Fö 1

- linjära ekvationssystem
- geometri
  - vektorer
  - linjer och plan
  - geometri i $\mathbb{R}^n$
- matriser
  - linjära avbildningar
  - determinanter
- komplexa tal

Linjära ekvationssystem

Def: En linjär ekvation är på formen

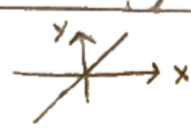
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

där

a_1, a_n, b reella tal

- $x_1, \ldots, x_n$ kallas variabler/obekanta
- $a_1, \ldots, a_n$ kallas koefficienter

ex:

Ekvation	Linjära?	antal #variabler	Lösningsmängd
$y = x$	ja	2	
$x_1 = 3$	ja	1	
$xy = 1$	nej	2	
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$	nej	3	
$-x + 3y + 11z = 3$	ja	3	

Lösningsmängden till en linjär ekvation är "linjär"

ex: punkt, linje, plan

Def: Ett <u>linjärt ekvationssystem</u> är en samling linjära ekvationer (i samma variabel)

Ex: $(*)\begin{cases} y = x \\ y = kx + m \end{cases}$

- Algebraiskt:
  (x,y) lösning till $(*)$ om (x,y) löser båda ekvationerna.
- Geometriskt:
  (x,y) ligger på båda linjerna

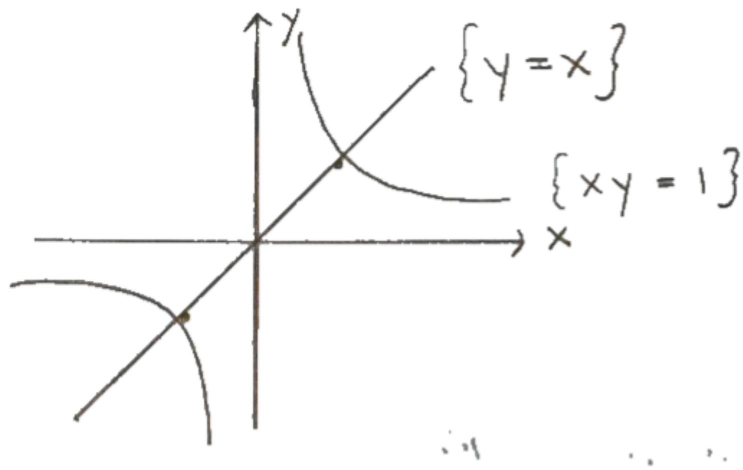
Antalet lösningar till $(*)$:

Fall	# lösningar	geometriskt
$k \neq 1$	1	linjer olika lutning 
$k = 1$, $m \neq 0$, $(*)\begin{cases} y = x \\ y = x + m \end{cases}$	inga	parallella 
$k = 1$, $m = 0$, $(*)\begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$	∞ många	linjerna sammanfaller 

Påstående: Ett linjärt ekvationssystem
- saknar lösning
- har 1 unik lösning
- har ∞ många lösningar

- Hur många lösningar har $\begin{cases} y = x \\ xy = 1 \end{cases}$?

Svar: 2



Lösa linjära ekvationssystem

Ex: Lös $\begin{cases} 2y - 8z = 8 \\ x - 2y + z = 0 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$

Idé:

Steg 1: Eliminera x från alla ekv. utom en.

· För att få x i första ekv., byt plats:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{I} \quad 4 \\ 2y - 8z = 8 & \text{II} \cdot \frac{1}{2} \\ -4x + 5y + 9z = -9 & \text{III} \end{cases}$$

För att eliminera x:

tag 4 · I och lägg till III

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{I} \\ \quad y - 4z = 4 & \text{II}' \\ \quad -3y + 13z = -9 & \text{III}' \end{cases}$$

3

Förenkla II genom att multiplicera med $\frac{1}{2}$

Steg 2: Eliminera y från sista ekv.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{I} \\ \quad y - 4z = 4 & \text{II}' \\ \quad\quad z = 3 & \text{III}'' \end{cases}$$

$\text{III}'' \iff z = 3$

$\text{II}' \iff y - 12 = 4 \iff y = 16$

$\text{I} \iff x - 32 + 3 = 0 \iff x = 29$

Alltså (**) och därmed (*) har

$$\begin{cases} x = 29 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$$

<u>Formalisera detta:</u>

<u>Def:</u> Operationerna

1) Byt ordning på ekvationerna
2) Multiplicera en ekv. med tal $\neq 0$
3) Addition av tal · ekvation till en annan ekv.

Kallas <u>elementära radoperationen</u>

Sats (sats 1, s. 9)

Om det linjära ekvationssystemet (* *) fås genom att utföra elementära radoperationer på (*), så har (*) och (* *) samma lösningar.

Bevis

Klart att 1) inte förändrar lösningsmängden.
Klart att 2) inte förändrar lösningsmängden.
Kolla 3):
Antag $x = (x_1, \dots, x_n)$ uppfyller

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b & \mathrm{I} \\ c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = d & \mathrm{II} \end{cases}$$

Då gäller $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + k(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) = b + kd$
dvs x uppfyller ekv. $\mathrm{I} + k\,\mathrm{II}$
dvs om x uppfyller (*) så uppfyller x ekv.syst.

$$(**)\begin{cases} \mathrm{I} \\ \mathrm{I} + k\,\mathrm{II} \end{cases}$$

omvänt om x uppfyller (* *) så uppfyller det också

$$\begin{cases} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} + k\,\mathrm{II} - k\,\mathrm{II} = \mathrm{I} \end{cases}$$

dvs (*)
Alltså (*) och (* *) har samma lösningar.
$(*) \Leftrightarrow (**)$ $\square$

Def: Givet ett linjärt ekvationssystem (*), sätt en ring runt den första noll-skilda koeff. i varje rad. (*) är trappformat om varje ring är till höger om ringarna i raderna ovanför.
Elementen med ringar kallas pivotelement

Ex:
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y=7 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=5 \\ z=0 \\ y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+11z=0 \\ 2z=3 \\ 3z=7 \end{cases}$$

trappformat   ej trappformat   ej trappformat

Gausselim.:
(*) Elementära radoperationer $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ (**) trappformat, lättare att lösa

Lösa trappformat ekv. system
- Lösning saknas omm finns rad med $VL=0$, $HL\neq 0$

Ex:
$$\begin{cases} x+11z=0 \\ 2z=3 \\ 0=2,5 \end{cases}$$
-Lösning saknas

- Obs, varje kolumn motsvarar en variabel
- Varje element som saknar pivotelement motsvarar en fri variabel, välj som parameter.
- Varje ekvation uttrycker en pivotvariabel i termer av fria variabler.

Ex: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + x_5 = -1 & \mathrm{I} \\ x_3 = 7 & \mathrm{II} \\ x_4 - x_5 = 0 & \mathrm{III} \end{cases}$

x_2, x_5 "fria"

sätt $x_2 = s \quad , \quad s \in \mathbb{R}$

$x_5 = t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

Lösningar: $\begin{cases} x_1 = -2s - t - 1 & \mathrm{I} \\ x_2 = s \\ x_3 = 7 & \mathrm{II} \\ x_4 = t & \mathrm{III} \\ x_5 = t \end{cases}$