq 10^{-6} \Rightarrow$ 6 decimaler i $\tilde{\sqrt{3}}$

<u>Fall 2:</u> $\varepsilon = 10^{-4} \Rightarrow \|\delta b\|_\infty \leq 10^{-8} \Rightarrow$ 8 decimaler i $\tilde{\sqrt{3}}$

<u>N.5.20</u> Betrakta det överbestämda systemet $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

a) Ange minsta kvadratlösningen x

b) Ange L_2-normen hos den residual $r = Ax - b$ som har minst avstånd

c) Ange en kompakt QR-faktorisering av A

$$\tilde{b} = c_1 a_1 + c_2 a_2$$

$$\langle a_1, b - \tilde{b} \rangle = 0 = a_1^T (\tilde{b} - b)$$

$$\langle a_2, b - \tilde{b} \rangle = 0 = a_2^T (\tilde{b} - b)$$

$$A^T A \cdot x = A^T b \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ fås genom att lösa $[A^T A \,;\, A^T b]$

b) Vill veta $\|r\| = \|b - \tilde{b}\|$

$$\tilde{b} = A x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b - \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \|r\| = \|b - \tilde{b}\| = 1$$

c) ON-bas till $Col(A) = col\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = Q \cdot R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Föreläsning 8/5

Repetition: Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ och $\text{rang}(A) = r \leq n$, så kan vi skriva

$$A = \begin{cases} \underbrace{LU_1}_{r\text{ kol}} \; U_2 \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \} r \text{ rader} & \text{om } r<n \\ \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{n\times n} V_1^T{}_{n\times n} & \text{om } r=n \end{cases}$$

där $\Sigma_1 = \text{diag}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \end{bmatrix}$

Detta ger: $N(A) = \begin{cases} V(U_2) & \text{om } r<n \\ \{0\} & \text{om } r=n \end{cases}$

Om $r<n$ så är lösn. till $\Sigma_1 V_1^T x = U_1^T b$ entydig:
Om x löser ekv och $y \in N(A) = V(U_2)$ då är också $x+y$ en lösning
$\Sigma_1 V_1^T (x+y) = \Sigma V_1^T (x) = U_1^T b$

Repetition till Mk-problem

Vi har att $\underbrace{\|Ax-b\|_2^2}_{\text{residual}} = \|\Sigma_1 V_1^T x - U_1^T b\|_2^2 + \|U_2^T b\|_2^2$

Moore-Penrose-pseudoinvers

$\Rightarrow$ x är mk-lösning $\Leftarrow$ $x = A^+ b = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T b$

$Ax = b$, x är MK-lösning $\Leftrightarrow$ x löser $\Sigma_1 V_1^T x = U_1^T b$

Trunkerad SVD

För matrisen $A = U_1 \Sigma_1 U_1^T = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j U_j V_j^T$ (rang(A) = r) så kallas
$A_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j U_j V_j^T$ $k<r$ för trunkerad SVD.

Egenskaper:

- $A_k = \underset{B \text{ av rang } k}{\arg\min} \|B - A\|_2$ (dvs. A_k är den matris av Rang k som minimerar approx. felen $A_k \approx A$ i 2-norm bäst)
- A_k har bättre konditionstal än A
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$
  $\kappa_2(A_k) = \|A_k\|_2 \|A_k^+\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}$

$A_k x = b$ är mer stabilt än $Ax = b$

$A_k x = b + \xi$ (man vill ha A_k snarare än A)

brus (Håkon säger så pga kan stå för störningar)

I fortsättningen antar vi att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar
$V^{-1}AV = D$ med egenvektorer $V = [U_1 \dots U_n]$
$D = \operatorname{diag}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix}$ där $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (egenvärden)

- Om $n \gg 1$ (stort tal), hur beräknas egenvärden och egenvektorer, (egenpar), (λ, v) till A?

Naiv idé: Använd t.ex. Newtons metod till att lösa
$P_A(\lambda) = 0$

Problem: Beräkning av $\det(A - \lambda I)$ kostar $O(n!)$ flops
(faktiskt $O(n^3)$ med LU-faktorisering)

Efter potensmetoden börja med att bilda startvektor
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ (startvektor) sedan iterationssteg

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= A x_k \\ x_{k+1} &= \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \dots$$

← (konvergerar mot egenvärde?)

Observation:

$$x_1 = \frac{A x_0}{\|A x_0\|_2}$$, iterera och kan visa att

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} \qquad k = 2, 3 \dots$$

Antag $x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ ← egenvektorer med $c_1 \neq 0$ och $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ då är

$$A^k x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j A^k v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k v_j = c_1 \lambda_1^k \Big[v_1 + \frac{1}{c_1} \sum_{j=2}^{n} c_j \underbrace{\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k}_{\text{när } k \to \infty \to 0} v_j \Big]$$

$$\Rightarrow \frac{A^k x_0}{c_1 \lambda_1^k} \to v_1 \text{ när } k \to \infty$$ behöver ej tänka på tecken

$$\operatorname{sign}(\lambda_1^k) x_k = \operatorname{sign}(\lambda_1^k) \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|} \to \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$$ ← största egenvärde asymptotiskt.

Avbryt iterationen t.ex. $\min(\|x_{k+1} - x_k\|_2, \|x_{k+1} + x_k\|_2) < tol$
tol = tokransnivå noggrannhet.

Approx lösning

$v_1 = x_{k+1}$

$\lambda_1 = v_1^T A v_1 \quad \left(= \dfrac{v_1^T A v_1}{v_1^T v_1} \right)$

<u>Motivation:</u>

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \iff \frac{v_1^T A v_1}{v_1^T v_1} = \frac{\lambda_1 \cancel{v_1^T v_1}}{\cancel{v_1^T v_1}}$$

Beräkning av (λ_2, v_2):

Antag att A är symmetrisk

Då kan vi skriva $A = VDV^T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j v_j^T$

Efter vi har bestämt (λ_1, v_1)

sätt (deflation)

$$A_2 = A - \lambda_1 v_1 v_1^T = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j v_j v_j^T = V \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} V^T \qquad |\lambda_2| > |\lambda_3|$$

och använd potensmetoden på A_2 för att beräkna (λ_2, v_2)

$\vdots$

sätt $A_3 = A_2 - \lambda_2 v_2 v_2^T$, beräkna (λ_3, v_3)

Invers iteration

Generalisering av potensmetoden för att beräkna "minsta" "egenpar" för inverterbar A. Dvs. (λ_n, v_n) var vi antar $|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|$.

Observation: relation egenpar till A och A^{-1}

1) $Av_n = \lambda_n v_n \iff A^{-1}v_n = \lambda_n^{-1} v_n$

$$\left(\begin{aligned} A^{-1}Av_n &= A^{-1}\lambda_n v_n \\ \lambda_n^{-1} v_n &= A^{-1} v_n \end{aligned} \right)$$

2) $|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq |\lambda_{n-2}^{-1}| \geq \dots$

Algoritmidé

Potensmetoden på A^{-1}

Antag $x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \qquad c_n \neq 0$

Algoritm:

x_0 startvektor

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= A^{-1} x_k \\ x_{k+1} &= \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \dots$$

LUP-version av alg

$PA = LU$

$$\left.\begin{aligned} Lz_k &= Px_k \\ Uy_{k+1} &= z_k \\ x_{k+1} &= \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \dots$$

Efter uppnått noggrannhet $\quad v_n \approx x_{k+1}$

$\lambda_n = x_{k+1}^T A x_{k+1}$

Invers iteration med slaft

Vi önskar beräkna egenvärdet närmast $\sigma \in \mathbb{R}$
Relation egenpar $A - \sigma I$ och $(A - \sigma I)^{-1}$

1) $(A - \sigma I) v_j = (\lambda_j - \sigma) v_j \qquad j = 1, \dots, n$

2) $(A - \sigma I)^{-1} v_j = (\lambda_j - \sigma)^{-1} v_j \qquad j = 1, \dots, n$

Algoritmide: Potensmetod på $(A - \sigma I)^{-1}$

För $k^* := \underset{1 \leq k \leq n}{\operatorname{argmin}} \, | \lambda_k - \sigma |$

antar vi att $x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ med $c_{k^*} \neq 0$

och för bättre konvergensordning, uppdatera σ_k och $A - \sigma_k I$ för varje iteration.

Rayleighkvotiteration:

$$\sigma_0 = \sigma$$

$$\left.\begin{aligned} P(A - \sigma_k I) &= LU \\ L z_k &= P x_k \\ U y_{k+1} &= z_k \\ x_{k+1} &= y_{k+1} / \| y_{k+1} \| \\ \sigma_k &= x_{k+1}^T A x_{k+1} \end{aligned}\right\} \; k = 0, 1, \dots$$

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ med egenvärden $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Potensmetoden för beräkning av (λ_1, e_1)

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \qquad c_1 \neq 0$$

$$y_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = Ax_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = c_2 \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x_{10} = \begin{bmatrix} 0.99998 \\ 0.00585 \\ 0.00001 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx x_{10}^T A x_{10} = 3.012$$

Invers iteration för att beräkna (λ_3, e_3)

$PA = LU$ blir $L = P = I$ och $Uy_{k+1} = x_k$ och $U = A$

(Här $y_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} x_k$) $\qquad x_{k+1} = \dfrac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$

Antag igen $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \qquad = c_3 \neq 0$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{10} \approx \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-3} \\ 10^{-3} \\ 1 - 2 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 \approx x_{10}^T A x_{10} \approx 1 + 4 \cdot 10^{-6}$$

Ortogonal iteration

Antag att vi önskar att beräkna de p största egenparen till $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}|$

Naiv algoritm

$\underline{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ med rang p

$\underline{Y}^{(k+1)} = A \underline{X}^{(k)}$

$\underline{X}^{(k+1)} = Y^{(k+1)}$ med normering av varje kolonn

$\Big\}$ $k = 0, 1, \ldots$

Problem: Om $\underline{X}^{(0)} = [x_0^{(0)} \; x_1^{(0)} \ldots x_p^{(0)}]$

och $x_j^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} v_k \quad c_{j1} \neq 0 \quad \forall j \leq p$

så vill $\operatorname{sign}(\lambda_1^k) \, x_j^{(k)} \to \frac{v_1}{\|v_1\|_2} \quad \forall j \leq p$ (♡)

Dvs. alla kolonner konvergerar mot samma egenvektor

Vid att ortogonalisera $\underline{X}^{(k)}$ i varje steg kan vi undvika (♡)

Ortogonal iteration alg.

$\underline{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ rang p

Beräknar $Q^{(k)} R^{(k)} = \underline{X}^{(k-1)}$

$\underline{X}^{(k)} = A Q^{(k)}$ för $k = 0, 1, \ldots$

Om vi antar att $|\lambda_p| > |\lambda_{p+1}|$ och att egenvärderna inte är defekta.

Så vill $R^{(k)} \to R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{bmatrix}$

---

storgruppsövning 9/5

Singulärvärdesfaktorisering

Diagonalisering: $A = PDP^{-1}$ $(= PDP^T)$ P-ortogonal, D-diagonal

kolonnerna är ortonormala

$P = [w_1, \dots, w_n]$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ggr}} = P \cdot D^n P^T$ $x_{k+1} = A x_k = A^k \cdot x_0$

Vad händer när $A \sim m \times n$ och $m > n$?

