Fö 10

Bassatsen (Sats 3, s.10) (för geom. vektorer sats 4, s 35)

① a) Det finns högst n st linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$

b) Det behövs åtminstone n st vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$

c) Varje bas i $\mathbb{R}^n$ har exakt n st vektorer

② $a_1, \dots, a_n$ bas $\Longleftrightarrow$
$a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende $\Longleftrightarrow$
$a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

Obs: Viktigt att ha n st vektorer i del 2

Def: antalet baselement i $\mathbb{R}^n$ (vektorrummet) kallas dimensionen av $\mathbb{R}^n$ (vektorrummet)

Bassatsen säger att dimensionen av $\mathbb{R}^n$ är n

Bevis (kap 6.3)

Antag $x_1 a_1 = x_1(a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n})$

$\vdots$

$x_k a_k = x_k(a_{k1}, \dots, a_{kj}, \dots, a_{kn})$

$\vdots$

$x_p a_p = x_p(a_{p1}, \dots, a_{pj}, \dots, a_{pn})$

$b = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)$

och betrakta vektorekv.

$$x_1 a_1 + \dots + x_k a_k + \dots + x_p a_p = b \qquad (*)$$

Observera att $(*) \Leftrightarrow$ ekvationssystemet

$$\boxed{a_{11} x_1 + \dots + a_{k1} x_k + \dots + a_{p1} x_p = b_1}$$

$$\vdots$$

$$a_{1j} x_1 + \dots + a_{kj} x_k + \dots + a_{pj} x_p = b_j \qquad (**)$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} x_1 + \dots + a_{kn} x_k + \dots + a_{pn} x_p = b_n$$

- n ekvation – en ekvation per "plats" i vektorerna
- p variabler – en variabel per vektor a_j

Ex: $a_1 = (1,0)$, $a_2 = (2,3)$, $b = (0,4)$

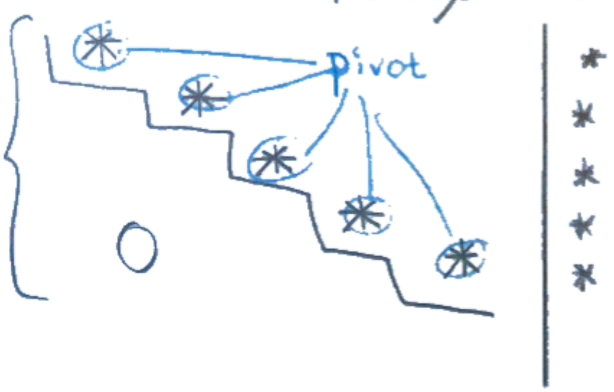
$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = b \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow x_1(1,0) + x_2(2,3) = (0,4) \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \quad\;\; 3x_2 = 4 \end{cases}$$

Använd elementära radoperationer:

$(**) \Leftrightarrow$



trappformat $(***)$

Obs1: högst ett pivotelement per rad
$\Rightarrow$ # pivot $\leq n$ # rader

högst ett pivot per kolonn
$\Rightarrow$ # pivot $\leq p$ # kolonner

Bevis 1b:

Obs 2: [$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$]

$\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$

$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ linjärkomb. av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$

$\Longleftrightarrow$

(*) lösbar för alla $\mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$

(***) lösbart för alla högerled

$\Longleftrightarrow$

pivotelement i varje rad i (***)

$\Longleftrightarrow$

[# pivot = # rader = n]

$\Rightarrow$ (OBS1 # pivot $\leq p$) $\underline{n \leq p}$

dvs om $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ så är $p \geq n$, dvs det behövs åtminstone n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$,
dvs 1b)

$\square$

Bevis 1a:

Obs 3: [$a_1, \dots, a_p$ linjärt oberoende]

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(*) med $b = 0$ har endast lösn. $x_1 = \dots = x_p = 0$

$\Longleftrightarrow$

(***) med högerled 0 har endast lösn. $x_1 = \dots = x_p = 0$

$\Longleftrightarrow$

pivotelement i varje kolonn i (***)

$\Longleftrightarrow$

[# pivot
kolonn $= p$]

$\Longrightarrow$ (obs 1: # pivot $\leq n$) $p \leq n$

dvs om $a_1, \dots, a_p$ linjärt oberoende så är $p \leq n$
dvs påstående 1a

$\square$

Bevis 1c:

Obs: $a_1, \dots, a_p$ bas

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$a_1, \dots, a_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och $\Longrightarrow$ $p \geq n$ (OBS 2)
$a_1, \dots, a_p$ linjärt oberoende $\Longrightarrow$ $p \leq n$ (OBS 3)

Alltså om $a_1, \dots, a_p$ bas så är $p = n$, dvs 1c)

$\square$

② : Antag $p = n$

Obs 4 : $a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

$\overset{\text{obs 2}}{\Longleftrightarrow}$

pivotelement i varje rad i (***)

$\overset{\text{obs 2}}{\Longleftrightarrow}$

\# pivot $= n$

$\overset{p=n}{\Longleftrightarrow}$

\# pivot $= p$

$\overset{\text{obs 3}}{\Longleftrightarrow}$

pivot i varje kolonn i (***)

$\overset{\text{obs 3}}{\Longleftrightarrow}$

$a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende

Slutsats:

[$a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$]

$\overset{\text{obs 4}}{\Longleftrightarrow}$

[$a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende]

$\Longleftrightarrow$

$a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och linjärt ober.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

[$a_1, \dots, a_n$ bas]

$\square$

Matriser (kap. 7)

Anm. • koefficienterna i ett linjärt ekvationssystem kan ses som en matris.

• matriser kan ses som funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ (linjära avbildningen kap. 8)

Definition

En (reell) matris är ett rektangulärt schema av (reella) tal a_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}$$

• A är av typ $m \times n$, där
$n = \#$ kolonner
$m = \#$ rader

• a_{ij} matriselement på plats:
rad i
kolonn j

Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ typ 2×3 ; $a_{22} = 1$, $a_{13} = 3$

Räkneoperationer

- **Addition** om $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ har samma typ $m \times n$ så definieras

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Multiplikation** med λ (skalär): $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{m1} & \dots & & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$