$\mathbb{n}$ kallas vektorprodukt (eller kryssprodukt) av $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$, betecknas $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$

- Om $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$ linjärt beroende så def. $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ som $\mathbb{0}$

Fö 8

$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = \mathbb{0}$, om $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ linj. beroende

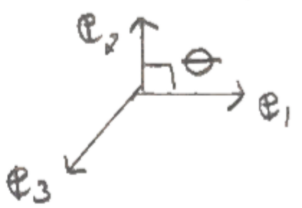
Annars $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ den unika vektor

- som är ortogonal mot $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$
- uppfyller $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{u} \times \mathbb{v}$ - positivt orient.
- $|\mathbb{u} \times \mathbb{v}| = |\mathbb{u}||\mathbb{v}| \sin\theta$ = area ($\mathbb{v}$ $\mathbb{u}$)

Obs:

$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = \mathbb{0}$ om $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ parallella

Ex: Antag att $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$ högerorienterad ON-bas (HON-bas)



Då $\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 =$
$$\begin{cases} \cdot \text{ ortogonal mot } \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2 \\ \Rightarrow \mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \lambda \mathbb{e}_3 \\ \cdot\ \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 \text{ pos. orient.} \\ \Rightarrow \lambda \geq 0 \\ \cdot\ |\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2| = \underbrace{|\mathbb{e}_1|}_{1}\underbrace{|\mathbb{e}_2|}_{1}\underbrace{\sin\theta}_{1} = 1 \\ \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Slutsats:

$\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3$

På samma sätt

$e_1 \times e_3 = -e_2$

$e_2 \times e_3 = e_1$

osv.

<u>Sats/definition</u> (sats 2, s. 86) (rad 3 i tabell)

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} =$

volym () om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ pos. orient

−volym () om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ neg. orient

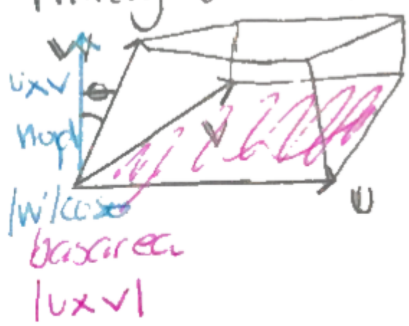
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ kallas <u>skalär tyngdprodukt</u>

<u>Anm:</u> $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$

Följd: $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt beroende. (ligger i ett plan)

<u>Bevisidé</u>

Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ pos. orient.



Volym = basarea · höjd =

$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta =$

$= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

vinkel mellan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$

Rita en liknande figur när $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ neg. orient.

$\square$

Räkneregler x-produkt (sats 4, s. 87)

(i) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ - antikommutativitet

(ii) $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}$

(iii) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(i) + (ii) $\Rightarrow$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2$

(i) + (iii) $\Rightarrow$ $\mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

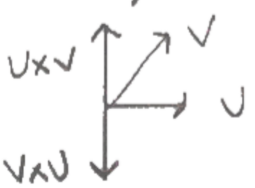
Ex: $\underbrace{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}_{= \mathbf{e}_3} \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$

$\mathbf{e}_1 \times \underbrace{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2)}_{=0} = \mathbf{0}$

Slutsats: x-prod. ej associativ,
dvs $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ i allmänhet

Bevis

(i) byte av ordning byter orientering.



$\Rightarrow$ $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(iii) följer från def. Övning

Bevis (ii)

För beviset behövs Lemma (2, s. 87):

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Då $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \ \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow \ \mathbf{u} = \mathbf{v}$

Bevis

$\Longleftarrow$: klart att om $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \ \forall \mathbf{w}$

$\Longrightarrow$: Antag $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \ \forall \mathbf{w}$

$\Longleftrightarrow \ (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0, \ \forall \mathbf{w}$

- Att detta gäller $\forall \mathbf{w}$, medför att det speciellt gäller för $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$

$\Longrightarrow \ (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$

$\Longleftrightarrow \ |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \ |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 0$

$\Longleftrightarrow \ \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$\Longleftrightarrow \ \mathbf{u} = \mathbf{v}$

$\square$

Bevis (av (ii))

Låt $\mathbb{W} \in \mathbb{R}$ vara godt. vektor

Betrakta:

$[(\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2) \times \mathbb{V}] \cdot \mathbb{W} = (\mathbb{V} \times \mathbb{W})(\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2) =$ Skalärprodukt distributiv $=$