Generellt kan vi skriva: $\underbrace{A}_{m\times m} = \underbrace{U}_{m\times m} \cdot \underbrace{\Sigma}_{m\times n} \cdot \underbrace{V^T}_{n\times n}$ } full singulärvärdes diagonal

U - ortogonal, V - ortogonal Σ - "diagonal"

$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Sigma_1 \sim r \times r$. $r = \text{rang}(A)$

$U = [U_1 \; U_2]$ $V = [V_1 \; V_2]$

$U_1 \sim m \times r$
$U_2 \sim m \times (m-r)$
$V_1 \sim n \times r$
$V_2 \sim n \times (n-r)$

$A = \underbrace{U_1}_{m\times r} \cdot \underbrace{\Sigma_1}_{r\times r} \cdot \underbrace{V_1^T}_{r\times n}$ } kompakt svd $\Sigma_1 \sim$ singulärvärdena roten ur egenvärdena r distinkta.

$V_1 \sim$ egenvektorer A^TA, r distinkta

$U_1 \sim$ egenvektorer $\underbrace{AA^T}_{m\times m}$, r distinkta

$\to$

$A^T = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T$ <u>Moore - Penrose pseudoinvers</u>

Minsta kvadrat metoden

<u>N. 5.36</u> Låt $A = V_1 \cdot \Sigma^{-1} \cdot U_1^T$ vara Moore - Penrose pseudoinvers till $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

a) Visa att om $m = n$ och A har full rang så är $A^{-1} = A^+$

b) Visa att om $m > n$ & A har full rang med kompakt QR - faktorisering $A = Q_1 R$ så gäller $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = R^{-1} Q_1^T$

<u>Lösning:</u>

a) $A \sim n \times n$, $r = n = \text{rang}(A)$ $\quad V = V_1$, $U = U_1$, $\Sigma = \Sigma_1 \sim n \times n$

$A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$

$A^{-1} = (U_1 \Sigma_1 V_1^T)^{-1} = (\Sigma_1 V_1^T) \cdot \underbrace{U_1^{-1}}_{U_1^T} = (V_1^T)^{-1} \Sigma_1^{-1} U_1^T$

$\Rightarrow A^{-1} = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T = A^+$ ∎

b) $A^T A = (V_1 \Sigma_1 U_1)^T (U_1 \Sigma_1 V_1^T) = V_1 \cdot \Sigma_1^T \underbrace{U_1^T U_1}_{= I} \Sigma_1 V_1^T = V_1 \cdot \Sigma_1^T \Sigma_1 V_1^T =$

$= V_1 \Sigma_1^2 \cdot V_1^T$

$(A^T A)^{-1} = (V_1 \Sigma_1^2 V_1^T)^{-1} = (V_1^T)^{-1} \Sigma_1^{-2} V_1^{-1} = V_1 \Sigma_1^{-2} V_1^T$

$(A^T A)^{-1} A^T = V_1 \Sigma_1^{-2} V_1^T \cdot (V_1 \Sigma_1 V_1^T)^T = V_1 \Sigma_1^2 \underbrace{V_1^T V_1}_{= I} \Sigma_1^T U_1 =$

$= V_1 \cdot \Sigma_1^{-2} \cdot \Sigma_1 V_1^T$

$\Rightarrow (A^T A)^{-1} A^T = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T = A^+$

Kolla insättning av QR själv

N.5.37 Bestäm Moore Penrose pseudoinvers till

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = A$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$

$A^+ = V_1 \cdot \Sigma^{-1} U_1^T$ V_1 består av egenvektorer till A^TA

$A = V_1 \Sigma \cdot V_1^T$ U_1 består av egenvektorer till AA^T

$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$

$(= AA^T = A)$

$\lambda = 1$ $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{V}_1$

$\lambda = 0$ $A - 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{0} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$V_1 = U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \varepsilon$

$\lambda_1 = 1$ $\mathbb{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = \varepsilon$ $\mathbb{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{bmatrix}$

$$x_{k+1} = A \cdot x_k = A^{k+1} \cdot x_0$$

egenvektorerna $w_1, \dots, w_n$ utgör en bas till $Col(A)$

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i \qquad A \cdot w_j = \lambda_j w_j$$

Vi kan sortera $w_1, w_2, \dots, w_n$ så att $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$

$$x_k = A^k \cdot x_0 = A^k \left(\sum_{i=1}^{n} c_i w_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i A^k w_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k w_i =$$

$$= c_1 \lambda_1^k w_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \lambda_i^k w_k = c_1 \lambda_1^k \cdot \left(w_1 + \sum_{i=2}^{n} \tilde{c}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \cdot w_i \right)$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = c_1 \cdot \lambda_1^k \cdot w_1$$

Potensmetod

x_0 startgissning $\qquad y_{k+1} = A \cdot x_k \qquad x_{k+1} = \frac{y}{\|y_{k+1}\|} y_{k+1}$

Invers iteration

x_0 startgissning $\qquad PA = LU \qquad L z_k = P \cdot x_k$

$U \cdot y_{k+1} = z_k \qquad x_{k+1} = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} \cdot y_{k+1}$

skiftad invers iteration

$A - \sigma I$, σ är ett tal nära ett egenvärde

$$\boxed{\lambda \approx x_k^T \cdot A x_k \quad \text{Raleigh?}}$$

Permutationsmatris P : Rad pivotering

N.5.27 | Beräkna approximationer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ genom att göra fem iterationer med potensmetoden respektive inversiteration utgående från gissningen $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T$

LU-faktorisering

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = U$

$l_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$PA = LU$ $\quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

P konstroveras genom att utföra radoperationer på identiteten I.

1.5.50 | Implementera en inversiteration med skift i matlab. Beräkna egenvärdena ...

{skift ändrads när man typ vet egenvärdet}

Föreläsning 14/5

Idag

- Intro BVP - stabilitet BVP = begynnelsevärdesproblem
- Approximation av derivator

Ett BVP kan skrivas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y(t)) \quad t>0 \\ y(0) &= z \in \mathbb{R}^m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Var $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ och $z \in \mathbb{R}^m$ är begynnelsevillkoret

Exempel: Låt $y(t)$ = # kaniner vid tiden t och förändringstakten (födslar - dödsfall) är proportionell med $y(t)$.

BVP:

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= c\,y(t) \quad , \quad t>0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Lösning: $\frac{dy}{dt} = cy$ $\int_0^t \frac{dy}{y} = \int_0^t c\,dt \Rightarrow y(t) = y_0 e^{ct}$

observation:

Om $c<0$ så konvergerar $y(t; y_0) \to 0$ när $t \to \infty$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$

Om $c>0$ så till för varje y_0 och $\delta>0$

$$|y(t; y_0+\delta) - y(t; y_0)| = |\delta| e^{ct} \to \infty \text{ när } t \to \infty$$

asymptotiskt ostabil (t = asymptot)

när felinsikten indata = utdata ⇒ stabilitet

Definition

Ett linjärt BVP : $\left.\begin{array}{ll} y'(t) = Ay - b & t > 0 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m & \end{array}\right\}$ (3)

med $b \in \mathbb{R}^m$ och A inverterbar kallas (asymptotisk) stabil om $\lim_{t \to \infty} y(t) = \bar{y} = A^{-1}b \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^m$

För att verifiera stabilitet för BVP på formen (3) kan man istället betrakta $z(t) = y(t) - \bar{y}$ med resulterande BVP.

$[z' = y'(t) = Ay(t) - b = Az(t) + A\bar{y} - b = Az(t)]$

$$\left.\begin{array}{ll} z' = Az(t) & t > 0 \\ z(0) = z_0 = (y_0 - A^{-1}b) & \end{array}\right\} \quad (4)$$

Sats:

BVP:en (4) är stabil omm. $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ för alla egenvärden till A.

Exempel: $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} y \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow y$ inte är stabil och $y(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

t.ex. $y\left(t; y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| y\left(t; y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right\| \to \infty$ när $t \to \infty$

Exempel: $y' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} y$ har egenvärdena $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$ och lösning $y(t) = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Problemet är stabilt sedan $y(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Approximation av derivator

Låt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ och $h > 0$

Framåtdifferens: $D_+ f(x) := \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Bakåtdifferens: $D_- f(x) := \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$

Centraldifferens: $D_0 f(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Vid taylorutveckling: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x) h^3 + \ldots$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{3!} f^{(3)}(x) h^3 + \ldots$$

Som ger trunkeringsfelet $\boxed{R_{T,+}} = D_+ f(x) - f'(x) =$

$$= \frac{1}{2} f''(x) h + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x) h^2 + \ldots =$$

$$= a_1^+ h + a_2^+ h^2 + a_3^+ h^3 + \ldots$$

$$D_+ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\left(f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \frac{1}{6} f^{(3)}(x) h^3 + \ldots\right) - f(x)}{h} =$$

$$= f(x) + \frac{1}{2} f''(x) h + \frac{1}{6} f^{(3)}(x) h^2 + \ldots$$

För bakåtdifferens: $\boxed{R_{T,-}} = D_- f(x) - f'(x) = -\frac{1}{2} f''(x) h + \frac{1}{6} f^{(3)}(x) h^2 - \ldots$

$$= a_1^- h + a_2^- h^2 + \ldots$$

Centraldifferens: $\boxed{R_{T,0}} = D_0 f(x) - f(x) = \frac{1}{6} f^{(3)}(x) h^2 + \frac{1}{5!} f^{(5)} h^4 + \ldots$

$$= a_1^0 h^2 + a_2^0 h^4 + \ldots$$

Om funktion f approximeras $\tilde{f} \approx f$ och $|\tilde{f} - f|(x) \leq \delta |f|(x) \ \forall x$ (5)

Då finns två felbildningar i approximation av derivator

$$|D_+ \tilde{f}(x) - f'(x)| \leq \underbrace{|D_+ \tilde{f}(x) - D_+ f(x)|}_{|R_f|} + \underbrace{|D_+ f(x) - f'(x)|}_{|R_T|}$$

$$|R_f| = \left| \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) - (f(x+h) - f(x))}{h} \right| \leq \frac{|\tilde{f}(x+h) - f(x+h)| + |\tilde{f}(x) - f(x)|}{h}$$

$$\overset{5}{\leq} \frac{\delta(|f(x+h)| + |f(x)|)}{h}$$

<u>observation:</u> $|R_f|$ växer när h minskar
(övning 3: Bestäm optimala steglängden h för minimering av $|D_+ \tilde{f}(x) - f'(x)|$).

