MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2020-08-24 kl. 14.00 - 17.00

Tentamen | Telefonvakt:

Telefon:

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, (max 40). För betyg 5 krävs betyg 4 på den skriftliga tentamen och en godkänd muntlig examen.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Hur många lösningar har ekvationerna

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \\ 11 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, där $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 0), t \in \mathbb{R}$?

(e) $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$, där $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 0), t \in \mathbb{R}$? (10 p)

2. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (10 p)

(a) Avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ är linjär.

(b) Polynomet $p(z) = z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 6z + 7$ har exakt 3 reella nollställen.

(c) Determinanten av $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ är delbar med 3.

(d) Det finns oändligt många vektorer som är ortogonala mot $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$ och $(0, 0, 0, 1)$.

(e) Om det finns en matris V så att $VA = I$ (V är en vänsterinvers till A), så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(f) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har en högerinvers.

(g) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = 0$.

(h) Antag att A och B är ortogonala matriser. Då är AB en ortogonal matris.

(i) För alla komplexa tal z gäller att $e^z e^{\bar{z}}$ är ett reellt tal.

(j) För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i rummet gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

3. För vilka val av reella tal a och b är vektorerna $(a, 1, 2, 3)$, $(2, 2, 2, 2)$ och $(1, 2, 3, b)$ linjärt oberoende? (6 p)

4. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\Pi = \{3x + 4y + 5z = 0\}$.

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för f.

(b) Bestäm avbildningsmatriserna för $f^2 = f \circ f$ och $f^3 = f \circ f \circ f$. (10 p)

5. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller

$$A^2 - A = \mathbf{0}.$$

Vilka värden kan determinanten av A anta? (4 p)

Lycka till!

Elizabeth

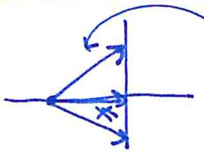
1 a) **∞ många lösn** ty $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ alltid lösbar &

parametrar i lösn. $\geq$ #kolonner − #rader = 1

b) **0 lösn.** ty $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right] \overset{(2)}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$ ← lösning saknas

c) **∞ många lösn** ty $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

d) **∞ många lösn** ty f linjär & $f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ om $\mathbf{x}\perp l$



avbildas alla på $\mathbf{x}$

(f proj.)

e) **1 lösn** ty $\underset{\underset{|2\mathbf{x}| = 2|\mathbf{x}|}{\parallel}}{|f(\mathbf{x})|} \leq |\mathbf{x}|$ sant omm $\mathbf{x}=\mathbf{0}$

---

2) a) FALSKT ty $f(-\mathbf{x}) = |-\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| \neq -1\mathbf{x}$

b) FALSKT ty 6 nollställen totalt, # icke reella nollställen är jämnt

c) SANT ty $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ← heltal

d) FALSKT ty $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Alltså spänner vektorerna upp $\mathbb{R}^4$. Endast $\mathbf{0}$ är ortogonal mot dem alla.

e) SANT se Lemma 3 s 132

f) FALSKT $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ saknar lösning

g) FALSKT ty $\mathbf{0} = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = -|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2$

$\iff \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ linj. ber.

h) SANT ty $(AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{=I \text{ ty } A \text{ orto}} B = B^T I B = \underbrace{B^T B}_{=I \text{ ty } B \text{ orto}} = I$

i) SANT ty $e^z e^{\bar z} = e^{z+\bar z} = e^{2\,\mathrm{Re}\, z}$ ← reellt

j) FALSKT ty $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\times\mathbf{w}$ ty $\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u}$ motsatt orientering mot $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$

3) Linjärt oberoende omm

$$x_1\begin{bmatrix}a\\1\\2\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\2\\3\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}a&2&1\\1&2&2\\2&2&3\\3&2&b\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$ endast triv lösn.

Lös:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}a&2&1&0\\1&2&2&0\\2&2&3&0\\3&2&b&0\end{array}\right] \underset{\text{byt rader}}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\2&2&3&0\\a&2&1&0\\3&2&b&0\end{array}\right] \begin{matrix}(-2)\\(-a)\\(-3)\end{matrix} \iff$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&-2&-1&0\\0&2-2a&1-2a&0\\0&-4&b-6&0\end{array}\right] \begin{matrix}(1-a)\\(-2)\end{matrix} \iff \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&-2&-1&0\\0&0&-a&0\\0&0&b-4&0\end{array}\right]$$

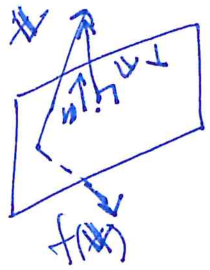
$1-2a-(1-a)=-a$

Om $a=0$ och $b=4$ ∞ många lösn $\iff$ vektorerna linj. ber.
Annars linjärt oberoende.

Linjärt oberoende omm $a\neq 0$ eller $b\neq 4$

---

4)



$\pi=\{3x+4y+5z=0\}$ $\quad n=(3,4,5)$

Minns $f(\mathbf{v})$ = spegling i π =

$\mathbf{v}-2\mathbf{v}_\perp$ ← ortogonal proj av $\mathbf{v}$ på n

$=\mathbf{v}-2\dfrac{\mathbf{v}\bullet n}{|n|^2}n$ $\quad$ Obs $|n|^2=n\bullet n=3^2+4^2+5^2=50$

Minns avbildningsmatris: $\quad A_f=\begin{bmatrix}f(e_1) & f(e_2) & f(e_3)\end{bmatrix}$

Nu $f(e_1)=(1,0,0)-2\dfrac{(1,0,0)\bullet(3,4,5)}{50}(3,4,5)=$

$\dfrac{1}{50}\Big((50,0,0)-\underbrace{2\cdot 3\cdot(3,4,5)}_{(18,24,30)}\Big)=\dfrac{1}{50}(32,-24,-30)$

$f(e_2)=(0,1,0)-2\dfrac{(0,1,0)\bullet(3,4,5)}{50}(3,4,5)=\dots=\dfrac{1}{50}(-24,18,-40)$

$f(e_3)=(0,0,1)-2\dfrac{(0,0,1)\bullet(3,4,5)}{50}(3,4,5)=\dots=\dfrac{1}{50}(-30,-40,0)$

Alltså är avbildningsmatrisen

$$A_f = \frac{1}{50}\begin{bmatrix}32 & -24 & -30\\ -24 & 18 & -40\\ -30 & -40 & 0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{25}\begin{bmatrix}16 & -12 & -15\\ -12 & 9 & -20\\ -15 & -20 & 0\end{bmatrix}}}$$

b) Obs $f \circ f = id$ ty f spegling

Alltså $\underline{\underline{A_{f\circ f} = I}}$

Vidare $f \circ f \circ f = f$

Alltså $\underline{\underline{A_{f\circ f\circ f}}} = A_f = \underline{\underline{\frac{1}{25}\begin{bmatrix}16 & -12 & -15\\ -12 & 9 & -20\\ -15 & -20 & 0\end{bmatrix}}}$

---

5) Obs $A = \mathbb{0}$ uppfyller $A^2 - A = \mathbb{0}$, dvs A kan vara $\mathbb{0}$-matrisen $\Rightarrow \det A = 0$.

Antag $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar.

Då

$$\mathbb{0} = A^2 - A \underset{\text{mult med } A^{-1}}{\Longrightarrow} \mathbb{0} = A^{-1}(A^2 - A) = A - I \Leftrightarrow A = I$$

$\Rightarrow \det A = 1.$

$\underline{\underline{\text{Alltså } \det A = 0 \text{ eller } \det A = 1}}.$
