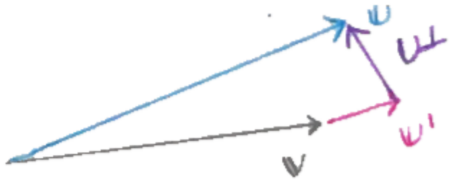
Fö 9

Ortogonal projektion

Minns: $v \neq 0$ givet

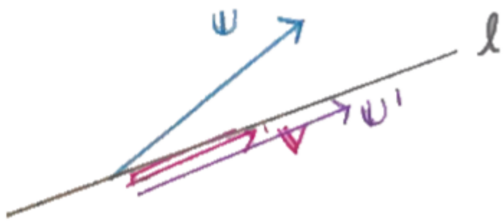
Då finns det en unik uppdelning av $u = u' + u^{\perp}$



u' parallell m v ortogonal proj. av u på v

$u^{\perp}$ ortogonal mot v

Den ortogonala proj. av u på linjen $l: P + tv$
def. som orto. proj. på v.



Ortogonal proj. på Π

Sats/def: Givet plan Π och $u \in \mathbb{R}^3$ $\exists!$
Uppdelning

$u = u' + u^{\perp}$

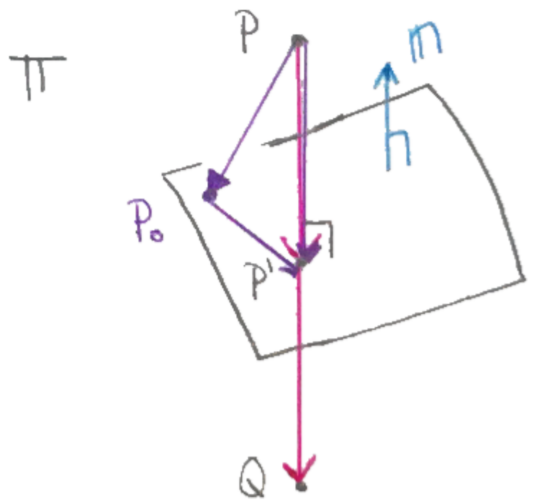
u' – parallell med Π

$u^{\perp}$ – vinkelrät mot Π

- u' kallas ortogonal projektion på Π
- $u^{\perp}$ ges som ortogonal projektion av u på n.

Bevis: övning

Ortogonal projektion av punkter och spegling



Givet plan Π och punkt P, $P' \in \Pi$ så att $\overrightarrow{PP'} \perp \Pi$

- P' ortogonala proj. av P
- $Q = P + 2\overrightarrow{PP'}$ speglingen av P i Π

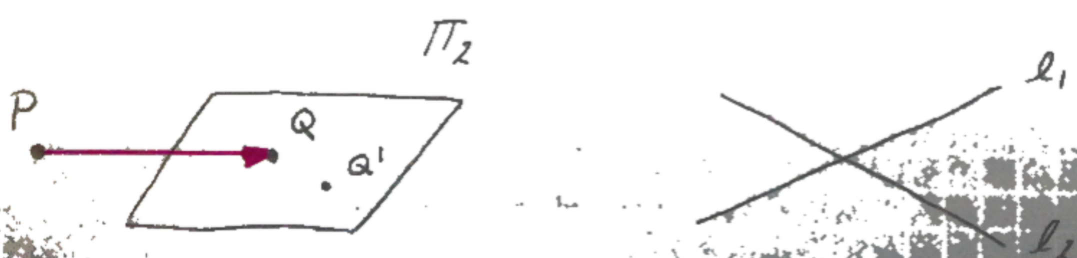
Hitta P': Tag godtycklig $P_0 \in \Pi$

Då är $\overrightarrow{PP'}$ = ortogonala proj. av $\overrightarrow{PP_0}$ på $\mathbf{n}$

På samma sätt

Avstånd

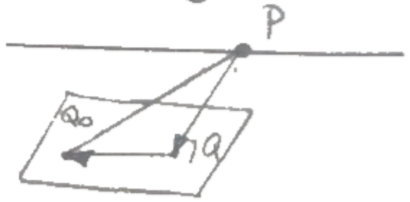
Avstånd mellan $P/\ell_1/\Pi_1$ och $Q/\ell_2/\Pi_2$ = kortaste avståndet mellan $P/P\in\ell_1/P\in\Pi_1$ och $Q/Q\in\ell_2/\Pi\in\Pi_2$



Påstående: Minsta avstånd erhålls om $\vec{PQ}$ är ortogonal mot l_1/Π_1 och l_2/Π_2

Bevis (övning)