OBS: Om vi har $(\mathbb{U} \times \mathbb{V}) \cdot \mathbb{W} = (\mathbb{V} \times \mathbb{W})\mathbb{U}$ ty $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ spänner samma parallellepiped som $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$ och $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ samma orient. som $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$

$= (\mathbb{V} \times \mathbb{W}) \cdot \mathbb{U}_1 + (\mathbb{V} \times \mathbb{W}) \cdot \mathbb{U}_2 \overset{\text{OBS}}{=} (\mathbb{U}_1 \times \mathbb{V}) \cdot \mathbb{W} + (\mathbb{U}_2 \times \mathbb{V})\mathbb{W} =$ Skalärprod. distributiv

$= [\mathbb{U}_1 \times \mathbb{V} + \mathbb{U}_2 \mathbb{V}]\mathbb{W}$

Eftersom $\mathbb{W}$ var godtycklig (gäller detta för alla $\mathbb{W}$) ger lemmat att

$(\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2) \times \mathbb{V} = \mathbb{U}_1 \times \mathbb{V} + \mathbb{U}_2 \times \mathbb{V}$ $\square$

$u \times v$ i ON-bas

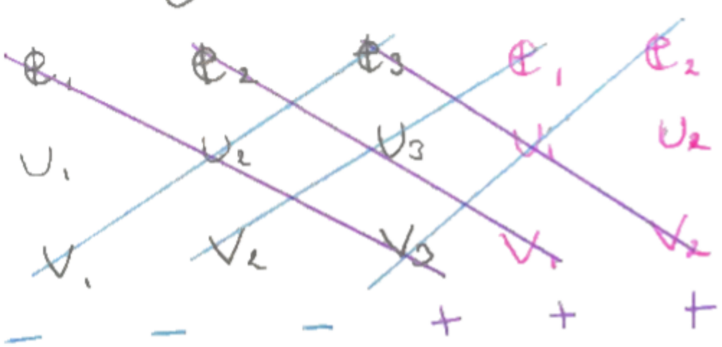
Sats (5, s. 89)

$u, v \in \mathbb{R}^3$ har koordinater $u = (u_1, u_2, u_3)$,
$v = (v_1, v_2, v_3)$
~ HON-basen e_1, e_2, e_3 (e_1, e_2, e_3 pos. orient ON-bas)

Då

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Minnesregel: (Sarrus regel)



$$u \times v = u_2 v_3 e_1 + u_3 v_1 e_2 + u_1 v_2 e_3 - u_2 v_1 e_3 - u_3 v_2 e_1$$
$$- u_1 v_3 e_2$$

Bevis (övning)

$$u \times v = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i e_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} v_j e_j\right) = u_1 v_1 \underbrace{e_1 \times e_1}_{0} + u_1 v_2 \underbrace{e_1 \times e_2}_{e_3} +$$

+ 7 termer till!

... övning!

Ex: $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}: \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6,\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) =$$
$$= (-3, 6, -3)$$

Geometriska tillämpningar av

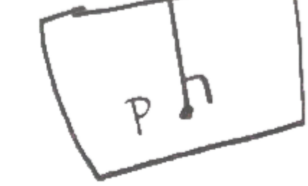
- prod och x-prod (kap. 4.3 och 5.5)

Antag fixerat HON-bas för rummet

Plan:

- Planets normalvektor
- Ortogonal projektion
- Avstånd

Obs: Ett plan π bestäms av punkt $P \in \pi$ och vektor $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ ortogonal mot π. En sådan $\mathbf{n}$ kallas normalvektor.



Obs: normalvektorn ej unik

Hitta $\mathbf{n}$!

<u>Fall I:</u> Π ges som parametrisering

$\Pi: P + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$

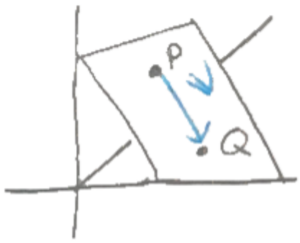
Kan välja $\mathbf{n}$ som $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$

<u>Fall II:</u> $\Pi = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$ (affinform)

Tolkning: $P:(x_1, x_2, x_3) \in \Pi$ omm

$\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{a} = b$

$((x_1, x_2, x_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = b)$



obs: $\mathbf{v}$ parallell med Π omm

$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ för några $P, Q \in \Pi$,

dvs $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{a} = b$ och $\overrightarrow{OQ} \cdot \mathbf{a} = b$

$\Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})\mathbf{a} = \underbrace{\overrightarrow{OQ} \cdot \mathbf{a}}_{=b} - \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{a}}_{=b} = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{a}$

Slutsats: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ normalvektor till Π