Richardsons extrapolation

För approximationsmetoden $D_0 f(x;h) = f'(x) + a_1^0 h^2 + a_2^0 h^4 + \dots$

$$\Rightarrow D_0 f(x;2h) = f'(x) + a_1^0 (2h)^2 + a_2^0 (2h)^4 + \dots$$

$$\Rightarrow D_0^{(2)} f(x;h) := D_0 f(x;h) + \frac{D_0 f(x;h) - D_0 f(x;2h)}{3} =$$

$$= f'(x) + \cancel{a_1^0 h^2} + a_2^0 h^4 + \dots + \frac{-3\cancel{a_1^0 h^2} - (2^4 - 1) a_2^0 h^4 + \dots}{3}$$

$$= f'(x) + b_1^0 h^4 + b_2^0 h^6 + \dots$$

$$b_1^0 = -4 a_2^0$$

Generell metodik

Om $p \geq 1$ och $Df(x;h) = f'(x) + a_1 h^p + a_2 h^{2p} + \dots$

$$D^{(2)} f(x;h) = Df(x;h) + \frac{Df(x;h) - Df(x;2h)}{2^p - 1} =$$

$$= f'(x) + b_1 h^{2p} + b_2 h^{4p} + \dots \quad \text{var } b_1 = -2^p a_1, \dots$$

$f(h) = o(h) \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$

($\Rightarrow$ försumbart)

Trunkeringsfel - tumregel

Sedan $R_T = Df(x;h) - f'(x) = a_1 h^p + a_2 h^{2p} + \dots$

och $\frac{Df(x;h) - Df(x;2h)}{2^p - 1} = -a_1 h^p + o(h^p)$

används tumregelskattningen:

$$|Df(x;h) - f'(x)| \lesssim |Df(x;h) - Df(x;2h)|$$

och $$|D^{(2)} f(x;h) - f'(x)| \lesssim |Df(x;h) - Df(x;2h)| \quad (7)$$

Exempel 6.1

Vi mäter hastigheten till en bil

t	0	2	4	6	8	s
$\hat{v}$	0	7.22	12.5	16.6	19.54	m/s

och mätfel $|\hat{v} - v| \lesssim \underbrace{0.01}_{=\delta} |v|$

Estimera accelerationen vid $t = 4$

$\rightarrow$

Lösningsförslag:

Approximera $V'(4)$ med $D_0 \tilde{V}(4;h)$ och h olik steglängd

$$D_0 \tilde{V}(4;h=4) = \frac{\tilde{V}(4+4) - \tilde{V}(4-4)}{2\cdot 4} = \frac{\tilde{V}(8) - \tilde{V}(0)}{8} = 2.4425$$

$$D_0 \tilde{V}(4;2) = \frac{\tilde{V}(6) - \tilde{V}(2)}{4} = 2.345$$ och använd Richardson-extrapolation

$$D_0^{(2)} \tilde{V}(4;2) = D_0 \tilde{V}(4;2) + D_0 \tilde{V}(4;2) - \frac{D_0 \tilde{V}(4;4)}{3} = 2.3125$$

Felgräns:

$$|D_0^{(2)} \tilde{V}(4;2) - V'(4)| \leq \underbrace{|D_0^{(2)} \tilde{V}(4;2) - D_0^{(2)} V(4;2)|}_{|R_V|} + \underbrace{|D_0^{(2)} V(4;2) - V'(4)|}_{|R_T|}$$

$$|R_V| = \frac{4}{3} |D_0 \tilde{V}(4;2) - D_0 V(4;2)| + \frac{1}{3} |D_0 V(4;4) - D_0 \tilde{V}(4;4)| \leq$$

$$\leq \frac{4}{3} \delta \frac{|\tilde{V}(4+2)| + |\tilde{V}(4-2)|}{4} + \frac{1}{3} \delta \frac{|\tilde{V}(4+4)| + |\tilde{V}(0)|}{8} \leq$$

$$\leq \frac{4}{3} \cdot 0.06 + \frac{1}{3} \cdot 0.025 \leq 0.09$$

$$|R_T| \overset{7}{\lesssim} |D_0 V(4;2) - D_0 V(4;4)| \approx |D_0 \tilde{V}(4;2) - D_0 \tilde{V}(4;4)| =$$

$$= |2.345 - 2.4425| \leq 0.1$$

$$V'(4) = D_0^{(2)} \tilde{V}(4;2) \pm |R_V| + |R_T| = 2.3125 \pm 0.19$$

$$\left(f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right)$$

storgruppsövning 14/5

N.5.4 Utför en kompakt QR-faktorisering av matrisen A med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) \qquad 4 \times 2 \qquad m > n \text{ överbestämt}$$

Lösning: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^4 \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$

QR = ortogonal projektion

Vill hitta projektionen av en generell vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ som spänns av kolonnerna $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$

1) Hitta en ON-bas $\{\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2\} \Rightarrow$ GS
2) Använd projektionsformeln $\hat{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{a}}_1 \rangle \tilde{\mathbf{a}}_1 + \langle \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{a}}_2 \rangle \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2$

Steg 1: (GS)

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Steg 2: Tag $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{a}_2$ där vi väljer α så att $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$

$$0 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle} = \frac{\mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{e}_1} \quad (\heartsuit)}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 = [0 \ 4 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 25$$

$$\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{e}_1 = [-1 \ 2 \ 3 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 20 \qquad (\heartsuit) \Rightarrow \alpha = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{5}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -15 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ O-bas

$\rightarrow$

nu normaliserar vi $\hat{a}_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{\|e_2\|} e_2$

$\|e_1\| = \sqrt{25} = 5 \qquad \|e_2\| = \sqrt{e_2^T \cdot e_2} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{14}$

GS är färdigt $\Rightarrow$ ON-bas

$$\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\} = \left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -15 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

Så Q byggs upp m.h.a. $\hat{a}_1, \hat{a}_2$

dvs. $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{14} \\ 4/5 & 6/5\sqrt{14} \\ 0 & -3/\sqrt{14} \\ 3/5 & -8/5\sqrt{14} \end{bmatrix}$ Q ortogonal matris (ortonormala kolonner) $A = Q \cdot R$

$\underbrace{A}_{4\times 2} = \underbrace{Q}_{4\times 2} \cdot \underbrace{R}_{2\times 2} \qquad R = (R_1, R_2) \qquad a_1 = Q \cdot R_1 \qquad a_2 = Q \cdot R_2$

För att beräkna R utnyttja att Q är ortogonal

$A = Q \cdot R \qquad Q^T A = \underbrace{Q^T Q}_{I} R = R$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 0 & 3/5 \\ 1/\sqrt{14} & 6/5\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & -8/5\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 5 & 4 \\ 0 & 4/\sqrt{14} \end{matrix}$$

Matlab

N.544 Beräkna till belopp det minsta och största egenvärdet till matrisen A. med potens & invers iteration

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jämför med "eig" metoden

Inversiteration:

$(A^{-1})^k x_k = x_0$

$c_0 (\lambda_{min}^{-1}) w_1$

$x_k = A^k x_0$

$\hookrightarrow c_0 \cdot \lambda_1^k \cdot w_1$

$\lambda_1 = x_k^T \cdot (A \cdot x_k)$ där λ_1 är största egenvärdet till belopp

N. 6.4 Använd en Taylorutveckling för att ta fram en differensapprox. till $f'(x)$ som bygger på $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$ som har trunkeringsfel av ordning $O(h^2)$

Lösning: Taylorutvecklingen omg. av x

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + O(h^2)$$

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \; O(h^2)}$$

På samma sätt, $x \in (x, x+2h)$

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)\cdot 2h + O((2h)^2)$$

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}, \; O(4h^2)}$$

$$f'(x) = 2f'(x) - f'(x) \approx 2\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) - \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} =$$

$$= \frac{4f(x+h) - 4f(x) - f(x+2h) - f(x))}{2h}$$

$$\Rightarrow f'(x) \approx \frac{4f(x+h) - 3f(x) - f(x+2h)}{2h}, \; O(h^2)$$

(Lös ut $f''(x)$, räkneövningsledaren missa sjätte uppgiften)

N.6.5 | Beräkna en approximation till $f'' - 2f'$ i punkten $x = 2$ då f är given av

x	1.7	1.9	2	2.2	2.3	2.5
f	3.4	3.7	4	4.4	4.9	5.8

Lösning:

Metod: approximera f'' & f' så bra vi kan

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad O(h^2)$$

$h = 0.1$

$$f''(x) \approx \frac{3.4 - 2 \cdot 4 + 4.9}{(3 \cdot 0.1)^2} = \frac{10}{3}$$

Bakåtdifferens: $f'(x) \approx \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} = \dfrac{4 - 3.7}{0.1} = 3 \quad O(h^2)$

Framåtdifferens: $f'(x) \approx \dfrac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = \dfrac{4.4 - 4}{2 \cdot 1} = 2$

Mittpunkt: $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad O(h^3) = \dfrac{4.9 - 3.4}{2 \cdot 3 \cdot 0.1} = \dfrac{5}{3}$

$$T^2(h) = \text{bakåt} + \frac{\text{bakåt}' - \text{framåt}}{3} = 3 + \frac{3-2}{3} = \frac{10}{3}, \quad O(h^3)$$

Vi tar mittpunkt mellan $T^2(h)$ & "mittpunkts" approx.

$$f'(x) \approx \frac{15}{6}$$

$$\boxed{f'' - 2f' = \frac{10}{3} - \frac{2 \cdot 15}{6} = -\frac{5}{3}}$$

N.6.7 a) Skriv om följande begynnelsevärdesproblem för en tredje ordningens diff.ekv. till ett system av första ordningens diff.ekv.

a) $y^{(3)} = y'' + ty$

Lösning: $v = y'$ $\quad z' = z + ty$

$z = v' = y''$

$$y' = v \quad v' = z \quad z' = z + t \cdot y \quad \Big\} \quad \begin{bmatrix} y' \\ v' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \\ z \end{bmatrix}$$

Föreläsning 15/5

Idag:

- Existens och entydighet ODE
- Differensmetoder
- Approximationsordning

Generellt är det inte säkert att ODE:er

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y) \quad t > 0 \\ y(0) &= z \in \mathbb{R}^m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

har en lösning eller att lösningen är entydig

Exempel (inte entydig)

$y' = \sqrt{y} \quad t > 0, \quad y(0) = 0$

har minst två lösningar $y(t) = 0 \quad y(t) = \frac{t^2}{4}$

$$y = \begin{cases} 0 & t \in [0, t^*] \\ \frac{(t-t^*)^2}{4} \end{cases}$$

Exempel (inte existens för alla tider)

$$\frac{dy}{dt} = y^2(t) \quad t > 0 \qquad y(0) = 1$$

$$\int_0^t \frac{dy}{y^2} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1-t} \quad \Rightarrow \lim_{t \to 1} y(t) = \infty$$

lösning finns endast för $t \in [0,1)$

Sats (existens & entydighet)

Antag $f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ är globalt Lipschitz andra argumentet dvs $\exists L > 0$ så att
$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \|$ för alla $t \geq 0$ och $x, y \in \mathbb{R}^m$
Då finns entydig lösning till (1)

Differensmetoder ODE

Mål: Approximera lösningen till (1) på ett intervall $[0,1]$ med numerisk metod. Vi använder ett gitter $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ med uniform steglängd $t_n = n \cdot h$ var $h = T/N$ och söker numerisk lösning $\{y_n\}_{n=0}^N$ så att $y_n \approx y(t_n) \quad \forall n = 0, 1, \dots, N$

numerisk lösning — exakt lösning

Approximation

Vid tiden t_n är ekv (1) $\quad \frac{dy(t_n)}{dt} = f(t_n, y(t_n))$ (2)

Olika diskreta approx. av (2) leder till olika num. metoder

Euler framåt

$$\frac{dy(t_n)}{dt} \approx \frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

leder till

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$
$$y_0 = z$$

Euler bakåt:

$$\frac{dy(t_n)}{dt} \approx \frac{y(t_n) - y(t_n - h)}{h} \approx$$

$$\approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad \text{leder till}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$
$$n = 0, 1, \dots, N$$
$$y_0 = z$$

Mittpunktsmetoden

$$\frac{dy}{ds}(t_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \quad \text{ger} \quad y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n) \quad , n = 0, 1, \ldots, N-$$

$y_0 = z$

y_{-1} = något bra värde

Ett approximationssätt är att börja från integralen av (1) över ett intervall $[t_n, t_{n+1}]$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds$$

Trapetsregeln:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds \approx \frac{h}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right)$$

leder till trapetsmetoden:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) \quad n = 0, 1, \ldots, N$$

$$y_0 = z$$

Sammanfattning:

En numerisk metod som kan skrivas $y_{n+1} + \phi_f(y_n, y_{n+1}, t_n, h)$ kallas en enstegsmetod.