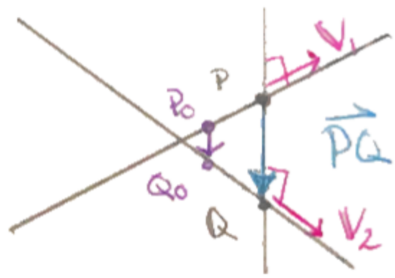
Idé



$\vec{PQ_0} = \vec{PQ} + \vec{QQ_0}$

Visa $|\vec{PQ_0}| \geq |\vec{PQ}|$

Ex: Beräkna avståndet mellan



$l_1 : t(1,0,0) = tv_1$

$l_2 : (3,4,5) + s(0,1,1) = P + sv$

Vill beskriva de vektorer som är $\perp$ mot l_1, l_2

Låt $v = v_1 \times v_2 = (1,0,0) \times (0,1,1) = \ldots = (0,-1,1)$

Då $v \perp v_1$ och $v \perp v_2$

Alltså alla vektorer $\perp$ l_1 och l_2 är på formen λv

Hitta $\vec{PQ}$:

Tag $P_0 \in l_1$, $Q_0 \in l_2$

$\vec{PQ}$ är nu orto. prg. av $\vec{P_0Q_0}$ på v

Välj $P_0 = (0,0,0) \in l_1$, $Q_0 = (3,4,5) \in l_2$

$\overrightarrow{P_0Q_0} = (3, 4, 5)$

Avståndet $(l_1, l_2) = \left| \begin{matrix}\text{ortogolal projektion} \\ \text{av } \overrightarrow{P_0Q_0} \text{ på } v\end{matrix} \right| =$

$$= \left| \frac{\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot v}{|v|^2} \cdot v \right| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot v|}{|v|^2} \cdot |v| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot v|}{|v|} =$$

$$= \frac{|(3, 4, 5)(0, -1, 1)|}{\sqrt{|(0, -1, 1)(0, -1, 1)|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\mathbb{R}^n$ (kap 6)

Def:

- $\mathbb{R}^n$ är mängden av alla $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ där $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
- $a = (a_1, \ldots, a_n)$ kallas vektor

På $\mathbb{R}^n$ har vi olika räkneoperationer

- addition def genom
  $a + b = (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$
- mult. med skalär $\lambda \in \mathbb{R}$
  $\lambda a = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$

Ex: Låt $\mathbb{a} = (1, 1, 1, 1)$ $\mathbb{b} = (1, -2, 3, -4)$
$(\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n)$

$2\mathbb{a} - \mathbb{b} = 2(1, 1, 1, 1) - (1, -2, 3, -4) = (1, 4, -1, 6)$

OBS: För $n = 1, 2, 3$ låter
$M_n = \{$Geometriska vektorer dim. $n\}$

Välj en ON-bas $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ för M_n
Vi kan nu identifiera $\mathbb{u} = u_1\mathbb{e}_1 + \ldots + u_n\mathbb{e}_n \in M_n$
med vektorn $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$
Alltså $M_n \cong \mathbb{R}^n$ (kan identifiera M_n med $\mathbb{R}^n$)

Sats (1, s. 98)
Räknelagarna för $\mathbb{R}^n$ är de samma som för geometriska vektorer.

Ex: Visa att vektoraddition är kommuntativ, dvs $\mathbb{b} + \mathbb{a} = \mathbb{a} + \mathbb{b}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{b} + \mathbb{a} = (b_1 + a_1, \ldots, b_n + a_n) \\ \mathbb{a} + \mathbb{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \end{array}\right\} \text{ ty } b_1 + a_1 = a_1 + b_1$$

Baser: Definitioner/notation
- $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkomb. av $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_p \in \mathbb{R}^n$
om $\exists\ x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ så $\mathbb{b} = x_1\mathbb{a}_1 + \ldots + x_p\mathbb{a}_p$
- spann $(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_p) = \{$linjärkomb av $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_p\}$

- $a_1, \dots, a_p$ spänner upp $\text{spann}(a_1, \dots, a_p)$
- a_1, a_p linjärt beroende om $x_1 a_1 + \dots + x_p a_p = 0$ endast har lösningen $x_1 = \dots = x_p = 0$
- $a_1, \dots, a_p$ bas för $\mathbb{R}^n$ om spänner upp $\mathbb{R}^n$ och linjärt oberoende
- om $a_1, \dots, a_p$ bas för $\mathbb{R}^n$ och $b = b_1 a_1 + \dots + b_p a_p$ så kallas $(b_1, \dots, b_p)$ koordinater (liksom för geometriska vektorer entydligt bestämda)

Sats (2, s. 100)

$p \geq 2$

$a_1, \dots, a_p$ linjärt beroende $\Longleftrightarrow$ någon a_j linjärkomb av de andra.

Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$

u, v geometriskt vektor

$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ koordinater i ON-bas

Def: Skalärprodukten $a \cdot b$ av

$a = (a_1, \dots, a_n)$ och

$b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

def som

$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

- a och b är ortogonala $a \perp b$ om $a \cdot b = 0$
- Längden av a def som $|a| = \sqrt{a \cdot a}$

- $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ON-bas om

$$e_i \cdot e_k = \begin{cases} 1 \text{ om } i = k \\ 0 \text{ om } i \neq k \end{cases}$$

Sats (4, s. 108)

För $a \cdot b$ gäller samma räkneregler som för geometriska vektorer.