Fö 3

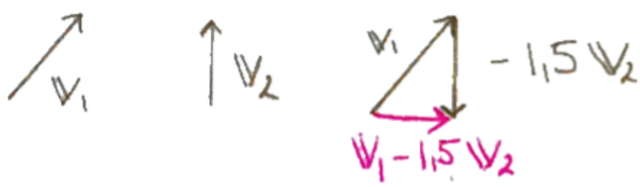
Notation:

Vi låter
- $\mathbb{R}$ beteckna vektorer på linjen
- $\mathbb{R}^2$ beteckna vektorer i planet
- $\mathbb{R}^3$ beteckna vektorer i rummet

<u>Def:</u> En vektor $\mathbb{u}$ sägs vara en <u>linjärkombination</u> av $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_p$ om det finns tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^n$ så att

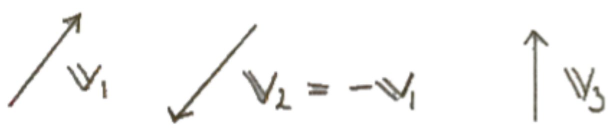
$$\mathbb{u} = \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda_2 \mathbb{v}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbb{v}_p$$

Ex:



linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$

Ex:



Är ① $\mathbb{v}_2$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3$

② $\mathbb{v}_3$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$

③ $\mathbb{v}_2$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_1$

④ $\mathbb{0}$ linjärkomb av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$?

- ① ja! ty $\mathbb{v}_2 = (-1)\mathbb{v}_1 + 0\mathbb{v}_3$
- ② nej! alla linjärkomb. av $\mathbb{v}_1$ och $\mathbb{v}_2$ parallella med $\mathbb{v}_1$ (på linje)
  $\mathbb{v}_3$ ej parallell med $\mathbb{v}_1$
- ③ ja! $\mathbb{v}_2 = (-1)\mathbb{v}_1$
- ④ ja! $\mathbb{0} = 0\mathbb{v}_1 + 0\mathbb{v}_2 = 3\mathbb{v}_1 + 3\mathbb{v}_2$

Def: • Vi betecknar mängden av alla linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ med

$\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p)$

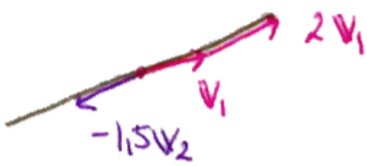
• Vi säger att $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ spänner upp $\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p)$

Ex:

$\mathbb{v}_1$ $\quad \mathbb{v}_2 = -\mathbb{v}_1$ $\quad \mathbb{v}_3$

$\mathrm{span}(\mathbb{v}_1) = \{ \mathbb{u} \text{ på } \cancel{\text{formen}}\ \lambda \mathbb{v}_1,\ \lambda \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ \text{alla } \mathbb{u} \text{ parallella med } \mathbb{v}_1 \} =$ linje med "riktning $\mathbb{v}_1$"



$\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2) = \{ \mathbb{u} = \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda_2 \mathbb{v}_2 + \dots \lambda_n \mathbb{v}_n;\ \lambda_n \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{v}_1,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \mathrm{span}(\mathbb{v}_1)$

$\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3) = \{ \mathbb{u} = \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda_3 \mathbb{v}_3 \}$

Alltså $\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3) = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3) = \mathbb{R}^2$

Ex: Hur många vektorer behövs för att spänna upp $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$?

$\mathbb{R}^2 = 2$
$\mathbb{R}^3 = 3$
$\mathbb{R}^n = (n)$

Linjärt beroende/oberoende

moraliskt:

$v_1, \dots, v_p$ linjärt oberoende om "pekar åt olika håll", spänner upp något av dimension p.

Ex:

- v_1, v_3  linjärt oberoende

- v_1, v_2  linjärt beroende

Kommer ge 2 def:

Def 1:

Vektorerna $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$ sägs vara linjärt beroende om någon av dem är en linjär komb. av de andra
Annars sägs de vara linjärt oberoende

OBS! linjärt beroende/oberoende är en egenskap hos mängden $v_1, \dots, v_p$, ej hos enskilda vektorer/delmängder

Def. 2:

$\mathbb{V}_1, \ldots, \mathbb{V}_p \in \mathbb{R}^n$

är linjärt oberoende om ekvationen

$\lambda_1 \mathbb{V}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbb{V}_p = \mathbf{0} \quad (*)$

har endast den triviala lösningen

$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$

Annars (dvs om $\exists$ lösning till $(*)$ med åtminstone ett $\lambda_i \neq 0$) är de linjärt beroende.