Om ϕ_f inte beror på y_{n+1} kallas metoden explicit, annars kallas den implicit.

Enstegsmetoden	$\phi_f(y_n, y_{n+1}, t_n, h)$
Euler framåt	$f(t_n, y_n)$
Euler bakåt	$f(t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_n + h, y_{n+1})$
Trapetsmetoden	$\frac{1}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$

Exempel:

Lös BVP:et $y' = \underbrace{-y^2 + 2ty}_{f(t,y)}$ $t \in [0,1]$ $(t_n = n \cdot h = h \cdot 0.1)$

$y(0) = 1$

med Euler framåt och bakåt & $h = \frac{1}{10}$

Euler framåt

$y_0 = 1$

$y_{n+1} = y_n + h \overbrace{(-y_n^2 + 2t_n y_n)}^{= f(t_n, y_n)}$ $n = 0, 1, \dots, 9$

ger:

$y_1 = y_0 + h(-y_0^2 + 2 \cdot \overset{=0}{t_0} y_0) = 1 + 0.1(-1) = 0.9$

$y_2 = 0.9 + 0.1(-(0.9)^2 + 2(0.1)(0.9)) = 0.837$

Euler bakåt

$y_0 = 1$

$y_{n+1} = y_n + h \overbrace{(-y_{n+1}^2 + 2t_n y_{n+1})}^{f(t_{n+1}, y_{n+1})}$ $n = 0, 1, \dots, 9$

leder till icke-linjärekv i varje iteration

$\Rightarrow$ $y_{n+1}^2 + \left(\frac{1}{h} - 2t_{n+1}\right) y_{n+1} - \frac{1}{h} y_n = 0$

med två lösningar $y_{n+1}^{\pm} = \dfrac{(2t_{n+1} - h^{-1}) \pm \sqrt{(2t_{n+1} - h^{-1})^2 + 4h^{-1} y_n}}{2}$ (4)

Vilken av y_{n+1}^+ och y_{n+1}^- är viktig?

Kvalitativ observation:

Sedan $y(0) > 0$ & $\frac{dy}{dt} = y(-y + 2t)$

så uppfyller exakta lösningen $y(t) \geq 0$ $\forall t \geq 0$

I (4) är $y_{n+1}^+ > 0$ & $y_{n+1}^- < 0$ så y_{n+1}^+ är rätta lösningen

Vi får: $y_1 \overset{(4)}{=} \dfrac{2 \cdot 0.1 - 10 + \sqrt{(9.8)^2 - 40}}{2} = 0.9318$

$y_2 = \dots = 0.8884$

Felestimat enstegsmetoder

Vi önskar att studera felet $\max_{1\leq n\leq N} \| y(t_n) - y_n \|_2$
var y är exakt lösning till (1) över $[0,T]$ och $\{y_n\}_{n=\infty}^{N}$ är numerisk lösning på gitter med steglängd $h = T/N$

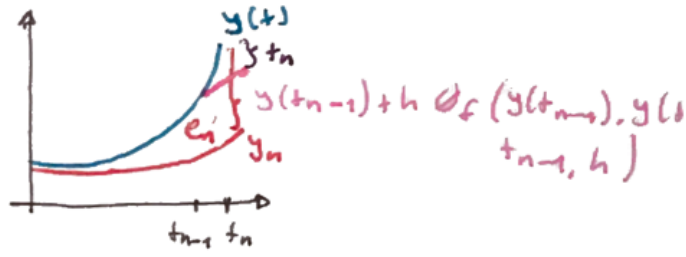
Definition 1

Om det $\exists c>0$ & $p>0$ så att $\max_{1\leq n\leq N} | y(t_n) - y_n \|_2 \leq ch^p$

Så sägs numeriska metoden ha approximationsordning p.

Definition 2.

Lokala trunkeringsfel till en numerisk metod är definierad som
$\tau_n = y(t_n) - (y(t_{n-1}) + h\, \phi_f(y(t_{n+1}), y(t_n), t_{n-1}, h)$
och låt $\tau := \max_{1\leq n\leq N} |\tau_n|$



Det globala trunkeringsfelet är definierad:
$e_n = y(t_n) - y_n$, $n = 0, 1, \dots, N$

Trunkeringsfel Euler framåt

$\phi_f(y_{n-1}, y_n, t_{n-1}, h) = f(t_{n-1}, y_{n-1})$
Antag $m = 1$ (dvs $y(t) \in \mathbb{R}$)

$$\tau_n = y(t_n) - y(t_{n-1}) - h\underbrace{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}_{= y'(t_{n-1})}$$

Vid Taylorutveckling $y(t_n) - y(t_{n-1}) = y'(t_{n-1})h + y''(\theta)\frac{h^2}{2}$, $\theta \in [t_{n-1}, t_n]$

$\Rightarrow \tau_n = y''(\theta)\frac{h^2}{2} \Rightarrow |\tau_n| \leq \max_{s\in[t_{n-1},t_n]} |y''(s)| \frac{h^2}{2}$
$\Rightarrow \tau = \max_n |\tau_n| \leq \max_{s\in[0,T]} |y''(s)| \frac{h^2}{2}$

$\rightarrow$

På liknande sätt kan man visa att

$\tau \leq ch^2$ för Euler bakåt och $\tau \leq ch^3$ för trapetsmetoden

Sats.

Om $\tau \leq ch^{p+1}$ för en num. metod och exakta lösningen y och $f(t,y)$ är tillräckligt snälla, så har metoden approximationsordning p.

Dvs. $\exists \hat{c} > 0$

så att $\max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_2 \leq \hat{c} h^p$

Bevis (Euler framåt, $m \neq 1$)

Vi antar här $\exists$ $c, L > 0$ så att $\max_{t \in [0,T]} |y''(t)| < c$

och

$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall t \in [0,T]$ & $x, y \in \mathbb{R}$

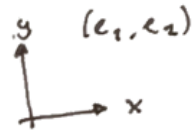
Storgruppsövning 16/5

N.6.8 Är följande system av ODE:s stabilt?

$$\dot{y}_1 = -y_1 + y_2$$
$$\dot{y}_2 = -2y_2$$

Lösning & generellt om stabilitet

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{y}} = A \cdot \mathbf{y} \ (\heartsuit)}$$



$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \ \& \ \lambda_2 = -2$$

Vad betyder stabilt?

egenvärden & egenvektorer

$$A \cdot \mathbf{v}_1 + A \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad A \cdot P = P \cdot D \Rightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$$

$$\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = P \cdot \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = A \cdot \mathbf{y} \qquad \dot{\mathbf{x}} = P^{-1}\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}A \cdot \mathbf{y} = P^{-1}AP\mathbf{x} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(P^{-1}AP)}_{D}\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \ \& \ x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\mathbf{y} = P \cdot \mathbf{x} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]\begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \ (\heartsuit)}$$

Stabilitet $\lim_{t \to \infty} \mathbf{y}(t)$ konvergerar

Vill ha $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$

$\lambda < 0$ $\quad e^{-\lambda t} = \frac{1}{e^{\lambda t}}$

$\boxed{\text{svar: Ja!}}$

N.6.11 Betrakta problemet $y' = -5y$ med begynnelsevärde $y(0) = 1$

a) är problemet stabilt?

b) är Eulers framåtmetod stabil med steglängd $h = 0.5$?

Utsvängning

Testproblem $\boxed{\dot{y} = \lambda y}$ $\Rightarrow y(t) = ce^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ stabilitet ges av $\boxed{Re(\lambda) < 0}$

A-stabil $\Rightarrow$ Metod har samma stabilitetskriterie som problemet

Exempel: Euler framåt & bakåt

Framåt: $\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \lambda \cdot y_k \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h \cdot \lambda y_k = (1+\lambda h) y_k$

$\Rightarrow \boxed{y_{k+1} = (1+\lambda h)^{k+1} y_0}$ (1)

bakåt: $\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \lambda y_k \Rightarrow y_k - \lambda h y_k = y_{k-1}$

$\Rightarrow y_k (1 - \lambda h) = y_{k-1} \Rightarrow y_k = \frac{1}{1-\lambda h} y_{k-1} = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^{k-1} y_0$

$\boxed{y_k = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^{k-1} y_0}$ (2)

Stabilitet framåt $|1 + \lambda h| \leq 1$ (3)

Stabilitet bakåt $\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right| \leq 1 \Rightarrow (1 - \lambda h) \geq 1$ (4)

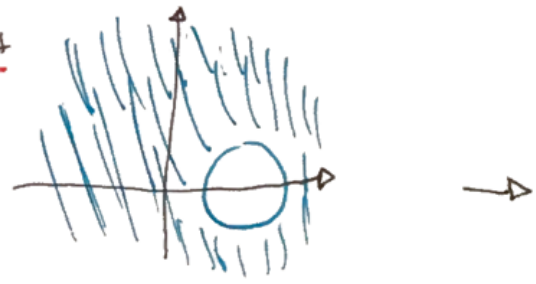
mittpunkt/centrum

Låt $\lambda h = z \in \mathbb{C}$ $\{z \in \mathbb{C} : |1 + \lambda h| \leq 1\}$ framåt, radie 1 $(-1, 0)$

$\{z \in \mathbb{C} : |1 - \lambda h| \geq 1\}$ Bakåt radie $(1, 0)$

Framåt

Bakåt



För framåt kan vi välja h så att den är stabil

$$\left.|1+\lambda h| \leq 1 \right\} \quad -1 \leq \lambda h \leq 1 \Rightarrow 1+\lambda h \leq 1 \Rightarrow \lambda h \leq 0$$

$$h \leq \frac{2}{-\lambda} \qquad h \leq \frac{2}{5} = 0.4 \quad ? \; (h = 0.5)$$

a) <u>svar: ja</u> b) <u>svar: nej</u>

<u>N. 6.15</u> Betrakta systemet $y' = Ay$, $y(0) = c$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -100 & -1 \\ -1 & 3 & -10^4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hur liten steglängd behövs för att Eulers framåt ska vara stabilt? (läs frågan i boken)

<u>Lösning:</u> $y_{\parallel} = c_1 \cdot v_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$

$\lambda_3 \approx -10^4$ dämmerande

$$y_k = (1+\lambda_3 h)^k y_0 = (1+\lambda_3 h)^k$$

$$|1+\lambda_3 \cdot h| \leq 1 \Rightarrow h \leq \frac{2}{-\lambda_3} = \frac{2}{-(-10^4)} = 2 \cdot 10^{-4}$$

