Fö 2

Rep

- def. linjära ekvationssystem
- # lösningar : 0, 1, ∞
- lös linj. ekv.syst. (*) med Gauseliminering

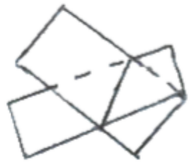
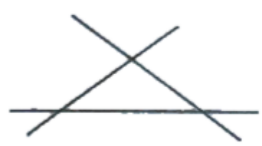
① (*) $\xrightarrow[\text{radoperation}]{\text{elementära}}$ (**) trappformat

② Lös (**): icke pivot-variabler fria, välj som parametern pivot-variabler bestäms av ekv. i (**).

Under-/överbestämda ekv.system

Def: • Ett ekvationssystem med färre ekv. än variabler kallas underbestämt.

• Ett ekvationssystem med fler ekv. än variabler kallas överbestämt.

Ekv.system	Typiskt exempel	# lösningar
Underbestämt	2 ekv. 3 variabler  2 plan i rummet	∞ i allmänhet 0, ex: parallella plan
Överbestämt	3 ekv. 2 variabel  3 linjer i planet	0 i allmänhet 1, ∞ } undantags-fall ex: 
Kvadratiskt	2 ekv. 2 variabler 	0 ex: // 1 i allmänhet ∞ ex: /

<u>Vektorer:</u>

Plan: - definition
- räkneregler

Mycket begrepp!
- geometrisk storhet med storlek och riktning

<u>ex:</u> Hastighet, acceleration, kraft

Jämför med <u>skalärer</u>, geometriskt storhet med storlek.

<u>ex:</u> längd, area, fart

<u>Definition</u>

En sträcka AB är ett linjesegment mellan 2 punkter A och B (på linjen/i planet/i rummet)

En <u>riktad sträcka</u> $\overrightarrow{AB}$ är en sträcka AB, med riktning "A kommer före B".

- A startpunkt
- B slutpunkt

En <u>riktad sträcka</u> bestäms av

- startpunkt • A
- riktning

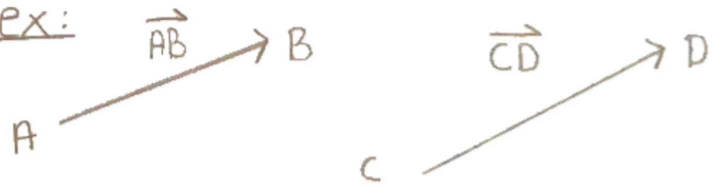
- längd

Om vi struntar i startpunkt får vi en vektor.

<u>Definition</u>

En vektor u är en mängd av riktade sträckor, där $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ båda tillhör samma u om $\overrightarrow{AB}$ kan fås genom parallellförflyttning av $\overrightarrow{CD}$.

<u>ex:</u>



, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in u$

- $\overrightarrow{AB} \in u$ sägs vara en representant för u

<u>Anm:</u> Ofta är det praktiskt att låta $\overrightarrow{AB}$ beteckna u.

<u>Ex:</u> Vektorn som representeras av $\overrightarrow{AA}$ kallas <u>nollvektorn</u>, skriv 0.

<u>Definition</u>

u och v är parallella om $\overrightarrow{AB} \in u$ och $\overrightarrow{CD} \in v$ parallella.

<u>ex:</u> $\nearrow$ $\overrightarrow{AB} \in u$ $\swarrow$ $\overrightarrow{CD} \in v$ parallella

- <u>Längden</u> $|u|$ av u definieras som längden $|\overrightarrow{AB}|$ av $\overrightarrow{AB} \in u$
- u's <u>riktning</u> definieras som riktningen av $\overrightarrow{AB} \in u$

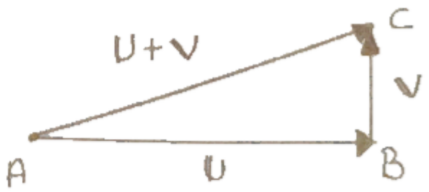
OBS! $|u|$ och riktning beror ej på val av $\overrightarrow{AB} \in u$, eftersom alla representerar samma längd och riktning.

