Fö 17

Sammansättning av linj. avb.

Sats (4, s. 180)

Om $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och
$f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ är linj. avb., så är sammansättn.
$f_A \circ f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ linjär.

Om f_A och f_B har matris A och B,
så gäller att $f_A \circ f_B$ har matris AB.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_A \circ f_B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Anm:

A typ $m \times n$
B typ $n \times p$
AB typ $m \times p$

Bevis

$$f_A \circ f_B(\mathbf{x}) = f_A(f_B(\mathbf{x})) = f_A(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Alltså $f_A \circ f_B$ linjär och dess matris är AB

$\square$

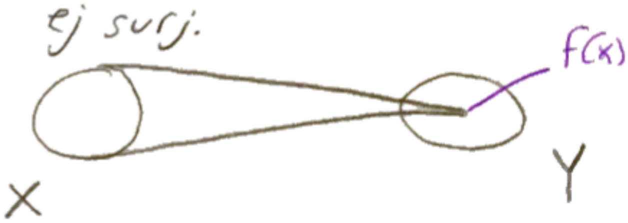
Injektiva, surjektiva, bijektiva linj. avb.

Minns: att

$f: X \longrightarrow Y$

- <u>injektiv</u> om $\forall y \in Y$ finns högst ett $x \in X$ så att $f(x) = y$

- <u>Surjektiv</u>: $f(X) = Y$, dvs $\forall y \in Y$ finns <u>åtminstone ett</u> $x \in X$ så att $f(x) = y$



- <u>bijektiv</u> (eller inverterbar) om injektiv och surjektiv, dvs $\forall y \in Y$, så finns <u>exakt ett</u> $x \in X$ så $f(x) = y$

Inversen till $f: X \to Y$ är en fkt $f^{-1}: Y \to X$ som uppfyller att $f \circ f^{-1}: Y \longrightarrow Y$ är id_Y
$f^{-1} \circ f: X \to X$ är id_X

- f^{-1} entydigt bestämd om den finns
- f har en invers omm f bijektiv

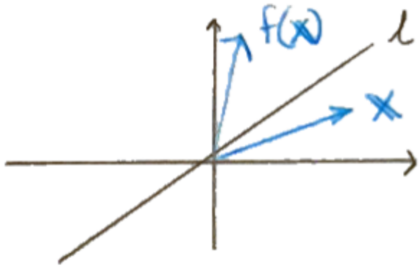
Ex: Vilka linjära avb. är inj/surj./bij.?
Om bij. bestäm f^{-1}.

Avbild

-Skalning: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
med $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbf{x} \longmapsto \lambda \mathbf{x}$

-Projektion: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
på (x_1, x_2)
planet $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2)$

-Spegling i $l: t(1,1,1)$



-parametrisering av linjen $l: t\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$t \longmapsto t\mathbf{v} = t(v_1, v_2, v_3)$

Matris

-Skalning: $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$ $n \times n$

- projektion: $\begin{bmatrix} | & | & | \\ f\mathbf{e}_1 & f\mathbf{e}_2 & f\mathbf{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2×3

- spegling i ℓ: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- parametrisering av linjen: $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\left([t] \mapsto \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} [t] = \begin{bmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{bmatrix} \right)$$

<u>Injektiva</u>:

- Skalning: Ja
- proj. : Nej, $f(x_1, x_2, 1) = f(x_1, x_2, 2)$
- spegl. i ℓ: Ja
- param. av l: Ja

<u>Surjektiva</u>:

- Skalning: Ja
- proj: Ja, ty tag ett godtyckl. $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Då $f(y_1, y_2, 0) = (y_1, y_2)$
- Spegling: Ja
- parametr: Nej, $f(\mathbb{R})$ är en linje i $\mathbb{R}^3 \neq$ hela $\mathbb{R}^3$

$f(\mathbb{R}^3)$ linje

Bijektiv:
- Skalning
- Spegling i ℓ

Invers f^{-1}
- Skalning: Skaln. med $\frac{1}{\lambda}$

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Spegling i ℓ:
  $f^{-1} = f$, kallas involution

När är $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injektiv?

f_A inj

$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ högst en lösn.

$f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast triv. lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Minns:
om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösn. $\mathbf{x}_p$
varje lösn. till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$,
där $\mathbf{x}_h$ löser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Noll}(A) = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{nolldim}(A) = 0$

$\Leftrightarrow$ A's kolonner linjärt oberoende

Speciellt:

$A = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad n \leq m$

<u>Vad är bilden (värdemängden) av $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?</u>

$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ är i bilden $f_A(\mathbb{R}^n)$

$\Leftrightarrow f_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart

$\Leftrightarrow \mathbb{b} \in \text{Kolonn}(A)$

dvs $f_A(\mathbb{R}^n) = \text{Kolonn}(A)$ (speciellt $\text{rang}(A) = \dim(f_A(\mathbb{R}^n))$)

<u>När är $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv?</u>

f_A surj. om $f_A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar $\forall \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \text{Kolonn}(A) = \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = m$

Speciellt:

$A: \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \quad n \geq m$

<u>När är $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bijektiv?</u>

inj ger $n \leq m$

surj ger $n \geq m$

$\Rightarrow$ bij ger $n = m$, om f_A bij.

Minns: bassatsen på matrisform

Om A $n \times n$ så

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff$ f_A inj.

$\Updownarrow$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ $\iff$ f_A surj

$\Updownarrow$

A inverterbar

<u>Slutsats</u> (Sats 5, s. 184)

- f_A bijektiv $\iff$ A inverterbar
- Om $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dvs A $n \times n$

  f_A inj. $\iff$ f_A surj. $\iff$ f_A inverterbar

(ny variant av bassatsen)

<u>Påstående</u>

$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ $\quad$ $A : n \times n$

<u>Bevis</u>

$f_{A^{-1}} \circ f_A(\mathbf{x}) = f_{A^{-1}}(A\mathbf{x}) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Alltså $f_{A^{-1}} \circ f_A$ identiteten på $\mathbb{R}^n$

Kolla att $f_A \circ f_{A^{-1}}$ = identiteten på $\mathbb{R}^n$

Alltså f_A inverterbar med inversen $f_{A^{-1}}$ $\square$

Determinanter (kap 9)

Antag A $n \times n$

Determinanten av A betecknas $\det(A)$, eller $|A|$ är ett tal $\in \mathbb{R}$ som är ett mått på A's "storlek"

- $\det(A) = \pm$ (n-dim volymen av den n-dim parallellepipeden som $a_1, \dots, a_n$ spänner upp)

$= \pm$ Volym ()

- $\det(A) =$ volymförändring (med tecken) under f_A

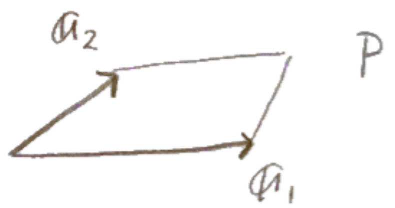
$$\mathrm{Vol}(f_A(S)) = \pm \det(A) \cdot \mathrm{Vol}(S)$$

Definition

$n=1$; $A = [a]$, $\det(A) = a$

$n=2$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

a_1 och a_2 spänner upp ett parallellogram P



$\text{area}(P) = |a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}|$

alltså: $|\det(A)| = \text{area}(P)$

- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \geq 0$
  om a_1, a_2 pos. orient

- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} < 0$
  om a_1, a_2 neg. orient