<u>Svar: $h < 2 \cdot 10^{-4}$</u> ("så med lill brutalt stort får vi h brutalt litet")

N.6.14 approx. ordn. 2 ODE:er

(1) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h f(t_k, y_k))\right]$

(2) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})\right]$

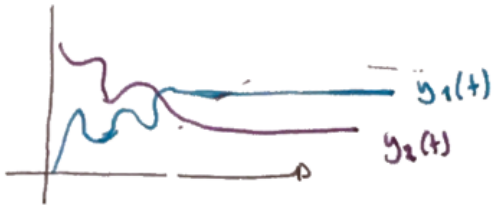
(3) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$

Ange vilka enstegsmetoder & implicita

(1) enstegs (2) ~~enstegs~~ tvåstegs (3) implicit, enstegs

Styva problem behöver extremt liten steglängd för att få en stabil numerisk metod

adaptiv steglängd
{ småsteg först och stora sen pga ingen skillnad }



$y_{k+1} = O(h^2)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$

Tar fram approx av ordning 4, y_{k+1}^4, felterm $O(h^5)$
— " — 5, y_{k+1}^5, felterm $O(h^6)$

error

$E = \| y_{k+1}^4 - y_{k+1}^5 \| \propto O(h^6)$

Vi väljer h så länge felet $E \leq tol$
ode45 & ode23 ... ode15 Matlab

Föreläsning 17/5

Repetition: $\tau = \max_{0 \leq n \leq N} \tau_n = O(n^{p+1})$

$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| = |y(t_n) - y_n| = O(h^p)$

Bevis: för Euler framåt

för Euler framåt är $\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| = \max_{0 \leq n \leq N} |e_n| = O(n)$

där y är exakta lösningen till $y' = f(t,y)$, $t \in [0,T]$

$y(0) \in \mathbb{R}$, $h = T/N$ om vi antar $\exists L > 0$

$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall t \in [0,T] \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

Beviset: definiera $y_n = y(t_{n-1}) + h \cdot f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))$, $n = 1,2,\dots,N$

Då blir $\tau_n = y(t_n) - \tilde{y}_n$

För godtyckligt $0 < n < N$ gäller då:

$$|e_n| = |y(t_n) - y_n| \leq \underbrace{|y(t_n) - \tilde{y}_n|}_{=|\tau_n|} + |\tilde{y}_n - y_n| \leq$$

$$\leq |\tau_n| + |y(t_{n-1}) + h \cdot f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) - (y_{n-1} + h \cdot f(t_{n-1}, y_{n-1}))|$$

$$\leq \tau + \underbrace{|y(t_{n-1}) - y_{n-1}|}_{=|e_n|} + \underbrace{h \cdot |f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) - f(t_{n-1}, y_{n-1})|}_{\leq h \cdot L \underbrace{|y(t_{n-1}) - y_{n-1}|}_{h \cdot L \cdot |e_{n-1}|}} \leq$$

$$\leq \tau + (1 + h \cdot L)|e_{n-1}|$$

Sammanfattning:

$|e_n| \leq \tau + (1+h\cdot L)\cdot|e_{n-1}|$

$\Rightarrow |e_n| \leq \tau + (1+L\cdot h)(\tau + (1+hL)|e_{n-2}|) \leq \ldots \leq \ldots \leq \ldots \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}(1+L\cdot h)^k\tau + \underbrace{(1+Lh)^n}_{\to 0}\underbrace{|e_0|}_{|y(t_0)-y_0|=0} \leq \frac{(1+h\cdot L)^n-1}{\cancel{1}+h\cdot L-\cancel{1}}\cdot\tau$$

Vi använder att $1+L\cdot h \leq e^{Lh}$ och att $\tau \leq \frac{ch^2}{2}$ (se föreläsning 15)

$\Rightarrow |e_n| \leq e^{nhL}/L\cdot h \cdot ch^2/2 \leq \tilde{\tau}e^{n\cdot h\cdot L} \leq \|n\cdot h\| \leq T \leq \tilde{\tau}e^{LT}$

$\forall n \in [0, N]$

$\therefore |e_n| \leq \tilde{\tau}e^{LT} \quad \forall n \in [0,N]$ iallafall !

Numerisk metod	Approximativ metod
Euler framåt	1, $\tau = O(h^2)$
Euler bakåt.	1, $\tau = O(h^2)$
Trapets metoden	2, $\tau = O(h^3)$
Runge-Kutta 4	4, $\tau = O(h^5)$

Plan: nn × A-stabilitet

× Runge-Kutta-metoder

Repetition: Ett BVP: $y'(t) = Ay \quad t>0$ (1)

$y(0) = z$ där $z \in \mathbb{R}^m$ & $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ är stabilt

om $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \forall y(0) \in \mathbb{R}^m$ (2)

Sats: Stabilitet

(1) är stabilt <u>omm</u> $Re(\lambda) < 0$ $\forall$ egenvärden till A

Definition: A-stabilitet

Antag y löser ett BVP på formen (1)
En numerisk metod $y_n \approx y(nh)$ är stabil för en viss steglängd $h > 0$ om:

$$\lim_{h \to \infty} y_n = 0 \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R}^m \quad (3)$$

Om (3) gäller för alla $h > 0$ så är den numeriska metoden <u>A-stabil</u>.

Stabilitet för BVP $(m=1)$
Betrakta $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ med $Re(\lambda) < 0$
$y(0) \in \mathbb{R}$ som är stabilt.

|| För vilka steglängder $h > 0$ är Euler bakåt stabil?

Upprätta ett schema:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1}$$
$$\Rightarrow (1 - \lambda h) y_{n+1} = y_n \Rightarrow |y_{n+1}| = |1 - \lambda h|^{-1} |y_n|$$

$$\Rightarrow |y_n| = |1 - \lambda h|^{-1} |y_0|$$

$\Rightarrow$ metoden stabil för alla h s.a. $|1 - \lambda h| > 1$
$\Rightarrow$ A-stabilitet $\quad z_1 \Rightarrow$ stabil

dvs. om: $(1 - h \cdot Re(\lambda))^2 + (h \cdot Im(\lambda))^2 > 1$

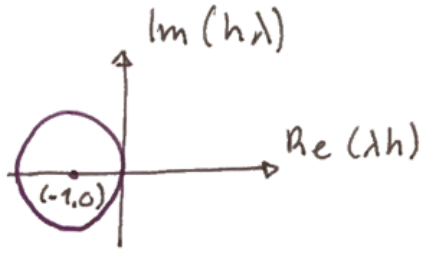
Sedan $Re(\lambda) < 0$, så är $(1 - h \cdot Re(\lambda))^2 > 1 \quad \forall h > 0$
$\Rightarrow$ (3) håller $\forall h > 0$ $\Rightarrow$ metoden är A-stabil

Ll samma fråga Euler framåt?

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) = y_n + h \cdot \lambda y_n = (1 + h\lambda) y_n$$

$$\Rightarrow |y_n| = |1 + \lambda h|^n |y_0|$$

$\Rightarrow$ Metoden är stabil $\forall h > 0$ s.a.
$|1 + \lambda h| < 1$ (5.1)
(alt $0 < h < \dfrac{-2\, Re(\lambda)}{(\lambda)^2}$ (5.2))



* inte A-stabil
* inte stabil på alla h

Stabilitet för linjära system ($m > 1$)

För stabila BVP på formen
$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ med $Re(\lambda_{10}) < 0 \quad \forall k = 1, \dots, m$
kan man härleda att

Euler Bakåt är A-stabil.
medan Euler framåt bara stabil för $|1 + h \cdot \lambda| < 1$
$\forall k = 1, 2, \dots, m$ (7)

Exempel: $\begin{cases} y' = -10y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ lösning $y(t) = e^{-10t}$

Num. lösning med Euler framåt enligt (5.1) är
stabilitetsområdet alla $h > 0$
$|1 - 10h| < 1$, dvs. $0 < h < 0.2$

Lösning med $h = 0.01$

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)^{n+1} \qquad y_0 = 0.9^{n+1}$$

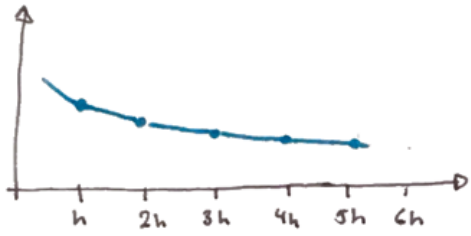
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} y_n = 0$$

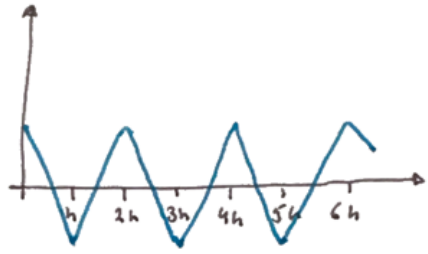
Lösning med $h = 0.2$

$$y_n = (1 + h\lambda)^n y_0 = (1-2)^n y_0 = (-1)^n y_0$$

$$\Rightarrow |y_n| \to 1 \neq 0 \text{ när } n \to \infty$$

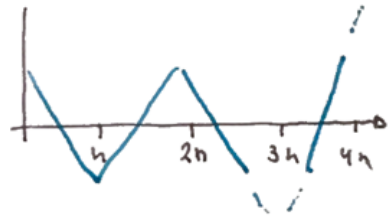
Bild:





Lösning med $h = 0.3$

$$y_n = (-2)^n y_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |y_n| = \infty$$



Exempel:

Bestäm stabilitetsområdet till Euler framåt för.

$$\begin{cases} y' = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A} y \\ y(0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

A har egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$

$\Rightarrow$ BVP: et är stabilt.

enligt (7) så är stabilitetsområdet alla $h > 0$ s.a:

$|1 + \lambda_1 h| < 1$ s.a.: $|1 + \lambda_1 h| < 1$ & $|1 + h\lambda_2| < 1$

dvs. alla $h > 0$ s.a. $|1 - 4h| < 1$ dvs. $0 < h < \frac{1}{2}$

|| Relevant att kunna beräkna stabilitet på tentan.

