

Alltså är  $A$  inverterbar med invers  $H$ .



### Fö 13

Sats  $A$   $n \times n$

Då  $Ax = b$  lösbar  $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow A$  inverterbar

### Bevis

( $\Leftarrow$  Torslags:  $x = A^{-1}b$ )

Återstår  $\Rightarrow$ :

Minns: (del av) Prop A

$A$   $m \times n$ :  $Ax = b$  lösbar  $\forall b \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow A$  högerinvers

(del av) Prop B:

$A$   $n \times n$ :  $A$  högerinvers

$\Rightarrow A$  inverterbar

Bevis  $\Rightarrow$

$Ax = b$  lösbar  $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A$  högerinvers

$\xrightarrow{\text{prop A}} \xrightarrow{\text{prop B}} A$  inverterbar



Beräkna  $A^{-1}$ :

Antag  $A$   $n \times n$

Betrakta ekv.syst.  $Ax = y$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$

Lös med Gausselimination

- Om lösn. saknas för allmänt, så  $A$  ej inverterbar

- Annars får lösningen  $x = A^{-1}y$

**Ex** Är  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  inverterbar?

Bestäm i så fall  $A^{-1}$ !

Vill lösa  $Ax = y = Iy$ , dvs

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} -3 \\ \leftarrow \end{array}$$

matrisform

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A | I]$$

koeff. framför  $x_i$       koeff. framför  $y_j$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -2x_2 = -3y_1 \end{cases} \quad \leftarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ -2x_2 = -3y_1 + y_2 \quad \cdot -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

### Slutsats

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \neq$$

Alltså är  $A$  inverterbar och  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**Ex:** Är  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  inverterbar?

Bestäm i så fall  $A^{-1}$ !

$$[A | I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad - \text{ ej lösbart för godtyckligt } y!$$

endast lösbart om  $y_2 = 0$ , dvs

$Ax = y$  ej lösbart  $\forall y \in \mathbb{R}^n$ , dvs

$A$  ej inverterbar

Allmänt: skriv  $Ax = y$  som

$$[A | I] = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right]$$

Använd elementära radoperationer

$$\rightsquigarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{array} \right] = [I | A^{-1}]$$

- om ej lyckades  $\rightarrow A$  ej inverterbar
- annars:  $A$  inverterbar och  $A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$

## Kolonn- och kolonnrum (kap 7.7)

- lösningar till  $Ax = b$

Låt  $A$   $m \times n$ ,  $b$   $m \times 1$

Ekvat.syst.  $Ax = b$  ( $x = n \times 1$ )

sägs vara  $\begin{cases} \text{homogent om } b = 0 \\ \text{inhomogent om } b \neq 0 \end{cases}$

Hur många lösningar har  $Ax = b$ ?

Inhomogent: inga

Homogent: Alltid lösbart, den triviala lösn.  $x = 0$   
alltid lösning. 1 lösn. /  $\infty$  lösn.

Hur ser lösn till  $Ax = b$  ut?

Ex. A: Minns allmänna lösningen till  $Ax = b$  är på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + \dots + s_k \begin{bmatrix} v_{k1} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix}$$

dvs  $x = x_p + s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$

där  $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$  parametern

- $v_1, \dots, v_k$  linjärt oberoende
- $x_p$  kallas partikulär lösning

Sätt  $s_1 = \dots = s_k = 0$

Då  $x = x_p$ . Alltså är  $x_p$  en lösning till  $Ax = b$

Obs:  $x - x_p$  lösning till homogena ekv. syst.

$$A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$$

Sats (8, s. 141)

Låt  $x_p$  vara en lösning till  $Ax = b$

Då  $x$  lösning till  $Ax = b$

$\Leftrightarrow x$  är på formen  $x = x_p + x_n$  där  $Ax_n = 0$

Bevis: zwn.

Obs: 1 ex. A:

$$x_n = s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$$

Def: Mängden av alla lösningar till  $Ax = 0$  kallas A's nollrum (eller kärnan till A (engelska kernel)), betecknas Noll(A) ( $\text{Ker}(A)$ )

Obs:  $\text{Noll}(A) \leq \mathbb{R}^n$

i Ex. A:  $\text{Noll}(A) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$

## Geometri ex:



$\text{spann}(v_1, v_2)$

$\rightsquigarrow \text{Noll}(A)$

Ex. B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Bestäm Noll}(B)$$

För att göra det lös  $Bx = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{0}_0$$

dvs.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

har lös.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s_1 \\ x_4 = s_2 \end{cases}$$

$$x = s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Alltså Noll(B) = { l s n. till  $Bx = 0$  } =

$$= \left\{ s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \underline{\text{span}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))} = (x_3, x_4 \text{ planet i } \mathbb{R}^n)$$

En delm nga till  $\mathbb{R}^n$  p  den h r formen  
( $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ ) kallas underrum (eller delrum)  
(engelska subspace) till  $\mathbb{R}^n$ .

Dimensionen av ett underrum  r max #  
linj rt beroende vektorer.

Dimensionen av  $\text{Noll}(A)$  kallas nolldimensionen av  
A, betecknas nolldim(A).

Ex A:  $\text{Noll}(A) = \text{span}(\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{linj. obero.}})$   
 $\text{nolldim}(A) = k$

Ex B:  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{\text{nolldim } B} = \dim(\text{span}(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) = 2$$

För vilka  $b$  är  $Ax = b$  lösbart?

Minns:  $Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \end{bmatrix}$

Alltså  $Ax = b$  lösbart om och endast om  $b$  är på formen

$$b = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, \text{ dvs}$$

$b$  linjärkomb. av  $a_1, \dots, a_n$ , dvs

$$b \in \text{span}(a_1, \dots, a_n)$$

### Definition

- $\text{span}(a_1, \dots, a_n)$  kallas  $A$ 's kolonnrum, betecknas  $\text{Kolonn}(A)$
- $\dim(\text{Kolonn}(A))$  kallas rang, betecknas  $\text{rang}(A)$

Obs:  $\text{Kolonn}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq \text{rang}(A) \leq m, n$

$$\text{Kolonn}(B) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$\text{rang}(B) = 2$  (ty 2 st linjärt ober. vektorer)

### Dimensionssatsen

$A$   $m \times n$ -matris

element. radop.  $\longrightarrow$   $T$  trappformat

Då

1)  $\text{rang}(A) = \# \text{ pivot i } T$

2)  $\text{noll} \dim(A) = \text{kolonn i } A - \# \text{ pivot i } T$