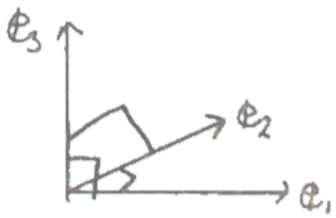
# Fö 7

## ON-baser (kap 4.2)

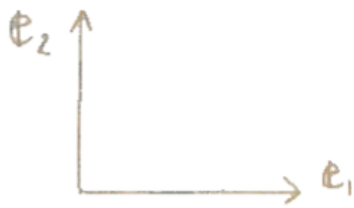
Def:

$e_1, \ldots, e_n$ är en ortonormerad bas (ON-bas)
om $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 \text{ om } i=j \\ 0 \text{ om } i=j \end{cases}$

$\left( \begin{array}{l} \text{dvs } |e_2| (= e_2 \cdot e_1)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \text{och } e_2 \perp e_1 \text{ om } i \neq j \end{array} \right)$




$n = 3$



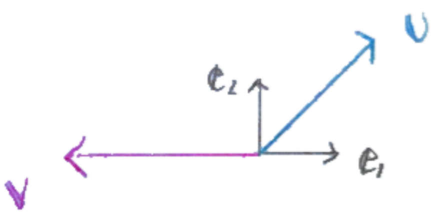

$n = 2$

## Sats (sats 3, s. 70)

Om $u$ och $v$ har koordinater
$u = (u_1, \ldots, u_n)$ respektive
$v = (v_1, \ldots, v_n)$ i ON-basen
$e_1, \ldots, e_n$ så

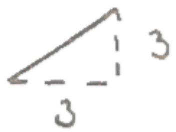
$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

Ex: Låt $e_1$ och $e_2$ ON-bas i planet
Låt $u = (3, 3)$ och $v = (-5, 0)$
Beräkna $u \cdot v$!



Metod 1: $(3,3)\cdot(-5,0) \overset{\substack{\text{sats}\\ \downarrow}}{=} 3(-5) + 3\cdot 0 = -15$

Metod 2: $|\mathbb{u}||\mathbb{v}|\cos\theta$


$|\mathbb{u}| =$ 

$\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

$|\mathbb{v}| = 5$

$\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -15$

## Bevis sats

$n=2$:

$\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = (u_1 \mathbb{e}_1 + u_2\mathbb{e}_2)\cdot(v_1\mathbb{e}_1 + v_2\mathbb{e}_2) =$

$u_1v_1\underbrace{\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_1}_{1} + u_1v_2\underbrace{\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_2}_{0} + u_2v_1\underbrace{\mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_1}_{0} + u_2v_2\underbrace{\mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_2}_{1} = u_1v_1 + u_2v_2$

{ty $e_1, e_2$ ON-bas}

$\square$

## Allmänt n:

$\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\cdot\mathbb{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\mathbb{e}_j\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} u_i u_j \mathbb{e}_i \mathbb{e}_j =$

$=$ [dela upp summan i termer där $i=j$ och $i\neq j$] $=$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \cdot \underbrace{e_i \cdot e_i}_{=1} + \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n \\ i\ne j}} u_i v_j \underbrace{e_i e_j}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdot u_2$$

ty $e_1, \dots, e_n$ ON

$\square$

Ex: Låt $u = (u_1, \dots, u_n)$ i ON-bas $e_1, \dots, e_n$

$$|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ex: $u = (1, 2, 3)$

$$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Ex: $u = (3, 4)$


$$|u| = 3^2 + 4^2 = \sqrt{25} = 5$$

## Vektorprodukt (kryssprodukt) (kap 5)

Orientering:

Ex: dim 1: en linje kan orienteras på två sätt

positiv- negativ- orientering

Ex: Dim 2: ett plan kan orienteras på två sätt:

**Def:** $n = 2$ $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \in \mathbb{R}^2$.

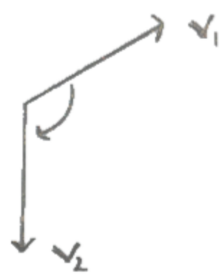
- positivt orienterade om


- negativt orienterade om


OBS: Ordningen viktigt

Ex: $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ poso och $\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_1$ nego

**Ex:**



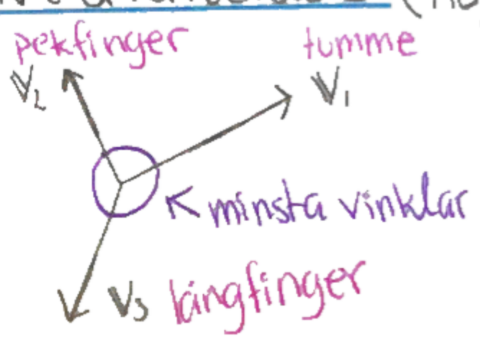

= negativt orienterade

**Def:**

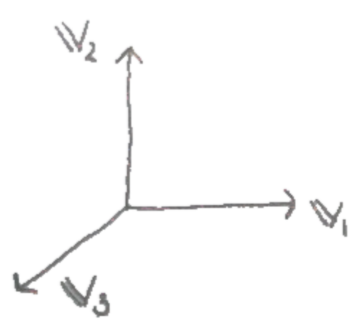
$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$

- positivt orienterade (högerorient.)

