

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna om inte annat nämns!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Bestäm för alla värden på $a, b \in \mathbb{R}$ antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay + az = 3 \\ bx + ay + az = 4 \\ bx + by + 2az = 6 \end{cases} . \quad (6 \text{ p})$$

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Finns det en matris H som är högerinvers till både A och B ? Om svaret är ja, ange en sådan H . Annars visa att det inte är möjligt att hitta en sådan H . (6 p)

3. Betrakta linjerna $\ell_1 : (0, 3, -6) + s(1, -1, 2), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (3, 4, -5) + t(2, -2, 4), t \in \mathbb{R}$, i rummet. Avgör om det finns ett plan som innehåller ℓ_1 och ℓ_2 . Bestäm i så fall ekvationen för planet. (7 p)

4. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto (7 + 3i)z$ och låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen $f = g^{-1} \circ F \circ g$. Vidare låt A vara avbildningsmatrisen till f . Bestäm nollrummet och kolonnrummet till A . (6 p)

5. Låt T vara triangeln i planet med hörn i $(1, 5)$, $(2, -3)$ och $(-6, 7)$ och låt M vara dess tyngdpunkt. Beräkna det kortaste avståndet från M till en sida i T . (7 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Utelämnat svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Antag att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då spänner $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ upp $\mathbb{R}^3$.

(b) Låt A vara en $(m \times n)$ -matris. Antag att $A^T A$ inte är inverterbar. Då finns en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sådan att $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ saknar lösning.

(c) Avståndet mellan linjerna $\ell_1 : (1, 3) + s(1, 2), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (3, 1) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, är $2\sqrt{2}$.

(d) Antag att A och B är $(n \times n)$ -matriser och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Vidare antag att $\mathbf{x}'$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och att $\mathbf{x}''$ är en lösning till $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Då är $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ en lösning till $(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(e) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \bullet \mathbf{v}$.

(f) Nolldimensionen av $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ är 1.

7. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjära avbildningar och att $\mu \in \mathbb{R}$. Visa att $f + g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, och $\mu f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto \mu f(\mathbf{x})$, är linjära avbildningar.
(6 p)
8. Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende.
(6 p)

Lycka till!
Elizabeth

TMA660 Linjär algebra & geometri 21/10 2020 lösningar ①

1) Låt $A =$ elev. syst. koeffmatris.

$$\text{Di } \det A = \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & 2a \end{vmatrix} = 2a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - 2a^2b - a^2b = 2a^3 - 3a^2b + ab^2 = a(2a^2 - 3ab + b^2) = a(b-a)(b-2a)$$

Obs $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertbar $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig lös. $\forall \mathbf{b}$
Undersök vad som händer när $\det A = 0$:

$a=0$ Första raden i elev. syst. $0=3 \Rightarrow$ lös. saknas

$b-a=0 \Leftrightarrow b=a$ $\Leftrightarrow$ de 2 första elev. blir

$$\begin{cases} a(x+y+z) = 3 \\ a(x+y+z) = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{ej lösbare samtidigt} \Rightarrow \text{lös. saknas}$$

$b-2a=0 \Leftrightarrow b=2a$ ger:

$$\begin{cases} a(x+y+z) = 3 \\ a(2x+y+z) = 4 \\ 2a(x+y+z) = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{Obs om } a \neq 0 \Rightarrow \text{Sätt } x=y=z=1 \text{ är en lösning. De alla lös.} = \text{denne} + \text{Nollrum}(A) \Rightarrow \infty \text{ många lös.}$$

Slutsats: Om $a=0$ eller $b=a$ så 0 lösningar

• $b=2a \neq 0$ så ∞ många lös.

• $a \neq 0, b \neq a, b \neq 2a$ 1 lös.

2) Obs: H måste vara på formen $H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

H högerinvers till B :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a+e & b+f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c=1 & d=0 \\ e=-a & f=1-b \end{cases}$$

Sätt in i H

H högerinvers till A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \\ -a & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3-4a & 2b+4(1-b) \\ 3a+2-5a & 3b+5(1-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2a & 4-2b \\ 2-2a & 5-2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

2 forts) $\begin{cases} 3-2a=1 \\ 2-2a=0 \\ 4-2b=0 \\ 5-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ Slutats:

$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ är en höjerr. till A och B.

3) $l_1: (0, 3, -6) + s(1, -1, 2) = P_1 + s v_1$
 $l_2: (3, 4, -5) + t(2, -2, 4) = P_2 + t v_2$

Obs: l_1 & l_2 parallella tv $v_1 \parallel v_2$

och sammanfaller ej (max tex då $P_2 \notin l_1$)

Alltså finns entydigt bestämt plan Π som innehåller l_1 & l_2 .

Hitta normalvektor till Π ! Strategi: tag $P_1 \in l_1, P_2 \in l_2$.

Då $\overrightarrow{P_1 P_2}$ parallell m Π , ej parallell med v_1 .

Alltså $\overrightarrow{P_1 P_2} \times v_1 \perp \Pi$.

