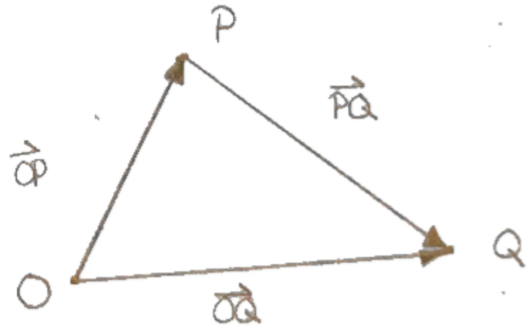
Fö 5

OBS!



$\vec{OP} + \vec{PQ} = OQ$

Kan lite oegentligt skriva detta som

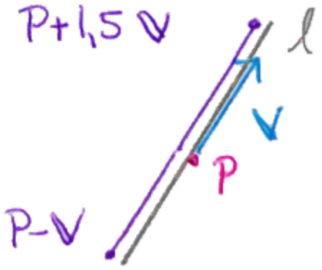
$P + \vec{PQ} = Q$

Detta ger en operation
punkt + vektor = punkt

Mer vetenskapligt:

vektorn $\vec{PQ}$ verkar på punkten P. Verkan av $\vec{PQ}$ på P är Q

Linjer i rummet



OBS: l entydigt bestämd av

- $P = (p_1, p_2, p_3)$ punkt på l
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor parallell med l

l består av alla punkter på formen
$P + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$

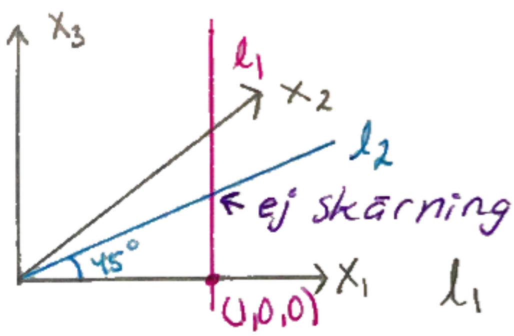
dvs
$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t v_1 \\ x_2 = p_2 + t v_2 \\ x_3 = p_3 + t v_3 \end{cases}$$

- $\mathbf{v}$ är en riktningsvektor för l
- $(*)$ är en parametisering av l med parametern t
  (linjens ekv. på parameterform)

OBS: parametisering beror på valet av P och $\mathbf{v}$.

Ex: Avgör om linjerna l_1, l_2 skär, där

l_1: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$ l_2: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 0 \end{cases}$



l_1 parallell med x_3-axeln genom $(1,0,1)$

l_1 och l_2 skär om $\exists\, t, s$ så att

$$\begin{cases} 1 = s \\ 0 = s \\ t = 0 \end{cases} \qquad (P_1 + t\mathbb{V}_1 = P_2 + s\mathbb{V}_2)$$

- $l_1 = P_1 + t\mathbb{V}_1$
- $l_2 = P_2 + s\mathbb{V}_2$

Lätt att se att (*) saknar lösning.
Alltså l_1 och l_2 skär ej varandra.

Linjer i planet

En linje i planet kan beskrivas

- som lösningarna till en linjär ekv.
  ex: $l = \{y = kx + m\} = \{ax + by = c\}$
  - linjens ekvation på affin form

Ex: $l = \{y = 2x - 2\}$

genom en parametrisering
$P + t\mathbb{v}$

- parametrisera l ovan:
sätt $x = t$
Då $y = 2t - 2$

$$l = \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$$

Plan i rummet

Ett plan π kan beskrivas:

- som lösningsmängden till en linjär ekvation

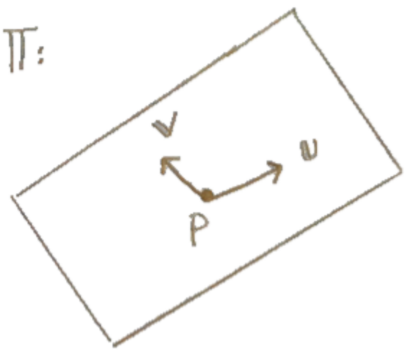
$\pi = \{ax + by + cz = d\}$

planets ekvation (på affinform)

Ex: $\pi = \{x + y - 3z = 4\}$

- genom en parametrisering

π:



OBS: π entydigt bestämt av

- en pkt $P = (p_1, p_2, p_3) \in \pi$
- två linjärt beroende vektorer $u = (u_1, u_2, u_3)$ och $v = (v_1, v_2, v_3)$ parallella med π

π består av alla punkter på formen

$P + su + tv$, $s, t \in \mathbb{R}$

dvs, $\begin{cases} x_1 = p_1 + su_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + su_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + su_3 + tv_3 \end{cases}$

OBS! Parametriseringen beror på P, u, v.

