

Fö 16

Ex: Låt F : deriverbara fktionen $\rightarrow$ fktionen

$$F(f) = f'$$

Är F linjär?

$$\begin{aligned} F(\lambda f + \tilde{\lambda} \tilde{f}) &= (\lambda f + \tilde{\lambda} \tilde{f})' = \lambda f' + \tilde{\lambda} \tilde{f}' = \\ &= \lambda F(f) + \tilde{\lambda} F(\tilde{f}) \end{aligned}$$

Ja! Derivering linjär

Ex: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \mapsto Ax$$

där A $m \times n$ -matris

linjär?

räkneregler matris mult + add

$$\left[\begin{aligned} f(\lambda x + \lambda' x') &= A(\lambda x + \lambda' x') \stackrel{\downarrow}{=} \lambda Ax + \lambda' Ax' = \\ &= \lambda f(x) + \lambda' f(x') \end{aligned} \right]$$

Alltså f linjär!

Bevis första halvan av
Satsen

Sats (1, s. 166)

① En avbildning $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär om den är på formen $f(x) = Ax$ för någon $m \times n$ -matris A .

② Givet, en linjär avbildning f , så
 $A = \begin{bmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix} (*)$ där $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ...

A sägs vara f 's avbildningsmatrix, skriver A_f . Omvänt kan beteckna den linjära avb. vars matrix är A , med f_A .

Ex: Bestäm avbildningsmatrix för den linjära avb. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = 7x + 3y$ (övn. visa att den är linjär)

$$f(e_1) = f(1, 0) = 7 + 0 = 7$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = 0 + 3 = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Koll: } A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 7x + 3y = f(x, y)$$

Bevis av sats

Säg i ex ovan att $x \mapsto Ax$ är linjär.

För att visa omvändningen, antag f linjär och låt A vara def. genom (*)

Vill visa $f(x) = Ax$

$$\text{Obs 1: } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\text{Obs 2: } A e_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1j} \\ | & & | & & | \\ a_{ij} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ij} \\ | & & | & & | \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ plats } j =$$

def av (*)

$$= \begin{bmatrix} | \\ a_{ij} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ f(e_j) \\ | \end{bmatrix}$$

Det följer nu att

$$A \mathbf{x} = A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n =$$

obs 1

räkne regler
för matris

$$= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) =$$

obs 2

f linjär

obs 1

$$= f(\mathbf{x})$$

Slutsats:

f linjär $\Rightarrow f$ på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
där A ges av (A)



Ex: linjära avb.

- skalning
- ortogonal projektion
- spegling
- rotation

Skalning:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \lambda x, \lambda > 0$$

Ex: $x \mapsto 3x$



Matris?

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix}$$

$$f(e_1) = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(e_2) = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

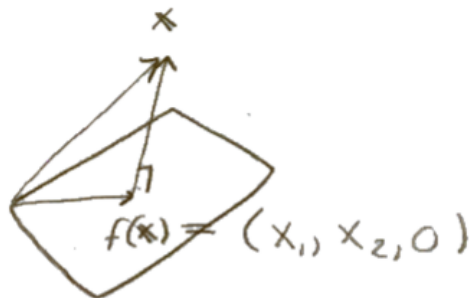
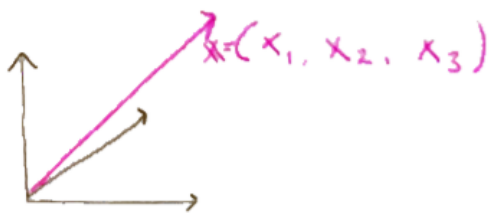
$$f(e_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$$

Orthogonal projection (på plan genom origo)

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$x \mapsto$ orthogonal proj. av x på (x, x_3) -planet



Matris:

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = e_1$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = e_2$$