- $\mathbb{0}$ är parallell med alla vektorer $\mathbb{u}$
- $|\mathbb{0}| = 0$, $\mathbb{0}$ enda vektor med längd 0

Räkneoperationen (kap. 2.2)

- Addition av vektorer

$\mathbb{u} + \mathbb{v}$ definieras enligt:



dvs. välj $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{u}$, $\overrightarrow{BC} \in \mathbb{v}$

(dvs. $\mathbb{u}$'s slutpunkt = $\mathbb{v}$'s startpunkt)

Då är $\overrightarrow{AC}$ representant för $\mathbb{u} + \mathbb{v}$.

- Multiplikation med skalär

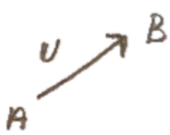
Låt $\lambda \in \mathbb{R}$. Då är $\lambda \mathbb{u}$ vektorn som har längd $|\lambda||\mathbb{u}|$ och

- samma riktning som $\mathbb{u}$ om $\lambda \geq 0$
- motsatt riktning som $\mathbb{u}$ om $\lambda < 0$

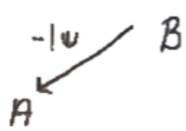
Ex:

$\mathbb{0} = 0\mathbb{u}$

Ex: Om $\mathbb{u} \ni \overrightarrow{AB}$



om $(-1)\mathbb{u} \ni \overleftarrow{BA}$



Räkneregler (sats 1, sid. 23)

Addition

① $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$

② $\mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = (\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w}$

③ $\mathbb{u} + \mathbb{0} = \mathbb{u}$

Mult. med skalär

④ $\lambda(\mu \mathbb{u}) = (\lambda \mu)\mathbb{u}$

⑤ $1\mathbb{u} = \mathbb{u}$

⑥ $0\mathbb{u} = \mathbb{0}$

⑦ $\lambda \mathbb{0} = \mathbb{0}$

Addition + multip. med λ

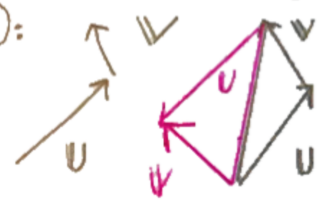
⑧ $\mathbb{u} + (-1)\mathbb{u} = \mathbb{0}$

⑨ $(\lambda + \mu)\mathbb{u} = \lambda \mathbb{u} + \mu \mathbb{u}$

⑩ $\lambda(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = \lambda \mathbb{u} + \lambda \mathbb{v}$

Bevis av några regler:

①:



②: Välj representanter

- $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{u}$
- $\overrightarrow{BC} \in \mathbb{v}$
- $\overrightarrow{CD} \in \mathbb{w}$

$\mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Alltså gäller ② $\square$

Additiv invers

Givet $\mathbb{u}$ så finns en vektor $\mathbb{v}$ sådan att

$$\mathbb{v} + \mathbb{u} = \mathbb{0} \quad (*)$$

Vi betecknar denna med $-\mathbb{u}$

Bevis

Existens: Enligt räkneregel ⑧ uppfyller

$\mathbb{v} = (-1)\mathbb{u}$ (*)

Alltså finns <u>åtminstone en</u> vektor $\mathbb{v}$ som uppfyller (*).

Entydighet: Vi skall visa att denna vektor är unik.

Antag $\mathbb{v}$ och $\mathbb{v}'$ uppfyller (*).

Vi vill visa att $\mathbb{v} = \mathbb{v}'$

Då
$$\mathbb{v} \underset{③}{=} \mathbb{v} + \mathbb{0} \underset{\mathbb{v}' \text{ uppfyller } (*)}{=} \mathbb{v} + (\mathbb{v}' + \mathbb{u}) \underset{①}{=} \mathbb{v} + (\mathbb{u} + \mathbb{v}') \underset{②}{=}$$
$$= (\mathbb{v} + \mathbb{u}) + \mathbb{v}' \underset{\mathbb{v} \text{ uppfyller } (*)}{=} \mathbb{0} + \mathbb{v}' \underset{①}{=} \mathbb{v}' + \mathbb{0} \underset{③}{=} \mathbb{v}'$$

Alltså $\mathbb{v} = \mathbb{v}'$

$\square$

Notation:

Från beviset följer $-\mathbb{u} = (-1)\mathbb{u}$

Vi skriver $\mathbb{u} - \mathbb{v}$ för vektorn $\mathbb{u} + (-\mathbb{v})$