Fö 4

- $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p \in \mathbb{R}^n$ spänner upp span $(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p) =$
$= \{\mathbb{v} = u_1\mathbb{v}_1 + \dots + u_p\mathbb{v}_p,\ u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}\} =$
$= \{$linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p\}$

- $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ linjärt oberoende om
$\lambda_1\mathbb{v}_1 + \dots + \lambda_p\mathbb{v}_p = \mathbb{0}$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

- $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p \in \mathbb{R}^n$ bas för $\mathbb{R}^n$ om
  - span $(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p) = \mathbb{R}^n$
  - linjärt oberoende

Bassatsen

(i) Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ än linjärt beroende
(ii) Behövs åtminstone n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$
(i) och (ii) $\Rightarrow$ En bas för $\mathbb{R}^n$ har exakt n element

---

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ bas
$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ linjärt oberoende

Ex: Ange/beskriv en bas för

		# vektorer i basen
$\mathbb{R}$ linjen	$v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$	1
$\mathbb{R}^2$ planet	två icke parallella vektorer v_1 och v_2	2
$\mathbb{R}^3$ i rummet	tre vektorer som inte ligger i ett plan (linjärt oberoende)	3

Ex: v_1 $\quad v_2 = -v_1$ $\quad v_3$

vektorer	linjärt oberoende	spänner upp	Bas för $\mathbb{R}^2$
v_1	ja (ty $v_1 \neq 0$)	nej, för få vektorer	nej
v_1, v_2	nej	nej, endast en linje	nej
v_1, v_3	ja	ja	ja
v_1, v_2, v_3	nej	ja	nej

Notation:

Ofta betecknar vi vektorerna i en bas med $e_1, \dots, e_n$

Sats
$\begin{pmatrix} n=1, \text{ lemma } 1, \text{ s. } 8 \\ n=2, \text{ sats } 2. \text{ s } 29 \\ n=3, \text{ sats } 3. \text{ s } 30 \end{pmatrix}$

Antag $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$
Då finns entydigt bestämda $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ ...
$\mathbb{u} = u_1 \mathbb{e}_1 + \dots u_n \mathbb{e}_n$

Def:
- $u_1, \dots, u_n$ kallas koordinater
- vektorerna $u_1 \mathbb{e}_1$ kallas komposanter

Notation:
När vi fixerat en bas $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ kan vi beskriva $\mathbb{u}$ som
$\mathbb{u} = (u_1, \dots, u_n)$
kordinater map basen

Ex: bas $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ för $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{u} = (2, 1) = 2\mathbb{e}_1 + \mathbb{e}_2$
$\mathbb{v} = (1, -2) = \mathbb{e}_1 - 2\mathbb{e}_2$

Övning: utryck $\mathbb{e}_1$ och $\mathbb{e}_2$ i basen $\mathbb{u}, \mathbb{v}$

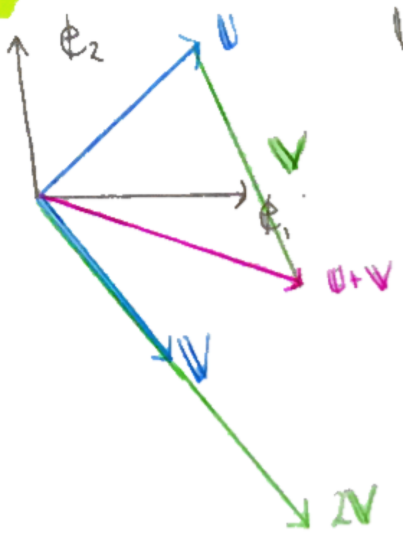
OBS: om $\mathbb{u} = (u_1, \dots, u_n)$ och
$\mathbb{v} = (v_1, \dots, v_n)$ koordinater map basen $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$

$\mathbb{u} + \mathbb{v} = (u_1 \mathbb{e}_1 + \dots + u_n \mathbb{e}_n) + (v_1 \mathbb{e}_1 + \dots + v_n \mathbb{e}_n) \overset{\text{räkneregler}}{=}$
$= (u_1 + v_1)\mathbb{e}_1 + \dots + (u_n v_n)\mathbb{e}_n$
Så att $\mathbb{u} + \mathbb{v} = (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n)$

På samma sätt

$\lambda \mathbb{U} = (\lambda u_1 + \dots + \lambda u_n)$

Ex:



$\mathbb{U} + \mathbb{V} = (2,1) + (1,-2) = (3,-1)$

Subtraktion:

$\mathbb{U} - \mathbb{V} = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)$

Ex:

Baser för $\mathbb{R}^2$ $\{e_1, e_2\}$, $\{e, \mathbb{V}_1\}$, $\{\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3\}$, $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3\}$ ...

