

Ex 12

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$$

$$\text{om } A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

När är LGS $Ax = b$ lösbara? A $m \times n$

$$\text{dät } A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_n \Bigg\}^m$$

Obs 1: $Ax = b$ lösbart för alla $b \in \mathbb{R}^m$

$$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n \text{ spänner upp } \mathbb{R}^m$$

Obs 2: $Ax = 0$ har endast den triviala lösn. $x = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0 \text{ har endast trivial lösning}$$

$$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n \text{ linjärt oberoende}$$

Detta ger oss en omformulering av satsen.

Sats (s 127, huvudsatsen)

Låt A vara $m \times m$ -matris.

Då $Ax = 0$ har endast triv. lösn $x = 0$

$$\Leftrightarrow Ax = b \text{ lösbart } \forall b \in \mathbb{R}^m$$

$$\Leftrightarrow A\text{'s kolonner } a_1, \dots, a_m \text{ bas för } \mathbb{R}^m$$

$$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_m \text{ spänner upp } \mathbb{R}^m \quad \text{Obs 1!}$$

$$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_m \text{ linjärt oberoende.} \quad \text{Obs 2:}$$

Bevis: satsen

~~Exempel~~

Att lösa $Ax = b$ - matrisinvers

- Om har $ax = b$, $a \neq 0$

så är lös. $x = \frac{b}{a}$

- För att lösa $Ax = b$ vill "dela med" A

$$x = \left(\frac{1}{A} \right) b$$

$\frac{1}{A}$ = invers till A

Definition:

En kvadratisk matris A sägs vara inverterbar om det finns en matris B så att

$$AB = BA = I$$

B sägs vara (multiplikativ) invers till A ,
betecknas A^{-1}

Obs: om A är typ $n \times n$ så är A^{-1} av typ $n \times n$

Ex: Är $A = [7]$ inverterbar? Bestäm ist inversen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- A : A^{-1} = \left[\frac{1}{7} \right]$$

B: $B^{-1} = B$, ty $BB = I \cdot I = I$

C: ej inv. bar. För att se det; antag $\exists C^{-1}$
 Då är $C^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ för några $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Nu $C \cdot C^{-1} = I$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: på plats 2,2 har ekv. $0=1$
 alltså lösning saknas

Alltså C ej invert. bar

Påstående (lemma 2, s. 129)

Om A har en invers, så är den entydigt bestämd.

Bevis

Antag B och B' är invers till A

$$\text{Då } B = BI = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'$$

$\uparrow$ $I = AB'$ $\uparrow$ matrismult. associativ
ty B' invers till A

Alltså inversen till A entydigt bestämd.



Sats (4, s. 130)

Om A, B inverterbara, så är A^{-1} , A^T , AB inverterbara.

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis (iii)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

på samma sätt $(B^{-1}A^{-1})AB = I$

Alltså är $B^{-1}A^{-1}$ är AB 's invers



Invers och L&S

Sats ^(Anxn): $Ax = b$ lösbar alla $b \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow A$ inverterbar

Bevis:

$\Leftarrow$ Om A inverterbar så har $Ax = b$ lösningen
 $[x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b]$

□

För beviset av $\Rightarrow$, behöver

Vänster- och högerinvers

Def: A typ $m \times n$

V vänsterinvers till A om $VA = I$

H högerinvers till A om $HA = I$

? Var har V och H för typ?

V typ $n \times m$

H typ $n \times m$

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$VA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad VA = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

Obs: Vänster- och högerinvers ej unik i allmänhet.

$$H = \mathbb{Z} \quad \text{Antag } H = [a \ b \ c]$$

$$AH = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [a \ b \ c] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\parallel I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ekv. ej lösbar}$$

Alltså högerinvers saknas!

Proposition: (Lemma 3, s. 132)

A $m \times n$

① A har vänsterinvers

$\Rightarrow A x = 0$ har endast lösn. $x = 0$

② $A x = b$ lösbar $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A$ har högerinvers

Bevis ①

Multiplitera ekv. $A x = 0$ med vänsterinversen V .

$$\text{Då } \underbrace{V A}_{= I} x = V 0 [= 0]$$

Bevis ②

Behöver följande OBS:

A $m \times n$ B $n \times p$

$$AB = \begin{bmatrix} \text{---} \alpha_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \alpha_m \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_p \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 b_1 & \dots & \alpha_1 b_p \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_m b_1 & \dots & \alpha_m b_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 b_1 \\ \vdots \\ \alpha_m b_1 \end{bmatrix} = A b_1 = \begin{bmatrix} \text{---} \alpha_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \alpha_m \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ b_1 \\ | \end{bmatrix}$$

→ Beviset

Antag $Ax = b$ lösbar för alla $b \in \mathbb{R}^m$

låt $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ ← plats i

lös $Ax = e_i$, $i = 1, \dots, m$ (dvs $Ah_i = e_i$)

Kalla lösn. h_i

Låt

$$H = \begin{bmatrix} | & & | \\ h_1 & \dots & h_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Nu } AH = \begin{bmatrix} | & & | \\ Ah_1 & \dots & Ah_m \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ e_1 & \dots & e_m \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

obs ↗

Alltså A har en högerinvers.



Proposition

Antag att A $n \times n$

① A har vänsterinvers V

$\Rightarrow A$ inverterbar

$$A^{-1} = V$$

② A har högerinvers H

$\Rightarrow A$ inverterbar

$$A^{-1} = H$$

Bevis

① Antag A har vänsterinvers V

Då ger tidigare proposition att $Ax = 0$
har endast lösning $x = 0$

$\Leftrightarrow Ax = b$ lösbart alla $b \in \mathbb{R}^n$

↑
basen
matrisform

$\Rightarrow A$ har högerinvers H

↑
tidigare
prop.

Obs: $[V = VI = V(AH) = (VA)H = IH = H]$

Alltså $VA = I$ och $AH = AV$

Alltså V invers till A

② Antag nu att A har högerinvers H .

Då $AH = I$

Detta kan ses som att A är en vänsterinvers till H .

Enligt ① är H inverterbar och $H^{-1} = A$,

dvs $AH = HA = I$

Alltså är A inverterbar med invers H .

□

Fö 13

Sats A $n \times n$

Då $Ax = b$ lösbar $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow A$ inverterbar

Bevis

($\Leftarrow$ Torsdags: $A^{-1}b$)

Återstår $\Rightarrow$:

Minns: (del av) Prop. A

A $m \times n$: $Ax = b$ lösbar $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A$ högerinvers

(del av) Prop. B:

A $n \times n$: A högerinvers

$\Rightarrow A$ inverterbar

Bevis $\Rightarrow$

$Ax = b$ lösbar $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A$ högerinvers

$\Rightarrow A$ inverterbar

$\uparrow$
 prop A
 $\uparrow$
 prop B

□