Välj P_1, P_2 som man. Då $\overrightarrow{P_1 P_2} = (3, 4, -5) - (0, 3, -6) = (3, 1, 1)$

Nu $\overrightarrow{P_1 P_2} \times v_1 = (3, 1, 1) \times (1, -1, 2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -5, -4)$ normalvektor

Alltså Π s ekr. är på formen $3x - 5y - 4z = d$.

Bestäm d: Sätt in punkt i planet, tex P_1 :

$$3 \cdot 0 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot (-6) = d \Leftrightarrow d = 9$$

Slutats: Planet $\Pi = \{3x - 5y - 4z = 9\}$ innehåller l_1 & l_2

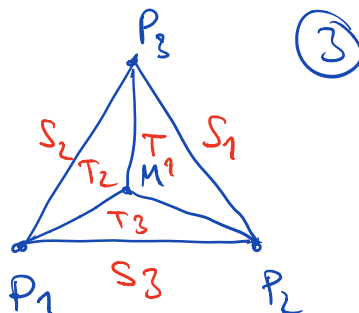
4) Obs F-invertibler (med invers $F^{-1}: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/(7+3i)$)

Alltså f-invertibler $\Leftrightarrow A$ invertibler $\Leftrightarrow$

$\text{NM}(A) = \{\emptyset\}$ & $\text{Kolom}(A) = \mathbb{R}^2$

TMA 27/10 20

5) Låt $P_1 = (1, 5)$, $P_2 = (2, -3)$, $P_3 = (-6, 7)$
 och mår beteckningen $\rightarrow$
 för sidan och "deltriangeln"



Obs $2 \text{ area}(T_3) = \left| \left| \vec{P_1 P_2} \quad \vec{P_1 M} \right| \right| = \left| \left| \vec{P_1 P_2} \quad \frac{1}{3} (\vec{P_1 P_2} + \vec{P_1 P_3}) \right| \right|$

Det hänger &
 attnerande i
 kollar

Minns $\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OP_1} + \vec{OP_2} + \vec{OP_3})$
 Välj $O = P_1$

$\downarrow$
 $= \frac{1}{3} \left| \left| \vec{P_1 P_2} \quad \vec{P_1 P_3} \right| \right| = \frac{1}{3} \cdot 2 \text{ area}(T)$

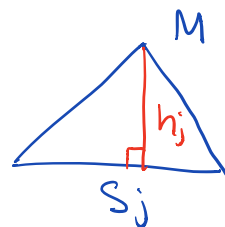
Med samma argument / är symmetriskt

$\text{area}(T_j) = \frac{1}{3} \text{area}(T) \quad \forall j$

Har också

$\text{area}(T_j) = \frac{1}{2} \text{längd}(S_j) \cdot h_j$

där $h_j = \text{avstånd}(M, S_j)$



Alltså $\frac{\text{area}(T_j)}{\text{längd}(S_j)} = \frac{2 \text{area}(T)}{3 \text{längd}(S_j)}$

Nu:

$\vec{P_1 P_2} = (2, -3) - (1, 5) = (1, -8) \Rightarrow \text{längd}(S_3) = |\vec{P_1 P_2}| = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$\vec{P_1 P_3} = (-6, 7) - (1, 5) = (-7, 2) \Rightarrow \text{längd}(S_2) = |\vec{P_1 P_3}| = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

$\vec{P_2 P_3} = (-6, 7) - (2, -3) = (-8, 10) \Rightarrow \text{längd}(S_1) = |\vec{P_2 P_3}| = \sqrt{64+100} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

$\text{area}(T) = \frac{1}{2} \left| \left| \vec{P_1 P_2} \quad \vec{P_1 P_3} \right| \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2 - 56| = 27$

Obs S_1 längst. Alltså avstånd h_1 från S_1 till M minst.

Slutligen: Kortaste avst. $h_1 = \frac{2 \text{area}(T)}{3 \text{längd}(S_1)} = \frac{2}{3} \frac{27}{2\sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{41}}$

TMA 660 24/10 20

④

6a) SANT by $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

b) FALSKT $A^T A x = A^T b$ alltid lösbar

c) FALSKT $2\sqrt{2} = \text{avstånd mellan } p_1 = (1,3) \text{ och } p_2 = (3,1)$
men $\vec{p_1 p_2}$ ej vinkelrät mot l_1 & l_2

d) FALSKT $(A+B)(x' + x'') = \underbrace{Ax'}_{=0} + Ax'' + Bx' + \underbrace{Bx''}_{=b} \neq b$
Allmänhet

e) SANT by $(u \times v) \cdot u = 0 = (v \times u) \cdot v$
eftersom u & $v \perp u \times v = -v \times u$

f) SANT kolonnerna ej parallella $\Rightarrow \text{rang} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang} < 3$$

Alltså $\text{rang } A = 2 \Leftrightarrow \dim A = 1$

7) Se Kapitel 8 Sparr

8) Se Kapitel 2 LS Sparr