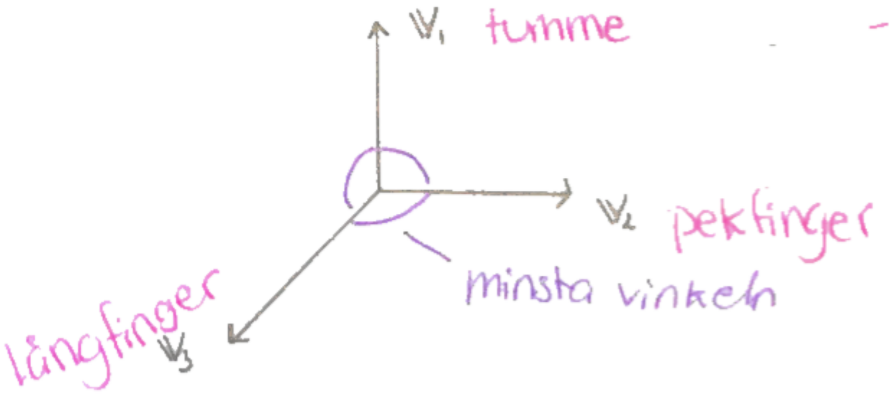
om




-högerhand



• negativt orienterade (vänsterorient.)



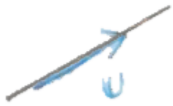
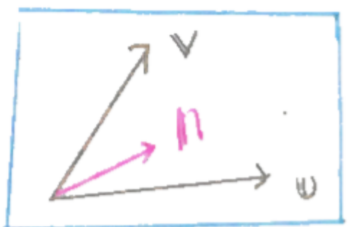
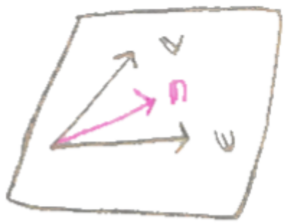

- vänsterhand

Ex: $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ pos. o. då
- $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ neg o.
- $\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3$ neg o.
- $\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_1$ pos. o

- byt tecken på en $\mathbb{V}_i$ $\longmapsto$ orient. byts
- byt plats på $\mathbb{V}_i$ och $\mathbb{V}_j$ $\longmapsto$ orient. byts
- rotera positionen $\longmapsto$ orient. bevaras

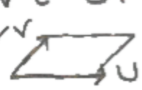
$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3 \longmapsto \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_1 \longmapsto \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$

# Ide: $n = 3$

| Input: Lin. ober. vektorer | Geom. objekt | Orient. | Tal (skalär) | Output |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $u$ |  linje (genom origo) | orient av linjen  | $\lvert u \rvert$ | |
| $u, v$ |  plan (genom origo) bestäms av $n$ <br> $n \perp u$, $n \perp v$ |  välj $n$ så att $u, v, n$ är positivt orient. | arean av  $= \lvert u \rvert \lvert v \rvert \sin\theta$ | välj $\lvert n \rvert = \lvert u \rvert \lvert v \rvert \sin\theta$ |
| $u, v, w$ | "3-dim plan", dvs. rummet självt | positivt orient. om $u, v, w$ pos. orient, annars neg. orient. | Volymen $V$ av $u, v, w$ | $+V$ om $u, v, w$ pos. o skalär <br> $-V$ om $u, v, w$ neg. a trippelprodukt |

## Obs/def (rad 2)

Om $u, v \in \mathbb{R}^3$ linjärt oberoende så finns unik vektor $n \in \mathbb{R}^3$ som

- är ortogonal mot $u$ och $v$
- $u, v, n$ positivt orient
- $\lvert n \rvert =$ arean (  ) $= \lvert u \rvert \lvert v \rvert \sin\theta$, då $\theta$ minsta vinkeln mellan $u$ och $v$

$\mathbf{w}$ kallas vektorprodukt (eller kryssprodukt) av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, betecknas $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

- Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ linjärt beroende så def. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ som $\mathbf{0}$