Sats (sats 5, s. 36)

De två definitionerna av linjärt beroende/oberoende är ekvivalenta.

Ex: $\nearrow \mathbb{V}_1 \quad \swarrow \mathbb{V}_2 \quad \uparrow \mathbb{V}_3$

① Är $\{\mathbb{V}_1\}$ linjärt beroende/oberoende?

② -"- $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2\}$ -"- ?

③ -"- $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3\}$ -"- ?

④ -"- $\{\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3\}$ -"- ?

① Oberoende. $(*)$ $\lambda_1 \mathbb{V}_1 = \mathbf{0}$ har endast lösning $\lambda_1 = 0$
Alltså oberoende def 2

② Beroende. $\mathbb{V}_1 = -\mathbb{V}_2$ ($\mathbb{V}_1$ linjärkomb. av $\mathbb{V}_2$)
Alltså ber. enl. def 1

③ Oberoende. (lös $\lambda_1 \mathbb{V}_1 + \lambda \mathbb{V}_3 = \mathbf{0}$ ...)
$\mathbb{V}_1$ och $\mathbb{V}_3$ ej parallella, ingen linjärkomb. av den andra

④ Beroende. $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ beroende

$\Rightarrow \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ beroende

Allmänt: Om $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_p$ linj. beroende så $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_p, \mathbb{v}_{p+1}, \ldots, \mathbb{v}_s$ linjärt beroende

Sats (sats 5, s. 36)

De två definitionerna av linjärt beroende/oberoende av ekvivalenta.

Bevis

① linjärt beroende enligt def. 1
$\Rightarrow$ linjärt beroende enligt def. 2

Antag $\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_p\}$ linjärt beroende enligt def. 1.
Då är någon av $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_p$ en linjärkombination av de andra.
Antag att $\mathbb{v}_1$ är en linjärkombination av $\mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_p$ (Annars numrera om vektorerna)
Det betyder att $\exists \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ så att

$\mathbb{v}_1 = \lambda_2 \mathbb{v}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbb{v}_p$

$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1 - \lambda_2 \mathbb{v}_2 - \ldots - \lambda_p \mathbb{v}_p = \mathbb{0} \quad (*)$

Eftersom (åtminstone) koefficienten framför $\mathbb{v}_1 \neq 0$ så är $\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_p\}$ linjärt beroende enligt def 2

$\square$

Omvändningen:
linjärt beroende enl. def 2
$\Rightarrow$ linjärt beroende enl. def 1

Antag $\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p\}$ linjärt beroende enl. def 2
Då gäller
(*) $\lambda_1 \mathbb{v}_1 + \dots + \lambda_p \mathbb{v}_p = \mathbb{0}$
har en lösning där något $\lambda_i \neq 0$
Vi kan anta att $\lambda_1 \neq 0$ (annars numrera vektorerna)
$\lambda_1 \neq 0$
$\Rightarrow$ kan mult. (*) med $\frac{1}{\lambda_1}$

$$(*) \Leftrightarrow \mathbb{v}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbb{v}_2 + \dots + \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\mathbb{v}_p = \mathbb{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbb{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\mathbb{v}_p$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{v}_1$ är en linjär komb. av $\mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_p$
$\Rightarrow$ $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_p\}$ linjärt beroende enl. def 1

Slutsats:
linjärt beroende enl. def 1 $\Leftrightarrow$ linjärt beroende enl. def 2

Ex: Hur många oberoende vektorer kan det finnas i

$\mathbb{R}^1 = 1$

$\mathbb{R}^2 = 2$

$\mathbb{R}^3 = 3$

$\mathbb{R}^n = (n)$

Def:

$\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_p \in \mathbb{R}^n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ om

- de spänner upp $\mathbb{R}^n$ och
- linjärt oberoende

Bassatsen: (sats 4, s 35) (sats 3. s. 103)

- Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende
- Det behövs n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$
- Speciellt har varje bas för $\mathbb{R}^n$ n vektorer.

– $\mathbb{V}_1, \dots \mathbb{V}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n$ linjärt oberoende