FÖ6

Skalärprodukt (kap 4)

Minns:

- har definierat · addition $u + v$
  · mult. med skalär λu

Det finns naturliga sätt att multiplicera vektorer

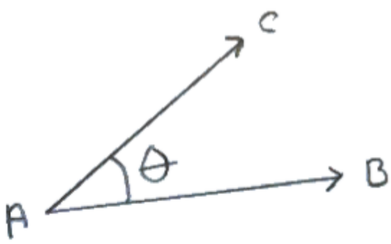
- Skalärprodukt $u \cdot v$ = tal/skalär
- I dim 3 vektorprodukt $u \cdot v$ = vektor

Geometrisk def. av skalärprodukt:

Antag $n \leq 3$

- Minns $|u|$ def. som $|\overrightarrow{AB}|$, $\overrightarrow{AB} \in u$
- Kan definiera vinkeln mellan $u \neq 0$, $v \neq 0$

som minsta vinkeln mellan $\overrightarrow{AB} \in u$ och $\overrightarrow{AC} \in v$



$\overrightarrow{AC} = v$ $\qquad (\theta \in [0, \pi])$

$\overrightarrow{AB} = u$

Def:

Skalärprodukten $u \cdot v$ av $u, v \in \mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$ definieras som

$$u \cdot v = \begin{cases} 0, & \text{om } u = 0 \text{ eller } v = 0 \\ |u| \cdot |v| \cos\theta & \leftarrow \text{vinkeln mellan } u \text{ och } v \end{cases}$$

Ex:

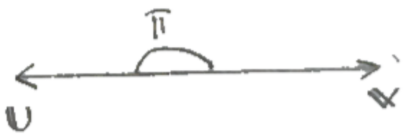
$$u \cdot u = |u| \cdot |u| \cdot \underbrace{\cos\theta}_{\cos 0 = 1} = |u|^2$$

Ex: u och v parallella

θ?

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{om } u, v \text{ pekar åt } \underline{\text{samma}} \text{ håll} \\ \pi, & \text{om } u, v \text{ pekar åt } \underline{\text{olika}} \text{ håll} \end{cases}$$

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos 0 = |u| \cdot |v|$$



$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\pi = -|u| \cdot |v|$$

<u>Räkneregler för skalärprodukt</u> (sats 2, s. 66)

(i) $u \cdot v = v \cdot u$

(ii) $(u_1 + u_2) \cdot v = u_1 \cdot v + u_2 \cdot v$

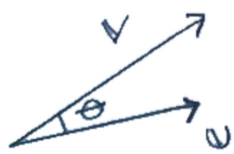
(iii) $(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v)$

(i) + (ii) $\Rightarrow u(v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2$

(i) + (iii) $\Rightarrow u(\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$

<u>Bevisskiss:</u>

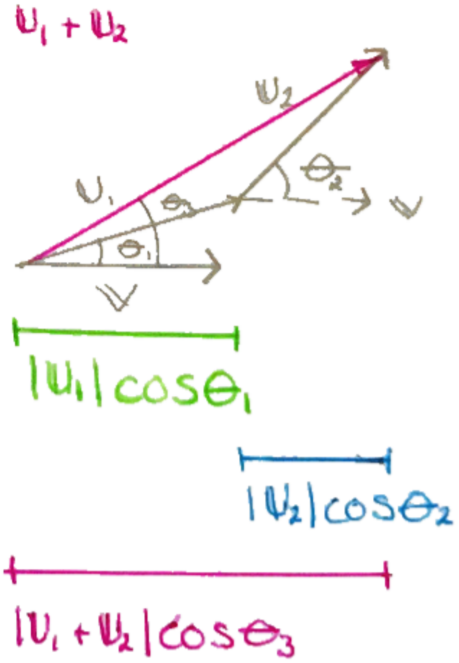
(i) $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos\theta = |v| \cdot |u| \cos\theta$



OBS: θ beror inte på ordn. av u och v

(iii) följer från def. (ÖVNING!)

(ii) Antag



- Låt θ_1 vara vinkeln mellan u_1 & v
- θ_2 –//– u_2 & v
- θ_3 –//– $u_1 + u_2$ & v

OBS:

$|u_1|\cos\theta_1 + |u_2|\cos\theta_2 = |u_1 + u_2|\cos\theta_3$

OBS!

$(u_1 + u_2)\cdot v = |u_1 + u_2|\cdot|v|\cos\theta_3 =$

$= (|u_1|\cos\theta_1 + |u_2|\cos\theta_2)\cdot|v| =$

$= |u_1|\cdot|v|\cos\theta_1 + |u_2|\cdot|v|\cos\theta_2 =$

$= u_1 v \cdot u_2 v$

Rita och argumentera på samma sätt när en eller flera av vinklarna är trubbiga! (ÖVNING)

□

Ortogonalitet

Ex: När är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$?

