Fö 15

Ortogonala matriser

Def:

A typ $n \times n$ är ortogonal om dess kolonner utgör en ortonormerad bas för R^n.

Karakterisering av ortogonala matriser

Sats (7, s. 139)

A $n \times n$. Följande påståenden är ekvivalenta

(i) A är ortogonal

(ii) radvektorerna i A är en ON-bas för R^n

(iii) $A^T A = I$

(iv) $AA^T = I$

(v) $= A^{-1} = A^T$

Ex: Visa att (i) => (iii)

Skriv $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

Då innebär A ortogonal att $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \dots & a_1 \cdot a_n \\ \vdots & & \\ a_n \cdot a_1 & & a_n \cdot a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

<u>ex:</u> I är ortogonal, ty vektorerna ON-bas

$I^T I = II = I$

<u>Ex:</u> $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2b & 2b \end{bmatrix}$ ortogonal?

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2b & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

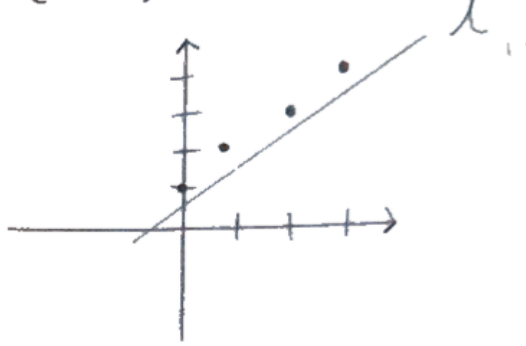
Alltså måste $4b^2 = 0$ och $4b^2 = 1$ Alltså nej!

<u>Minsta kvadratmetoden</u> (kap 7.8)

Approximativ lösning till (överbestämda) ekv.syst. $(m > n)$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

<u>Ex:</u> Hitta en linje som går genom pkt $(0,1), (1,0), (1,2), (2,3)$



Att pkt ligger på en linje $l: y = ax + b$ innebär att ekv.syst.

$$\begin{matrix}(0,1)\\(1,0)\\(1,2)\\(2,3)\end{matrix}\quad \begin{cases}0+b=1\\a+b=0\\a+b=2\\2a+b=3\end{cases} \qquad (*)$$

har lösning

Obs: Från $(*)$ eller bilden att lösning saknas

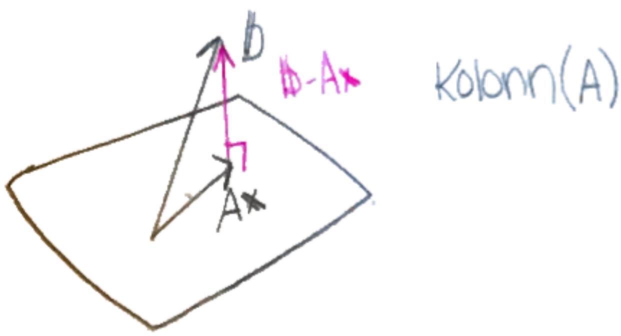
Minsta kvadratmetoden går ut på att hitta $\mathbb{x}$ som minimerar $|A\mathbb{x}-\mathbb{b}|$

i Ex $(*)$ $\Leftarrow$ $\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&1\\2&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}}_{\mathbb{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix}}_{\mathbb{b}}$

Obs: $\mathbb{b}\in\mathbb{R}^m$ (i ex: $\mathbb{b}\in\mathbb{R}^4$)

$A\mathbb{x}\in \text{Kolonn}(A)\leq\mathbb{R}^m$

(i ex span$((0,1,1,2),(1,1,1,1))$
geometriskt plan i $\mathbb{R}^4$)



Obs: att $|\mathbb{b}-A\mathbb{x}|$ minimal om $\mathbb{b}-A\mathbb{x}$ ortogonal mot Kolonn(A), dvs om $A\mathbb{x}$ ortoproj. av $\mathbb{b}$ på Kolonn(A)

Vill hitta $\mathbf{x}$ så att $\mathbf{b}-A\mathbf{x}$ orto. mot kolonn(A) = span$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, dvs
$\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = 0$, dvs

$$\begin{bmatrix} — & \mathbf{a}_1 & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{a}_n & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{b}-A\mathbf{x} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\mathbf{b}\cdot A\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n(\mathbf{b}\cdot A\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs. $A^T(\mathbf{b}-A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$\iff A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$

Vill alltså hitta $\mathbf{x}$ som uppfyller $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$

Denna ekv. kallas <u>normalekvationen</u>.

obs: Om A är inverterbar så ger en lösning till $A^TA\mathbf{x} = A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ en lösn. till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

<u>Proposition</u>

Om $\bar{\mathbf{x}}$ är en lösn. till $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}\ (*)$, så är
$|A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$

<u>Bevis</u>

Tag $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Då $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2 = |\overbrace{(A\mathbf{x} - A\bar{\mathbf{x}})}^{\mathbf{u}} + \overbrace{(A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b})}^{\mathbf{x}}|^2 =$
$= |A\mathbf{x} - A\bar{\mathbf{x}}|^2 + 2(A\mathbf{x} - A\bar{\mathbf{x}})(A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) + |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2 = \dots$

$[(A\mathbf{x} - A\bar{\mathbf{x}})(A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b})] = (A\mathbf{x} - A\bar{\mathbf{x}})^T(A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) =$
$= (A(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))^T(A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x})^T \underbrace{A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b})}_{=0} = 0$

$*$ uppfyller $(*)$

$$\dots = \underbrace{|A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}}|^2}_{\geq 0} + |A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}|^2 \geq |A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}|^2$$

Alltså $|A\mathbb{x} - \mathbb{b}| \geq |A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}|$ $\square$

Ex: *Hitta en minsta kvadratlösning till*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vill alltså lösa $A^T A\mathbb{x} = A^T\mathbb{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Obs: $A^T A$ inv. bar. Kan kolla att

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Alltså

$$\mathbb{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbb{b} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

Detta motsvarar linjen l:

$$y = x + \frac{1}{2}$$

Minsta kvadratmetoden minimerar
$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$

Linjära avbildningar

En fkt $f : X \to Y$ är ($\mathbb{R}$) linjär om

① $f(x + x') = f(x) + f(x')$

② $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alternativt kan sammanfatta
① och ② som
$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$

Ex: vilka av följande funktioner är linjära?

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_1(x) = x + 1$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_2(x) = x^2$

$f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; \mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$

f_1: ej linjär ty $f_1(x + x') = x + x' + 1$
$f_1(x) + f_1(x') = x + 1 + x' + 1 = x + x' + 2$ $\Big\} \neq$

f_2: ej linjär ty $f_2(3x) = (3x)^2 = 9x^2 = 9f_2(x) \neq 3f_2(x)$

f_3: linjär!