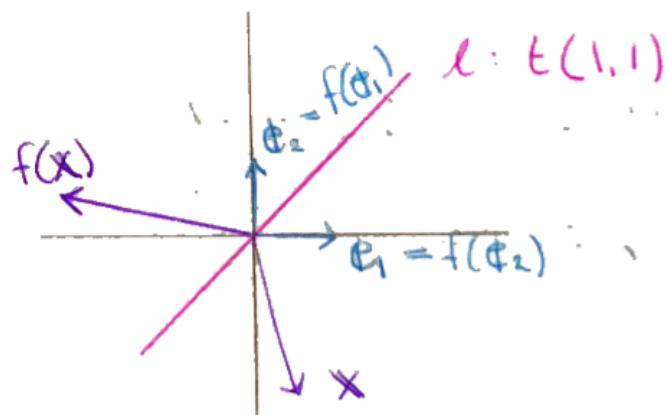
$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Spegling (i linje/plan genom origo)

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$x \mapsto$ speglingen av x i linjen $l: t(1,1)$
($t \in \mathbb{R}$)

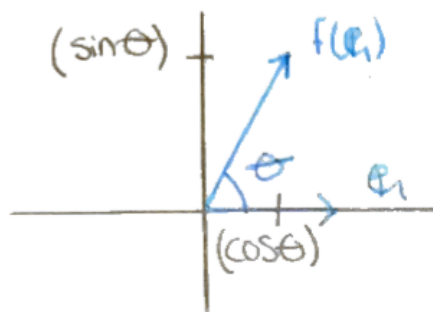
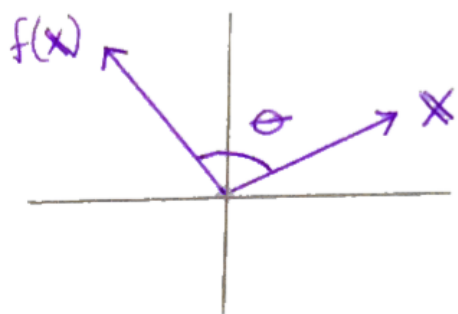


$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_2 \\ f(e_2) &= e_1 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e_2 & e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotation

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

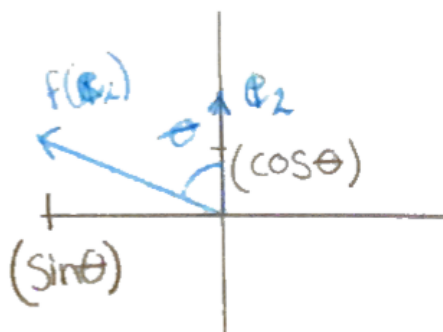
$x \mapsto x$ roterad θ radianer moturs



Moturs:

$$f(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$f(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$



$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Definition

En linjär avbildning är en isometri om $|f(x)| = |x|$, för alla $x \in \mathbb{R}^n$

Vi kan visa att f isometri om och endast om A_f ortogonal (se s. 174-175)

Vilka av föregående exempel är isometrier?

- Skalning:

$x \rightarrow \lambda x$ isometri om och endast om $|\lambda| = 1$

- Orto. proj:



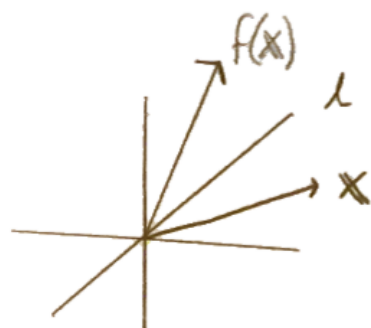
ej isometri
 $|f(x)| \leq |x|$ med likhet om och endast om x parallell med det vi projicerar på

- Rotation:



isometri!

- Spegling:



isometri!

Basbyten (kap. 8.5)

Def:

Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär avb.

$e_1, \dots, e_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ och

$e_1, \dots, e_m$ bas för $\mathbb{R}^m$

är avb.matrisen för f map baserna $\{e_i\}, \{e_j\}$
den matris A som uppfyller

$$f: \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

↑
koordinat i $e_1, \dots, e_n$

↑
koordinat i $e_1, \dots, e_m$

Obs: Avb.matrisen för f

(def tidigare) är avb.mat. för f map baserna

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(standard baser)

Sats (6, s. 185)

Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linj. avb.

A avb. mat. map $\{e_j\}$ och $\{e_j\}$

så är avb. mat. map $\{e'_j\}, \{e'_j\}$

$$A' = S_E^{-1} A S_e$$

där S_E och S_e basbytesmatriser:

$$\left(\begin{bmatrix} | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \\ | & & | \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \\ | & & | \end{bmatrix} S_e \right)$$