Runge-Kutta-metoder

är en klass av enstegsmetoder

$y_{n+1} = y_n + h \cdot \Phi_f(y_n, y_{n+1}, t_n, h)$

som med s nivåer kan skrivas: $y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \quad n \geq 0$

där $k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j) \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Representation av RK-metoden i Butcher-tableau:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & & b_s \end{array}$$

Exempel: $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ (ger $s = 1$, $a_{11} = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$)

$k_1 = f(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot k_1 = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$

Alltså: Euler framåt

Exempel: $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ (ger Euler bakåt)

$y_{n+1} = y_n + h \cdot k \qquad k_1 = f(t_n + h, \underbrace{y_n + h \cdot k_1}_{y_{n+1}})$

Exempel: Trapetsmetoden

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Exempel: på storre metod

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

{ är Rungekutta 4 som anvands i ode 45 }

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} k)$$
$$k_3 = f(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} k_2)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3)$$
$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Exempel: på icke-linjär
(Predator-prey-equation eller Lotka-Volterra)

Låt $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\quad y_1(t) = \#$ kanner vid tiden t
$\quad y_2(t) = \#$ rävar vid tiden t

ODE-modell, populationsdynamik

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \\ y_2' &= -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{aligned}\right\} \quad t > 0 \quad (8) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

αy_1 = "Naturlig" förändringstakt kanner
$-\gamma y_2$ = "Naturlig" förändringstakt rävar
$-\beta y_1 y_2$ = Rovdjurens konsumtionstakt av kanner
$\delta y_1 y_2$ = Rovdjurens tillväxt från kannkonsumtion

Ekv. (8) är icke-linjär och måste lösas numeriskt

(visning av matlab-lösning)

Föreläsning 18/5

Vi betraktar $\min f(x)$ då $\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases}$ där

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ objektfunktion
$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ likhetsvillkor
$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ olikhetsbivillkor

(Vektorolikheten $\vec{x} \leq \vec{y}$ är komponentvis $x_i \leq y_i \ \forall i$)

Det omvända problemet $\max f(x)$ då $\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases}$ betraktas ej då $\max f(x) = \min -f(x)$

Några definitioner: $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta f}{\delta x_n} \end{bmatrix}$ är gradienten $\nabla f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$H := \gamma(\nabla f(x))$, $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$
där $H_{ij}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x) \quad 1 \leq i, j \leq n$

Vi antar att $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ och då är $H(x)$ symmetrisk då
$$H_{ij}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(x) = H_{ji}(x)$$

Exempel: $f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3 \quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 x_3^3 \\ 2 x_1 x_2 x_3^3 \\ 3 x_1 x_2^2 x_3^2 \end{bmatrix}$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 0 & 2 x_2 x_3^3 & 3 x_2^2 x_3^2 \\ 2 x_2 x_3^3 & 2 x_1 x_3^3 & 6 x_1 x_2 x_3^2 \\ 3 x_2^2 x_3 & 6 x_1 x_2 x_3^3 & 6 x_1 x_2^2 x_3 \end{bmatrix}$$

Sats 4.18 LA

För optimering utan bivillkor gäller att om $a \in D$ är kritisk punkt, dvs. om $\nabla f(a) = 0$ och $D \subset \mathbb{R}^n$ är öppen mängd, så har f • ett (strikt) lokalt minimum i a om $H(a)$ är positivt definit

$$(x^T H(a) x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

$\longrightarrow$

För problem med likhetsbivillkor kan man införa Lagrangefunktionen $L(x,\lambda) := f(x) + \lambda^T g(x)$ var $\lambda \in \mathbb{R}^m$ kallas Lagrangemultiplikatorn.

Minimeringsproblemet löses vidatt söka bland kritiska punkter till $L(x,\lambda)$, dvs. lösa $\nabla L(x,\lambda)=0$ var

$$\Delta L = \begin{bmatrix} \frac{\delta L_1}{\delta x_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x_n} \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) \\ \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \end{matrix}$$

så $\nabla L(x,\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

Motivation Lagranges multiplikatorformel

Låt $\hat{x}$ vara en lösning till

(1) $\begin{cases} \min f(x) & \text{var } f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \text{då } g(x) = 0 & g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$

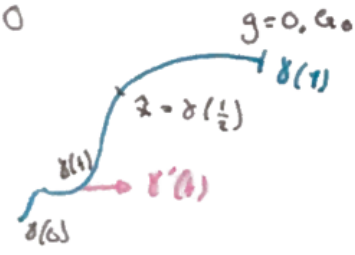
Antag att $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} = G_0$

Kan beskrivas av kurvan $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ och $\gamma(\frac{1}{2}) = \hat{x}$

Då är $\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

(sedan $g(\gamma(t)) = 0 \ \forall t \in [0,1]$)

Speciellt är då $\nabla g(\hat{x}) \perp \gamma'(\frac{1}{2})$



$\longrightarrow$

Vidare är $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \nabla f(\hat{x}) \cdot \gamma'(\tfrac{1}{2}) = 0$

sedan $\hat{x}$ är lokalt minimum

Konklusion: $\nabla g(\hat{x}) \perp \gamma'(\tfrac{1}{2})$ & $\nabla f(\hat{x}) \perp \gamma'(\tfrac{1}{2})$

för att vi är i $\mathbb{R}^2$ måste då $\nabla f(\hat{x}) = \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x})$ för ngt $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$

så $\hat{x}$ lösning till (1)

$\Rightarrow \exists \hat{\lambda} \in \mathbb{R} \quad \nabla f(\hat{x}) - \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x}) = 0 \qquad g(\hat{x}) = 0$

$\Rightarrow \nabla L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$

Exempel:

$$\min \underbrace{x_1 + x_2}_{= f(x)} \quad \text{då} \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad \Big\} \ (2)$$

$$L(x, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 + \lambda 2 x_1 \\ 1 + \lambda 2 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad x_1 = -\frac{1}{2\lambda} \qquad x_2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

som ger kritiska punkter $(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

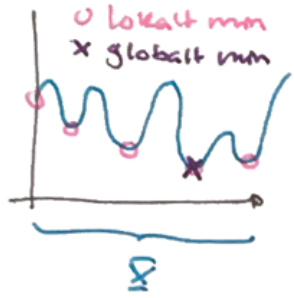
$(x^{(2)}, \lambda^{(2)}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Sedan $f(x^{(1)}) = \sqrt{2}$ & $f(x^{(2)}) = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow \hat{x} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är minimeringspunkt

Betrakta problemet min $f(x)$ då $x \in \bar{X}$ var $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$
& $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Definition:</u> Vi säger $\hat{x} \in \bar{X}$ är ett globalt minimum om $f(\hat{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \bar{X}$ och $\hat{x}$ är lokalt min om $f(\hat{x}) \leq f(x)$ för alla $x \in \bar{X}$ i öppen omgivning om $\hat{x}$



om "$\leq$" ersätts med "$<$" kallas $\hat{x}$ ett strikt lokalt / globalt min.

Sökriktning

För en $x \in \bar{X}$ säger vi att s i x är en tillåten riktning om $\exists \delta_1 > 0$ så att
- $x + \alpha s \in \bar{X}$ $\forall \alpha \in (0, \delta_1)$

s i x är en descentriktning om $\exists \delta_2 > 0$ så att $f(x + \alpha s) < f(x)$ $\forall \alpha \in (0, \delta_2)$

Egenskaper:

(i) s i x är descentriktning om $\nabla f(x) \cdot s < 0$

(ii) om $\hat{x}$ är lokalt min så finns ingen tillåten descentriktning

(iii) Om $\hat{x} \in \text{Int}(\bar{X})$ (mängd av inre punkter i $\bar{X}$) och $\hat{x}$ är lokalt min så gäller $\nabla f(\hat{x}) = 0$

$\rightarrow$

Bevis (i)

Låt $s \in \mathbb{R}^n$. Då är $\frac{d}{d\alpha} f(x+\alpha s)\Big|_{\alpha=0} = \nabla f(x) \cdot s$

Om $\nabla f(x) \cdot s < 0$, så finns $\delta_2 > 0$ så att $\frac{d}{dx} f(x+\alpha s)_{\alpha=\beta} < 0$
$\forall\ 0 \leq \beta < \delta_2$

$\Rightarrow f(x+\beta s) - f(x) = \int_0^\beta \frac{d}{dx} f(x+\alpha s)\, ds < 0 \quad \forall 0 \leq \beta \leq \delta_2$

$\Rightarrow$ s är descentriktning $\blacksquare$

Bevis (ii) $\hat{x}$ är lokalt $\Leftrightarrow \frac{d}{dx} f(x+\alpha s)\Big|_{\alpha=0} = 0$
$\forall$ tillåtna $s \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ # tillåtna descentriktningar

Bevis (iii) $\hat{x} \in \text{Int}(\bar{X})$ alla $s \in \mathbb{R}^n$ är tillåtna riktningar och
$\hat{x}$ lokalt min $\Rightarrow \frac{d}{dx} f(\hat{x} + \alpha e_k)\Big|_{\alpha=0} =$

$= \frac{\partial f}{dx_k}(\hat{x}) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow \nabla f(\hat{x}) = 0 \quad \blacksquare$

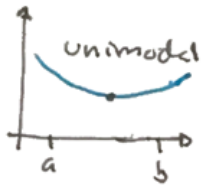
Optimering utan bivillkor i 1D.

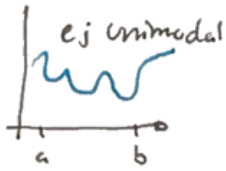
Vi studerar $\min f(x)$ då $x \in \mathbb{R}$ (eller $x \in [a,b]$) och $\left.\right\}$ (4)
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Gyllene snitt: Låt minimera (4) över $[a,b]$
Anta det finns $\hat{x} \in [a,b]$ så att

$f'(x) < 0$ för $x < \hat{x}$
$f'(x) > 0$ för $x > \hat{x}$ $\rightarrow$

Då sägs f vara unimodal över $[a,b]$





Algoritm gyllenesnittet sökt.

Sätt $a_0 = a$, $b_0 = b$ och låt $\tau \in (0, \frac{1}{2})$
utan parameter vi ska bestämma sedan

```
för k = 0, 1, ...
    Δ_k = a_k + b_k ,
    x_k = a_k + (1 - τ) Δ_k
    y_k = a_k + τ Δ_k
if f(x_k) < f(y_k)        % minimerar över [a_k, y_k]
  else                        a_{k+1} = a_k ,  b_{k+1} = y_k
      % minimera över [y_k, b_k]
      a_{k+1} = x_k ,  b_{k+1} = b_k
  end
end
```

Hur kan vi välja $\tau \in (\frac{1}{2}, 1)$ så att $y_1 = x_0$? (eller $x_1 = y_0$)

Ekvationer: $\Delta_1 = b_1 - a_1 = \tau \Delta_0$

och $y_1 = x_0 \iff a + \tau \Delta_1 = a + (1-\tau)\Delta_0$

$\iff (\tau^2 + \tau - 1)\Delta_0 = 0$

$\iff \tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

obs! I varje steg blir antingen $y_{k+1} = y_k$ (om $f(x_k) < f(y_k)$)
eller $x_{k+1} = y_k$ (om $f(y_k) \leq f(x_k)$)
och endast en ny funktionsberäkning behövs i varje iteration och $\tau = 1/\varphi$ där $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ som är gyllene snittet $\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} = \varphi^{-1}$

Föreläsning 21/5

Fortsättning metoder för minimering utan bivillkor i 1D.

$$\left.\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{då } x \in \mathbb{R} \quad (\text{eller } x \in [a,b]) \end{array}\right\} (1)$$

Newtonsmetod

kan användas för att hitta kritiska punkter till (1) genom att lösa $f'(x)=0$

Alg:

x_0 start approx.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Om $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x}$ och $f''(\hat{x}) > 0$ så är $f(\hat{x})$ (strikt) lokalt min

Konvergensordningen är:

2 om $\hat{x}$ är enkelrot till $f'(x)$

1 om $\hat{x}$ är multipelrot till $f'(x)$

Exempel 5.7:

Beräkna $\min_{x\in[0,1]} \cos(x) + x^2 - 0.4x$

med Newtons metod och med gyllene snittet sök.