vektor	koord. i bas $\{e_1, e_2\}$	koord i $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3\}$
$\mathbb{V}_1$	$\mathbb{V}_1 = e_1 + e_2 = (1,1)$	$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_1 = (1,0)$
$\mathbb{V}_2$	$\mathbb{V}_2 = -\mathbb{V}_1 = -e_1 - e_2 = (-1,-1)$	$\mathbb{V}_2 = -\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2 = (-1,0)$
$\mathbb{V}_3$	$\mathbb{V}_3 = e_2$, $\mathbb{V}_3 = (0,1)$	$\mathbb{V}_3 = (0,1)$
$3\mathbb{V}_1 - 2\mathbb{V}_3$	$3\mathbb{V}_1 - 2\mathbb{V}_3 = 3(1,1) - 2(0,1) = (3,3) - (0,2) = (3,1)$	$(3,-2)$

Bevis av föregående sats

• Existens av $u_1, \dots, u_n$

$\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ bas $\overset{\text{def av bas}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

Alltså är varje vektor $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$ en linjärkomb. av $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$, dvs det finns tal $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ så att

$\mathbb{u} = u_1\mathbb{e}_1 + \dots + u_n\mathbb{e}_n$

Entydighet av $u_1, \dots, u_n$

Antag att $\mathbb{u} = u_1\mathbb{e}_1 + \dots + u_n\mathbb{e}_n$ ①

och att $\mathbb{u} = u_1\mathbb{e}_1 + \dots + u_n\mathbb{e}_n$ ②

Tag ① - ②

$\mathbb{0} = \mathbb{u} - \mathbb{u} = u_1\mathbb{e}_1 + \dots + u_n\mathbb{e}_n) - (u_1\mathbb{e}_1 + \dots + u_n\mathbb{e}_n) \overset{\text{räkneregler}}{=}$

$= (u_1 - u_1)\mathbb{e}_1 + \dots + (u_n - u_n)\mathbb{e}_n$ (*)

$\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ bas $\overset{\text{def av bas}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ linjärt oberoende

$\Rightarrow$ ekv (*) har endast den triviala lösningen

$u_1 - u_1' = u_n - u_n' = 0$

Alltså $u_i = u_n'$ for $i = 1, \dots, n$

Alltså är $u_1, \dots, u_n$ entydigt bestämda.

$\square$

Koordinatsystem (kap. 3)

- Beskriver punkter i rummet
(på planet, i linje i högre dim)

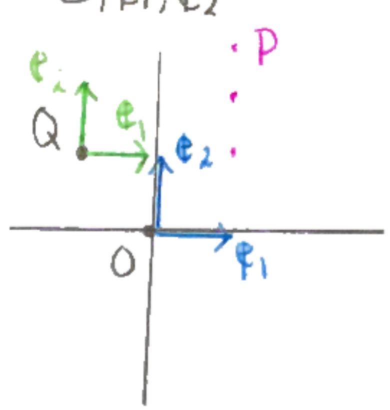
Def: Ett koordinatsystem består av

① En speciell punkt O, kallas origo
Varje punkt P motsvarar exakt en vektor $\overrightarrow{OP}$.
Denna kallas P's ortsvektor.

② En bas e_1, e_2, e_3 för $\mathbb{R}^3 = \{$vektorer i rummet$\}$
Då finns enligt sats en entydig representation.
$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$
(x_1, x_2, x_3) kallas P's koordinater i koordinatsystemet

Anm: Koordinatsystem för linjen/planet(/högre dim) definieras analogt.

Ex: Antag P har koordinaten $(1,3)$ i koord. syst.
O, e_1, e_2



- Q har koord. $(-1,1)$ i O, e_1, e_2
- Vad är P's koord. i Q, e_1, e_2 ? ①
- Vad är Q's —"— ? ②
- Vad är Q's —"— ? ③
(obs: Q är här nytt origo)

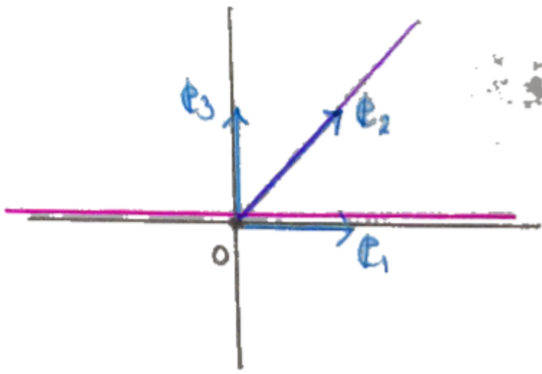
① $P = (2,2)$

② $O = (1,-1)$

③ $Q = (0,0)$

Notation:

När vi har fixerat ett koord. syst. $O, e_1, \dots, e_n$ så kan vi identifiera P med $(x_1, \dots, x_n)$



- koordinataxlar i "x_n-axeln"
- koordinatplan i $x_1 x_2$-planet