Ex: Parametrisera $\Pi = \{x + y + 3y = 4\}$

sätt $z = t \quad , \; t \in \mathbb{R}$

$\quad\quad y = s \; , \; s \in \mathbb{R}$

Då $x = -s + 3t + 4$

dvs.

$$\Pi : \begin{cases} x = \overset{p}{\boxed{4}} \overset{u}{\boxed{-s}} + \overset{v}{\boxed{3t}} \\ y = \quad\; s \\ z = \quad\quad\quad t \end{cases}$$

parametrisering av Π

$\Pi : p + su + tv$

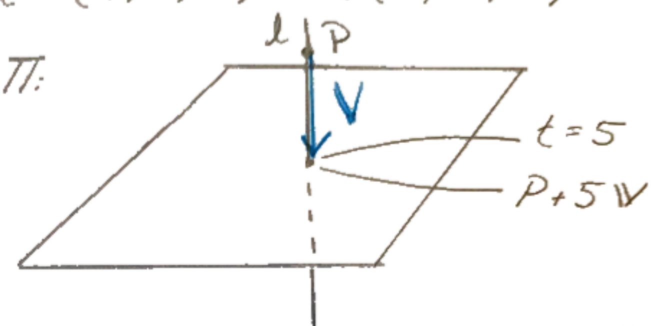
$p = (4, 0, 0)$
$u = (-1, 1, 0)$
$v = (3, 0, 1)$

Minns: Gick från en parametrisering $\rightarrow$ planets ekv.

Ex: Bestäm skärningen mellan Π ovan och

$\ell : (1,1,1) + t(1,0,0)$

Π:



$(x, y, z) = (6, 1, 1)$

Vi söker en pkt på formen

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 0) \quad (*)$

som uppfyller

$x + y - 3z = 4 \quad (**) \quad$ (Π's ekvation) sätt in (*) i (**):

$$\underbrace{1+t}_{x} + \underbrace{1}_{y} - \underbrace{3\cdot 1}_{z} = 4$$

$\Leftrightarrow \quad t - 1 = 4$

$\Leftrightarrow \quad t = 5$

Parametervärdet $t=5$ motsvarar punkten $(x,y,z) = (1,1,1) + 5(1,0,0) = (6,1,1)$

Alltså: skärningen mellan Π och l är $\{(6,1,1)\}$

Sammanfattning

Linjer i 2 dim.
- linjens ekv. (affin form)
- parametrisering 1 parameter

Linjer i 3 dim.
- parametrisering 1 parameter

Plan i 3 dim.
- planets ekv. (affin form)
- parametrisering 2 parametrar

Mer allmänt (överkurs)

I dim n:
- Ett "plan" av dim k parametriseras med k parametrar

$\Pi: p + t_1 \mathbb{v}_1 + \dots + t_k \mathbb{v}_k$

- En linjär ekvation i dim n beskriver ett "plan" av dimension $n-1$ (ett <u>hyperplan</u>)

(kap 3.4)

Linjära ekvationssystem och geometri

Vad är skärningen mellan planen

$\Pi_1 = \{a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1\}$

$\Pi_2 = \{a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2\}$

$\vdots$

$\Pi_3 = \{a_s x + b_s y + c_s z = d_s\}$

Hur beskriver vi skärningarna?
- Genom ekvationssystem

Hur kan skärningen se ut?

(Antag någon koeffic $\neq 0$)

Geometriskt	Algebraiskt
skär ej, ex: parallell	saknas lösning
punkt	entydig lösning
linje	1 parameter, ∞-många
plan	2 parameter, ∞-många

För vilka s? #plan	För vilka s? (Allmänna koeff.)
$s \geq 2$ ex: 	$s \geq 4$
$s \geq 3$	$s = 3$
$s \geq 2$	$s = 2$
$s \geq 1$	$s = 1$

Övn: Låt Π_1 (allmänt) plan av dim k_1 (Antag att vi är i dim 1). Låt Π_2 vara ett plan av dim k_2. Vad är dimensionen av skärningen av skärningen av Π_1 och Π_2