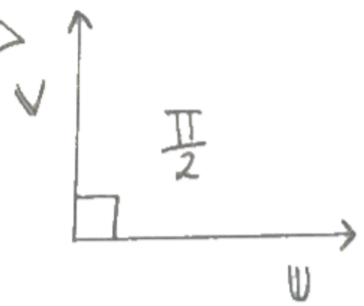
$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$

$\Rightarrow |\mathbf{u}| = 0 \,, \; |\mathbf{v}| = 0$ eller $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Alltså $\mathbf{u} \neq 0 \,, \; \mathbf{v} \neq 0$

så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$\Rightarrow$



Def: Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ sägs $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara ortogonala,

skrivs $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

OBS: $\mathbf{0} \perp \mathbf{v}$, alla $\mathbf{v}$

Lemma

Antag $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

och $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$

Då $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Bevis

Antag $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

Att $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ betyder $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$, ngt $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ty $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

Alltså $|\mathbf{u}|^2 = 0$

Alltså $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, motsägelse $\square$

Sats (delvis Sats 1, s. 65)

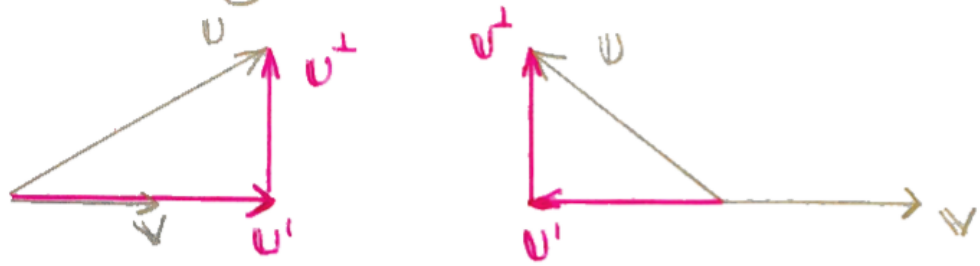
Antag $\mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Då gäller att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ har en unik uppdelning

$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp}$ (*)

där $\mathbf{u}'$ parallell med $\mathbf{v}$

$\mathbf{u}^{\perp}$ ortogonal med $\mathbf{v}$



Vidare är

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \quad (**)$$

Def:

$\mathbf{u}'$ kallas den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}'$ på $\mathbf{v}$

Moraliskt: $\mathbf{u}'$ skugga av $\mathbf{u}$

Bevis

Bevisgång:

1) Visa att $\mathbf{u}'$ def. enl. (**) parallell med $\mathbf{v}$
2) Visa att $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$

1) och 2) $\Rightarrow$ Det finns åtminstone en uppdeln. (*)

3) Visa att denna uppdelning är unik

1) $\mathbf{u}' = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\cdot\mathbf{v}$ skalär

$\mathbf{u}' = \text{skalär}\cdot\mathbf{v}$

Alltså $\mathbf{u}'$ parallell med $\mathbf{v}$

2) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} \underset{(**)}{=} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\cdot\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}_{|\mathbf{v}|^2} =$

$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$

Alltså $\mathbf{u} - \mathbf{u}' \perp \mathbf{v}$

3) Antag $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp}$ ①

och $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}' + \tilde{\mathbf{u}}^{\perp}$ ②

där $\mathbf{u}'$ och $\tilde{\mathbf{u}}' \parallel \mathbf{v}$

och $\mathbf{u}^{\perp}$ och $\tilde{\mathbf{u}}^{\perp} \perp \mathbf{v}$

Tag ① − ②

$\Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = (\mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp}) - (\tilde{\mathbf{u}}' + \tilde{\mathbf{u}}^{\perp}) =$

$= (\mathbf{u}' - \tilde{\mathbf{u}}') + (\mathbf{u}^{\perp} - \tilde{\mathbf{u}}^{\perp})$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{u}' - \tilde{\mathbf{u}}'}_{\text{parallell med } \mathbf{v}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}^{\perp} - \mathbf{u}^{\perp}}_{\text{ortogonal mot } \mathbf{v}}$

(OBS: $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{v}$ och $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v}$

$\Rightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}_{=0,\text{ ty } \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}}_{=0,\text{ ty } \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v}} =$)

Lemmat medför att

$\mathbf{u}' - \tilde{\mathbf{u}}' = \mathbf{0} = \tilde{\mathbf{u}}^{\perp} - \mathbf{u}^{\perp}$

$\Rightarrow \mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{u}}'$ och $\tilde{\mathbf{u}}^{\perp} = \mathbf{u}^{\perp}$. Uppdelningen (*) är unik. $\square$