Fö 11

Multiplikation

Om A typ $m \times n$ med radien

$\alpha_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$

och B typ $n \times p$ med kolonner

$b_k = (b_{1k}, \dots, b_{pk})$

Så definieras produkten AB som

$$AB = \begin{bmatrix} - & \alpha_1 & - \\ - & \alpha_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot b_1 & \alpha_1 b_2 & \dots & \alpha_1 \cdot b_p \\ \alpha_2 b_1 & \alpha_3 b_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ \alpha_m b_1 & & \dots & \alpha_m b_p \end{bmatrix}$$

dvs element $(AB)_{jk} \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk}$

rad j

kolonn k

Obs: AB är av typ $m \times p$

rader # kolonner

Ex:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Vilka matriser kan adderas?

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

• Terminologi: C kallas för nollmatrisen av typ 2×3, betecknas $\mathbb{0}$. Obs: $A + \mathbb{0} = A$

$$B + E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

• Terminologi: En matris av typ $n \times n$ kallas kvadratisk.

$A + A$, $D + D$, etc. för addition krävs samma typ.

– Vilka matriser kan multipliceras?

$B \cdot B$, $D \cdot D$, $E \cdot E$

$$B \cdot E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$EB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs: $BE \neq EB$, Matrismultiplikation är ej kommutativ: i allmänhet $AB \neq BA$

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = A$$

• Terminologi: En kvadratisk matris på formen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ kallas enhetsmatris (av typ $n \times n$), betecknas I.

Obs: $AI = A$

(moraliskt. I "etta" vid matrismult.

I vårt ex: $D \cdot A \overset{?}{=}$ ej def.

$$\underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}}$$

Räknelagar för matriser (kap. 7.2)

Sats (1, s. 120-121)

- Addition:

(i) $B + A = A + B$ (kommutativitet)

(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativitet)

(iii) $A + \mathbb{0} = A$

- Multiplikation:

(iv) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$

(v) $1 \cdot A = A$

(vi) $0 \cdot A = \mathbb{0}$

(vii) $\lambda \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$

(viii) $A + (-1)A = \mathbb{0}$

(ix) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(x) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

(distributivitet)

- Matrismult:

(xi) $(AB)C = A(BC)$ (associativitet)

(xii) $(A+B)C = AC + BC$

(xiii) $A(B+C) = AB + AC$ (distributivitet)

(xiv) $IA = AI = A$

(xv) $0A = A0 = 0$

Underförstått att alla matriser här har typ så att add. och mult. är definierade.

Obs: $AB \neq BA$ i allmänhet

Bevis

använd def av addition och multiplikation (med skalär) + motsvarande räknelagar för reella tal ovn.

Bevis av (xi): Visa att $(AB)C = A(BC)$

Obs: om produkterna är def. så är A, B, C vara av typ $m \times p$, $p \times q$, resp $q \times n$, för några $m, p, q, n \in \mathbb{N}$

$$((AB)C)_{ij} \underset{\text{def }(AB)C}{=} \sum_{k=1}^{q} \boxed{(AB)_{ik}}\, c_{kj} \underset{\text{def }AB}{=} \sum_{k=1}^{q} \boxed{\left(\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk}\right)} c_{kj} =$$

ändliga summor, ordn. spelar ingen roll

$$= \sum_{l=1}^{p} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{lk} c_{kj}\right) \underset{\text{def }BC}{=} \sum_{l=1}^{p} a_{il} (BC)_{lj} \underset{\text{def }A(BC)}{=} (A(BC))_{ij} \quad \square$$

Transponat

Def: Transponat av $(m \times n)$-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — & \alpha_1 & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha_m & — \end{bmatrix}$$ är

$n \times m$-matrisen

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Moraliskt: rader blir kolonner och vice versa

Om $A^T = A$ sägs A vara symmetrisk.

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

kallas radvektor

kallas kolonnvektor

Ex: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ symmetrisk

Sats (2, s. 124)

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis: Övn

Ex: Visa att A^TA är symmetrisk!

$$(A^TA)^T \underset{(iv)}{=} A^T(A^T)^T \underset{(i)}{=} A^TA$$

Alltså $(A^TA)^T = A^TA$

Alltså A^TA symmetrisk.

Matriser och linjära ekvationssystem (kap 7.4)

Påstående: Följande är ekvivalenta sätt att beskriva ett linjärt ekvationssystem

Ekv. System:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Vektorekvation:

(**) $x_1 \mathbb{a}_1 + \ldots + x_n \mathbb{a}_n = \mathbb{b}$

där $\mathbb{a}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$

A's kolonner, $\mathbb{b} = (b_1, \ldots, b_m)$

Matrisekvationer: $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ldots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (***)$$

Bevis (*) ⟺ (***)

$$A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}^{A\mathbb{x}}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbb{b}$$

Varje matriselement motsvarar en ekv. i (*)

(**) ⟺ (***)

Obs: $A\mathbb{x} = x_1 \mathbb{a}_1 + x_2 \mathbb{a}_2 + \ldots + x_n \mathbb{a}_n$

om identifierar $\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ etc.

Alltså $\underbrace{A\mathbb{x} = \mathbb{b}}_{(***)} \iff \underbrace{x_1 \mathbb{a}_1 + \ldots + x_n \mathbb{a}_n = \mathbb{b}}_{(**)}$