Newtonsmetod lösning: $f'(x) = -\sin(x) + 2x - 0.4$

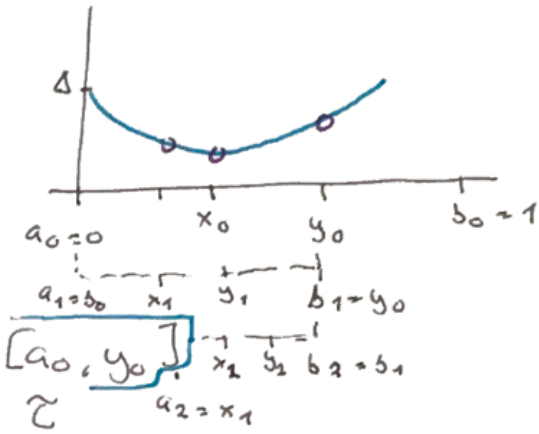
$f''(x) = -\cos(x) + 2$

$x_0 = 0.5 \qquad x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 0.5 - \frac{-\sin(0.5) + 1 - 0.4}{-\cos(0.5) + 2}$

$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$ .... i Matlab

→

Gyllene snitt sök: $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



$a_0 = 0, \; b_0 = 1, \; \Delta_0 = b_0 - a_0 = 1$

$x_0 = (1-\tau)\Delta_0 = (1-\tau)$

$y_0 = \tau \Delta_0 = \tau$

$f(x_0) < f(y_0) \Rightarrow$ minimera över $[a_0, y_0]$

$a_1 = 0, \; b_1 = y_0 \Rightarrow \Delta_1 = b_1 - a_1 = \tau$

$x_1 = (1-\tau)\Delta_1 = (1-\tau)\tau$

$y_1 = \tau \Delta_1 = \tau^2 = (1-\tau) = x_0$

$f(x_1) > f(y_1) \Rightarrow$ minimera över $[x_1, b_1]$

Flerdimensionell minimering utan bivillkor

$$\left.\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{då } x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \quad (2)$$

där $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

som vi kommer att lösa med sökemetoder

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k s^{(k)}$$

där $\alpha_k \in \mathbb{R}$ - steglängd

$s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ - sökriktning

Val av steglängd

Given sökriktning $s^{(k)}$ så bestämmes steglängden av linjesökningsproblemet.

$$\min_{\alpha} f(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) = \min_{\alpha} g_k(\alpha) \quad (3)$$

Sedan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är detta ett 1D minimeringsproblem vi kan lösa (3) t.ex. med Newtons metod

$\alpha_{k,0} = 0$ (eller annan startgissning)

(→ se nästa block)

(fortsättning föreläsning 21/5)

(Val av steglängd)

$n = 0, 1, \ldots$

$$\alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n} - \frac{g_k'(\alpha_{k,n})}{g_k''(\alpha_{k,n})} = \alpha_{k,n} - \frac{\nabla f(x^{(k)} + \alpha_{k,n} s^{(k)}) \cdot s^{(k)}}{(s^{(k)})^T H(x^{(k)} + \alpha_{k,n} s^{(k)}) s^{(k)}} \quad (4)$$

Sedan $g_k'(\alpha) = \frac{d}{dx} f(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) = \nabla f(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) \cdot s^{(k)}$

$$g_k''(\alpha) = \frac{d}{dx}\left(\nabla f(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) \cdot s^{(k)}\right) =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} f(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) s_i^{(k)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\frac{d^2}{dx_i dx_j} f(x^{(k)} + \alpha s^{(k)})}_{H_{ij}(x^{(k)} + \alpha s^{(k)})} s_i^{(k)} s_j^{(k)} =$$

$$\frac{d}{dx} f(x + \alpha s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx} f(x + \alpha s) \frac{d(x_i + \alpha s_i)}{d\alpha}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i^{(k)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} H_{ij}(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) s_j^{(k)}}_{= H(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) s^{(k)}} =$$

hesianen

$$= (s^{(k)})^T H(x^{(k)} + \alpha s^{(k)}) s^{(k)}$$

<u>obs!</u> i specialfallet

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x + c$$

där $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och symmetrisk är positiv definit

$b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

så är lösningen till (3)

$$\alpha_k = \frac{-\nabla f(x^{(k)}) s^{(k)}}{(s^{(k)})^T H s^{(k)}} \quad (5)$$

Val av sökriktning med steepest descent metod

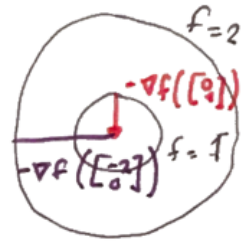
I steg k vid punkten $x^{(k)}$

1.) Välj sökriktning: $s^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$ (6)

2.) Uppdatera $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k s^{(k)}$ (7)

Var $\alpha_k = \begin{cases} \text{bestäms av (3), (4), eller (5) om linjesökning användes} \\ 1 \text{ annars} \end{cases}$

Motivation för valet (6)



Exempel: $f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ ger $-\nabla f(x) = -x$

Exempel 7.6

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad 5x_1^2 + x_1 x_2 + 0.5 x_2^2 - x_1 = f(x)$$

Beräkna min med steepest descent och linjesökning

Lösning: $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 10x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ $\quad H = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

f är kvadratisk, $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T x$

→

Metodik

Iterera $k = 0, 1, \ldots$ $\quad s^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$ bestäm steglängden

$$\alpha_k \overset{(4)}{=} \frac{-\nabla f(x^{(k)})\, s^{(k)}}{(s^{(k)})^T H s^{(k)}} = \frac{\| s^{(k)} \|_2^2}{(s^{(k)})^T H s^{(k)}} \quad (8)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k s^{(k)}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 \overset{8}{=} \frac{1}{10}$$

$$x^{(1)} \overset{9}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s^{(1)} = -\nabla f(x^{(1)}) = -\begin{bmatrix} 10(0.1) + 0 - 1 \\ 0.1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{\| s^{(1)} \|_2^2}{(s^{(1)})^T H s^{(1)}} = \frac{0.01}{0.01} = 1$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$x^{(k)} \to \hat{x}, \quad k \to \infty$

Var $\hat{x}$ är lösning till $\nabla f(\hat{x}) = 0 \qquad \hat{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{2017/18 Maj tenta uppg. 8}}$

Betrakta $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} x_2^2 - x_1 + \frac{x_1^2}{4}(x_1+x_2)^2$

a) Beräkna ∇f (2p)

b) Gör två iterationssteg med steepest descent med startpunkt $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och använd exakt lösning av linjesökningsproblemet (3) (3p)

a) $$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{x_1}{2}(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{2}x_1^2(x_1+x_2) \\ x_2 + \frac{1}{2}x_1^2(x_1+x_2) \end{bmatrix}$$

$$s^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)}) = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

linjesökningsproblemet:

$$\alpha_0 = \arg\min_\alpha f(x^{(0)} + \alpha s^{(0)}) = \arg\min_\alpha f\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \arg\min_\alpha \left(-\alpha + \frac{\alpha^4}{4}\right) = g_0(\alpha)$$

α_0 löser $g_0'(\alpha) = 0$ dvs. $\alpha_0^3 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 1$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 s^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s^{(1)} = -\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

linjesökningsproblem:

$$\alpha_1 = \arg\min_\alpha f(x^{(1)} + \alpha s^{(1)}) = \arg\min_\alpha f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha/2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \arg\min_\alpha \left(\frac{\alpha^2}{8} - 1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = g_1(\alpha)$$

$g_1(\alpha) = 0$ ger $\frac{\alpha}{4} - \frac{(1-\alpha/2)}{4} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2}{3}$ $\rightarrow$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \end{bmatrix} \quad \boxtimes$$

<u>Exempel 7.7</u>

$$\min \quad x_1^2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 - 5x_1$$

Obs. $\lim_{x_2 \to \infty} f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \lim$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Storgruppsövning 21/5

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funktional

Hitta $x^* \in \mathbb{R}^n$ så att $x^* = \arg\min f(x)$

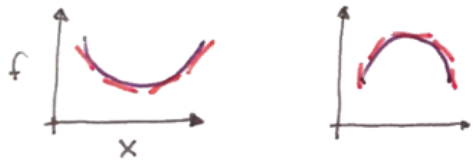
Vill lösa $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

Låt $l(x)$ vara en tangent till $f(x)$ i x_0

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definition: Konvex

f är konvex om den ligger över sina tangenter $f(x) \geq l(x) \; \forall x$



Definition: Konkav

f är konkav om den ligger över sina tangenter $f(x) \leq l(x) \; \forall x$

$\max_x f(x)$ om f är konkav $\min_x -f(x)$

Newton 1D:

$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ Låt x_1 lösa $l(x_1) = 0$

$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Kan generaliseras till $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Optimalitetskrav: x^* är optima $f'(x^*) = 0$

Flera dimensioner, $n > 1$

Taylor utveckling (Optimeringskrav $\nabla f(x^*) = 0$)

$$f(x) \approx f(x_+) + \nabla f(x_+)^T (x - x_+) + \frac{1}{2}(x - x_+)^T H(x_k)(x - x_+)$$

där $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1} \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n} \end{bmatrix}$ av gradienten $\quad H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{dx_1^2} & \frac{\partial^2 f}{dx_1 dx_2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial^2 f}{dx_n^2} \end{bmatrix}$

Vill att x_+ gör skillnaden $f(x) - f(x_+)$ minimal

$$x^* = x_+ - H^{-1}(x_+)\nabla f$$

Generell optimeringsalgoritm

Steg 0: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ initiera

Steg 1: Hitta $s \in \mathbb{R}^n$ sökriktning $H(x_k) s_k = -\nabla f(x_k)$

steg 2: Välj steglängd $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $f(x_k + \alpha s_k) < f(x_k)$

steg 3: Sätt $x_{k+1} = x_k + \alpha s_k$

steg 4: Terminering

N. 7.3 Visa formeln (7.9) för optimal steglängd vid kvadratisk objektfunktion $\alpha_k = \dfrac{-\nabla f(x_k)^T s_k}{s_k^T H(x_k) s_k}$

Lösning: $\min f(x) = c_0 + c^T x + \frac{1}{2} x^T H \cdot x$

Vill stega enligt $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$ med krav $f(x_k + \alpha_k s_k) < f(x_k)$

Vill välja α_k så att $g(\alpha_k) = f(x_k + \alpha_k s_k)$ minimeras

$$\Rightarrow g'(\alpha_k) = 0 = \nabla_\alpha f(x + \alpha s_k)^T s_k$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \nabla_\alpha f(x + \alpha_k s_k)^T s_k \quad (\heartsuit)}$$

$\rightarrow$

Uttryck för ∇f?

$$\boxed{\nabla f = Hx + c \quad (*)}$$

$$f = c_0 + c^T x + \frac{1}{2} x^T H x$$

$$0 = \nabla f(x_k + \alpha_k s_k)^T s_k = (H(x_k + \alpha_k s_k) + c)^T s_k =$$

$$= \alpha_k s_k^T H s_k + \underbrace{(c^T + H x_k)^T}_{= \nabla f(x_k)} s_k = \alpha_k s_k^T H(x_k) s_k + \nabla f(x_k)^T \cdot s_k$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{-\nabla f(x_k) \cdot s_k}{s_k^T H(x_k) s_k} \quad (7.9)$$

