Fö 14

Dimsatsen

A $m \times n$

T fås från A genom elementära radoperationer.

(säger $T \Leftrightarrow A$)

T trappformad

$\text{rang}(A) = \#\text{pivot i } T$

$\text{nolldim}(A) = n - \#\text{pivot i } T$

Bevis Lemma!

Antag $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow A' = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1' & \cdots & a_n' \\ | & & | \end{bmatrix}$

Låt $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Då $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ linj. ober.

$\Leftrightarrow a_{i_1}', \ldots, a_{i_k}'$ linj. ober.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i_1 = 1, \; i_2 = 3$

Lemmat säger $a_{i_1} = (1,0,1)$, $a_{i_2} = (1,1,1)$ är linjärt oberoende omm

$a_{i_1}' = (1,0,0)$, $a_{i_2}' = (1,1,0)$

(Lemma 1)

Bevis:

Låt $\tilde{A} = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}$, $\tilde{A}' = \begin{bmatrix} | & & | \\ a'_{i_1} & \dots & a'_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}$

Ex: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Då klart att om A' fås genom elementär radop. på A så fås $\tilde{A}'$ genom (samma) elem. radop. på $\tilde{A}$. dvs.

$(A \Leftrightarrow A') \Rightarrow (\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{A}')$

Nu $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ linjärt ober.

$\Leftrightarrow$ $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast triv. lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{A}'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast triv. lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $a'_{i_1}, \dots, a'_{i_k}$ linjärt oberoende. $\square$

Lemma 2:

Om $A \Leftrightarrow A'$ så $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$

Bevis

$\text{rang}(A) = \max \#$ linjärt oberoende kolonner i $A \overset{\text{Lemma 1}}{=}$

$= \max \#$ linjärt oberoende kolonner i $A' =$

$= \text{rang}(A')$

Bevis av dimsats

Bevis av ①

Betrakta $T =$ 

Antag att # pivot $= r$

Beteckna pivotkolonnen $\pi_1, \dots, \pi_r$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \iff T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{ccc} \pi_1 & & \pi_2 \end{array}$

Ska visa att $\pi_1, \dots, \pi_r$ bas för kolonn (T)

Låt $\tau = \begin{bmatrix} | & & | \\ \pi_1 & \dots & \pi_r \\ | & & | \end{bmatrix}$

$$\tau = \begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: τ pivot i varje kolonn

$\Rightarrow \tau x = 0$ endast triv. lösn.

$\Rightarrow \pi_1, \dots, \pi_r$ linj. ober.

Obs: $\tau x = b$ lösbar för varje b på formen $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \end{bmatrix}$ speciellt för varje kolonn i T. Alltså kolonn(T) = span(π_i)

Alltså: $\pi_1, \dots, \pi_r$ bas för kolonn(T)

$\text{rang}(A) \underset{\text{Lemma 2}}{=} \text{rang}(T) = \dim(\text{kolonn}(T)) =$

$=$ # element i en bas för $T = r =$ # pivot i T

$\square$

Bevis av (2)

$\text{Noll}(A) = \{\mathbf{x},\ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \underset{\substack{\text{element. radop.} \\ \text{förändrar ej} \\ \text{lösn. mängd}}}{=} \{\mathbf{x},\ T\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Noll}(T)$

Minns: $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en parameter för varje fri variabel, dvs en parameter för varje kolonn utan pivot.

$\text{nolldim}(A) = \text{nolldim}(T)$

$\text{nolldim}(T) = \dim(\text{Noll}(T)) =$ # fria variabler $=$

$= n -$ # pivot i T.

$\square$

Basbyte (kap. 2.5, 7.6)

Målet är att lösa uppgifter som

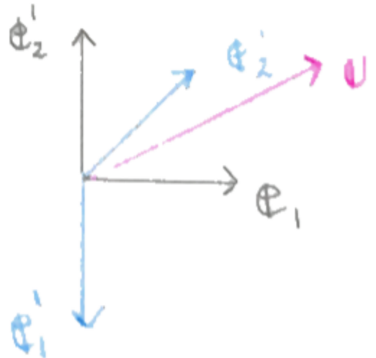
Ex A: Låt e_1, e_2 och e_1', e_2' basen för $\mathbb{R}^2$

Antag: $\begin{cases} e_1' = -e_2 \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases}$

Antag u har koordinat

$(u_1, u_2) = (2, 1)$ i e_1, e_2

Bestäm us koord. i e_1', e_2'



Låt $e_1, \dots, e_n$ och $e_1', \dots, e_n'$ vara två baser för $\mathbb{R}^n$

Låt $s_j = (s_{1j}, \dots, s_{nj})$ vara koordinater för e_j' i basen $\{e_j\}$, dvs

$$\begin{cases} e_1' = s_{11} + e_1 + \dots + s_{n1} e_n \\ e_2' = s_{12} + e_1 + \dots + s_{n2} e_n \\ \vdots \\ e_3' = s_{1n} + e_1 + \dots + s_{nn} e_1 \end{cases}$$

Minns att vektorekv.

$e_j' = s_{1j} e_1 + \dots + s_{nj} e_n$

kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} | \\ \mathbf{e}_j' \\ | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_j}$$

Minns också

$$AB = A \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_p \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Alltså gäller

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{s}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} | & & | \\ E\mathbf{s}_1 & \cdots & E\mathbf{s}_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1' & \cdots & \mathbf{e}_n' \\ | & & | \end{bmatrix}}_{E'}$$

Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{s}_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

kallas basbytematris

Obs: E och E' inverterbara ty kolonnerna baser.
Alltså är $S = E^{-1} \cdot E'$ inverterbar.

Ex A: $\mathbf{s}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{s}_2 = (1, 1)$
(koord. för $\mathbf{e}_1'$ i $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$)

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hur förändras koord. vid basbyte?

Sats (6, s. 137)

Låt $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$, S vara som ovan.
Givet $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, låt $(x_1, \ldots, x_n)$ och $(x_1', \ldots, x_n')$ vara koord. i basen $\{\mathbf{e}_i\}$ resp. $\{\mathbf{e}_j'\}$

Då
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Anm:
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bevis

Vi har

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = x_1' \mathbf{e}_1' + \ldots + x_n' \mathbf{e}_n' = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1' & \cdots & \mathbf{e}_n' \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = E' \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} =$$

minns från ovan

$$= ES \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Alltså
$$E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = ES \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Mult. från vänster med E^{-1}. Då får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$\square$

Ex A:

Påstående $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Verifiera detta!

Minns: $\mathbf{u}$ hade koord. $(2,1)$ i $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

Sats: $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}$