N. 7.6 Gör två iterationssteg med steepest descent & konjugerande gradient med start i origo på problemet

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x^2 - xy + y^2 - x + 1$$

Lösning: steepest $\quad s_k = -\nabla f(x_k)$

konj. $\quad s_k = -\nabla f(x_k) + \beta_k s_{k-1}$

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|_2^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|_2^2}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 2x - y - 1 \\ 2y - x \end{bmatrix} \quad \text{Optimat} \quad x^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iteration 1: $\quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \frac{-\nabla f(x_0)^T s_1}{s_1^T H s_1} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_1 s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

Iteration 2:

Steepest $\nabla f(x_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Konj: $\beta_1 = \frac{\|\nabla f(x_1)\|}{\|\nabla f(x_0)\|} = \frac{\frac{1}{2}[0\ -1]\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}}{[-1\ 0]\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}} = \frac{1}{4}$

$S_1 = -\nabla f(x_1) + \beta_1 \cdot S_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

steglängd $\alpha_1 = \frac{-\nabla f(x_1)^T S_1}{S_1^T H S_1}$

Steepest $\alpha_2 = \frac{1}{2}$

Konj: $\alpha_2 = \frac{2}{3}$

Uppdatering: Steepest $x_2 = x_1 + \alpha_1 S_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

Konj. $x_2 = x_1 + \alpha_1 \cdot S_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$
$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = x^*$

N. 7.10
matlab

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 y)^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2$

a) Minimum? b) En iteration c) Bra/dåligt?
d) Newton e) En till iteration

$\nabla f \begin{bmatrix}(x^2-y)2x - (1-x)\\ -(x^2-y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x^3 + (1-2y)x - 1\\ y - x^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

(2) $\Rightarrow y = x^2$ (3)

(3) ; (1) $\Rightarrow 2x^3 + (1-2x^2)x - 1 = +x - 1 = 0 \Rightarrow x^* = +1$

$y^* = (+1)^2 = 1$ $\quad x^* = \begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Kritiska punkter x^* $\nabla f(x^*) = 0$

N. 7.14 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x-y-1)$$

a) kritiska punkter analytiskt klassificera
b) Hitta max & min med "fminunc"

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -6x(1+2y-x) + 6y(y+1) \\ 6x(1+2y-x) \end{bmatrix}$$

$x = 0$ ger en rät
$y = 0$ $(0,0)$ $(0,-1)$
$y = -1$

$$y = \frac{x-1}{2}$$

$$6\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{3}{2}(x^2-1) \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

$y_3 = 0$ $y_4 = -1$

Kritiska punkter $(x_1, y_1) = (0,0)$, $(x_2, y_2) = (0,-1)$
$(x_3, y_3) = (1,0)$, $(x_4, y_4) = (-1,-1)$

$$H(x) = \begin{pmatrix} -6(1+2y) & 6(1+2(y-x)) \\ 6(1+2(y-x)) & 12x \end{pmatrix}$$

$f(x^*) = 0$ $f''(x^*) > 0$ $\cup$ $\det(H(x^*)) > 0$ min & max
$f''(x^*) < 0$ $\cap$ $\det(H(x^*)) < 0$ sadel

$\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ min | $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$ max

$(0,0)$ & $(0,-1)$ sadel $(1,0)$ max
$(-1,-1)$ min

storgruppsövning 23/5

Tenta 29-05-2017

② Antag att $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ och $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$ uppfyller $AB = 0_{n \times m}$
Låt $r = \text{rang}(A)$ och $s = \text{rang}(B)$

a) Visa att $V(B) \subseteq N(A)$, Låt $y \in \underbrace{V(B)}_{\in \mathbb{R}^k} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^m : y = Bx$

$\Rightarrow Ay = ABx = 0$

b) Ange dim till $N(A) \cap V(B)^\perp \subset \mathbb{R}^k$
$\rightarrow N(A) = V(B) \oplus (N(A) \cap V(B)^\perp)$

$V(B) \subseteq \mathbb{R}^k$, $V(B) \oplus V(B)^\perp = \mathbb{R}^k$

Vi vill andvända dimensionssatsen $A = B \oplus C$
$\Rightarrow \dim(A) = \dim(B) + \dim(C)$

$\dim(N(A)) = \dim \mathbb{R}^k - \text{rang}(A) = k - r$
$\dim(V(B)) = \text{rang}(B) = s$

$\dim(N(A) \cap V(B)^\perp) = \dim(N(A)) - \dim(V(B)) = k - r - s$

c) Antag att du har en rutin 'null'

$\begin{pmatrix} | & | & \\ b_1 & b_2 & \cdots \\ | & | & \end{pmatrix} =: D =: \text{null}(C)$ är basvektorerna av $N(C)$

Förklara hur du kan använda 'null' till att beräkna en bas för $N(A) \cap \underbrace{V(B)^\perp}_{= N(B^T)}$ $\rightarrow$

Låt $\underbrace{C_1}_{\in \mathbb{R}^{k \times (k-r)}} = \text{null}(A)$ $\quad C_1 : \mathbb{R}^{k-r} \to N(A)$

Varje vektor i $N(A)$ kan skrivas som $C_1 x$, $x \in \mathbb{R}^{k-r}$

$C_1 x \in N(A) \cap N(B^T) \iff B^T C_n x = 0$

Låt $C_2 = \text{null}(B^T C_1)$

$$\mathbb{R}^{k-r-s} \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^{k-r} \xrightarrow{C_1} N(A)$$
$$\to \mathbb{R}^{k-r-s} \xrightarrow{C_1 \circ C_2} N(A) \cap N(B^T)$$

Svar: $C_2 C_1$

---

(3) Låt $U \subseteq \mathbb{R}^3$ vara rummet uppspänt av vektorerna

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Bestäm en bas för $U^\perp$. Lös $\begin{bmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \end{bmatrix}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 = b_2 \\ b_2 = b_3 \end{array}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{alternativ: } \vec{b} = \vec{V_1} \times \vec{V_2}$$

b) Låt $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Beräkna $w \in U$ s.a. $\|\vec{b} - \vec{w}\|_2 = \min_{u \in U} \|\vec{b} - \vec{u}\|_2$

$$\vec{w} = x_1 \vec{V_1} + x_2 \vec{V_2} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

minimera $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2 \to A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$

④ a) Visa att $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0)$ är en skalärprodukt. e_1 $([-1,1])$

Visa 4 egenskaper:

1) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$
2) $\langle \alpha f,g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle$
3) $\langle f_1+f_2,g\rangle = \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$
4) $\langle f,f\rangle \geq 0$ och $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f=0$

till 4) $\rightarrow \langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f(0)=0$

$\int_{-1}^{1} (f'(s))\,ds = 0 \quad f' \equiv 0$

b) Bestäm en ON-bas till P_3 med avseende på $\langle\cdot,\cdot\rangle \rightarrow$ gram-Schmidt

Behover 4 linjära oberoende vektorer $\Rightarrow$
$\{p_0,p_1,p_2,p_3\} = \{1,t,t^2,t^3\}$

Konstruera en ON-bas $\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$

q_0 ta $\tilde{q}_0 = p_0 = 1$ normera q_0: $\langle \tilde{q}_0,\tilde{q}_0\rangle = 1 \rightarrow q_0 = 1$

inte normerad

q_1: ansätt $\tilde{q}_1 = p_1 + \alpha_{10} q_0$

Kräver $\langle \tilde{q}_1, q_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\langle p_1,q_0\rangle}_{} + \alpha_{10}\underbrace{\langle q_0,q_0\rangle}_{=1} = 0$

$= \int_{-1}^{1} 1\cdot 0\,dt + t\cdot 0\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_{10} = 0$

$\Rightarrow \tilde{q}_1 = p_1$ normera $\tilde{q}_1$: $\langle p_1,p_1\rangle = \int_{-1}^{1} dt = 2$

$\Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}t$ $\longrightarrow$

q_2: ansätt $\tilde{q}_2 = p_2 + \alpha_{20} q_0 + \alpha_{21} q_1$

$q_2 \perp q_1$, $\tilde{q}_2 \perp q_0 \Rightarrow \langle \tilde{q}_2, q_1 \rangle = \langle p_2, q_1 \rangle + \underbrace{\alpha_{20} \langle q_0, q_1 \rangle}_{=0}$

$+ \alpha_{21} \underbrace{\langle q_1, q_1 \rangle}_{=1} = 0 \quad \Rightarrow \langle p_2, q_1 \rangle + \alpha_{21} = 0$

$\rightarrow \langle p_2, q_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{1} 2t \, dt + 0^2 \cdot 0 \right) = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = 0$

$\langle \tilde{q}_2, q_0 \rangle = \underbrace{\langle p_1, q_0 \rangle}_{=0} + \alpha_{20} = 0$

& q_3 lämnas

---

⑤ a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Hitta alla rötter av $\det(A - \lambda I_2)$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$$

egenvektorer: Betrakta $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$

$\Leftrightarrow (A - \lambda_1 I_2) \vec{v}_1 = 0$

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} v_{11} = v_{12} \\ \hookrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$(A - \lambda_2 I_2) \vec{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$

b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = A\,y(t) \\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ På grund av spektakelsatsen kan lösningen $y(t)$ skrivas som en linjärkombination.

$y(t) = c_1(t)\,v_1 + c_2(t)\,v_2$ av egenvektorerna

v_1, v_2 med tidsberoende koefficienter $c_1(t), c_2(t)$

$$\frac{d}{dt} y(t) = \dot{c}_1 v_1 + \dot{c}_2 v_2 = \underbrace{A \cdot \vec{y}}$$

$$= c_1 A v_1 + c_2 A v_2 =$$

$$= c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2$$

Eftersom v_1, v_2 är linj. ober. får man två ekv.

$$\dot{c}_1 = \lambda_1 c_1 \qquad \dot{c}_2 = \lambda_2 c_2 \qquad \left[\mathring{c}_1 = c_1(t=0)\right]$$

$$\Rightarrow c_1 = \mathring{c}_1 e^{\lambda_1 t} \qquad c_2 = \mathring{c}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathring{c}_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \mathring{c}_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$\rightarrow$ Bestäm $\mathring{c}_1, \mathring{c}_2$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = y(t=0) = \mathring{c}_1 v_1 + \mathring{c}_2 v_2$

$$\mathring{c}_1 = 0 \qquad \mathring{c}_2 = 1 \qquad y(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$$

$\rightarrow$

c) Lös även det storda Bvp.

$$\vec{z}' = A \cdot \vec{z} \qquad \vec{z}(0) = \begin{bmatrix} A + \varepsilon \\ -2 \end{bmatrix}$$

Får det på samma sätt som i b)

$$z(t) = \mathring{z}_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \mathring{z}_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Bestäm $\mathring{z}_1, \mathring{z}_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ -2 \end{pmatrix} = z(t=0) = \begin{pmatrix} \mathring{z}_1 + \mathring{z}_2 \\ \mathring{z}_1 - 2\mathring{z}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathring{z}_1 = 2\mathring{z}_2 - 2 \quad \& \Rightarrow 3\mathring{z}_2 = 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow z(t) = \begin{pmatrix} \cdot \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 + \begin{pmatrix} \cdot \\ \frac{\varepsilon}{3} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} v_2$$

Betrakta differensen $z(t) - y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ -\frac{2}{3}\varepsilon \end{pmatrix} e^{3t}}_{\xrightarrow{t \to \infty} \infty} +$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \frac{\varepsilon}{3} \end{pmatrix} e^{-3t}}_{\xrightarrow{t \to \infty} 0} v_2$$