MATEMATIK	**Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola	Datum: 2020-01-07 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen	Telefonvakt: Tobias Magnusson
	Telefon: 031-772 53 25

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för nollrummet till A, en bas för kolonnrummet till A, rangen av A och nolldimensionen av A.

(b) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$. (8 p)

2. Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$ och, givet $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara avbildningen $f \circ g$. Avgör om F är en linjär avbildning om

(a) $f : z \mapsto \text{Re } z + \text{Im} z$,

(b) $f : z \mapsto |z|$. (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) För alla $(m \times n)$-matriser A sådana att $m \leq n$ gäller att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

(c) För alla matriser A, B så att produkterna AB och BA är väldefinierade gäller att $AB = BA$.

(d) Antag att $\mathbf{u}$ är parallell med $(1, 2, 3)$ och ortogonal mot $(1, 2, 3)$. Då är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$, och låt A vara dess avbildningsmatris. Då är rangen av A mindre än nolldimensionen av A.

(f) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i rummet gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0.$$

4. Låt P vara en fyrhörning i planet med area 1 och låt Q vara den fyrhörning vars hörn är mittpunkterna på sidorna i P. Är det utifrån den givna informationen möjligt att bestämma arean av Q? Om svaret är ja, bestäm arean av Q. Annars ange ett motexempel. (6 p)

5. Låt ℓ_1 vara skärningslinjen mellan planen $\Pi_1 = \{x+y+z=1\}$ och $\Pi_2 = \{x+2y+3z=4\}$ och låt ℓ_2 vara linjen $\ell_2 : (0,1,-4)+t(1,2,1), t \in \mathbb{R}$. Bestäm avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2. (7 p)

6. Låt A vara $(n \times n)$-matrisen med matriselement $a_{ij} = \begin{cases} 1+x \text{ om } i=j \\ 1 \text{ om } i \neq j \end{cases}$.
Beräkna determinanten av A. (5 p)

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icketrivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. (a) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara geometriska vektorer i rummet. Definiera vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en högerorienterad ON-bas i rummet. Visa att $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$.

(c) Låt (u_1, u_2, u_3) och (v_1, v_2, v_3) vara koordinaterna för $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$ i den högerorienterade ON-basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Härled ett uttryck för $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ i $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

1a) $\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{x} \text{ så att } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ Lös $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \quad -3 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \quad -1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ \\ \\ \end{array} = [T|0]$$

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$. Då (II) $x_2 - s + t = 0 \Leftrightarrow x_2 = s - t$
$s, t \in \mathbb{R}$ (I) $x_1 - (s-t) + 3s + t = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2s - 2t$

Alltså $\mathrm{Null}\,A = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2s-2t \\ x_2 = s-t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{array} \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \right\} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Alltså en bas för Null A ges av $\{(-2,1,1,0), (-2,-1,0,1)\}$

Nolldim A = # vektorer i en bas = $\underline{\underline{2}}$

Minns: $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ pivotkolonner i $T \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ bas för Kolonn(A)
Alltså en bas Kolonn A ges av $\{(1,0,2,3), (-1,1,1,-2)\}$

Rang A = dim(Kolonn A) = # vektorer i bas = $\underline{\underline{2}}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \det A = 0$ ty Kolonn $A \neq \mathbb{R}^4$

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ty underdet. av A (stryk rad 1 & kolonn 2) av ordning 3. 0 ty rang rang $A = 2$

---

2) a) $F(x,y) = f \circ g(x,y) = f(x+iy) = x+y$. Alltså $F(x,y) = [1 \ 1]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Alltså $F(\mathbf{x})$ på formen $A\mathbf{x}$. Alltså F linjär.

b) $F(x,y) = f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$. Obs $F(-1,0) = \sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1\,F(1,0) = -1$
Alltså $F(\lambda(x,y)) \neq \lambda F(x,y)$ i allmänhet. Alltså F ej linjär.

---

3 a) FALSKT lösbart alla $\mathbf{b}$ omm rang $A = m$

b) FALSKT ty $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8+4-6-6) = 0$

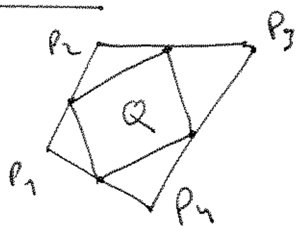
c) FALSKT matrisprodukt ej kommutativ

d) SANT Om $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så är $\mathbf{0}$ ende vektorn som är $\parallel \mathbf{v}$ & $\perp \mathbf{v}$

e) SANT Rang A = 1 ty $f(\mathbb{R}^3) = l$ Nolldim A = 2

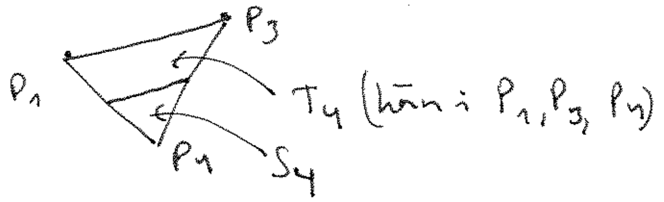
f) SANT ty $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}$ ligger i ett plan

4) Antag P är hörn P_1, P_2, P_3, P_4



För varje hörn låt T_j vara triangeln med hörn i P_j och låt S_j vara triangeln med hörn i P_j och de två närliggande mittpunkterna.

Ex:



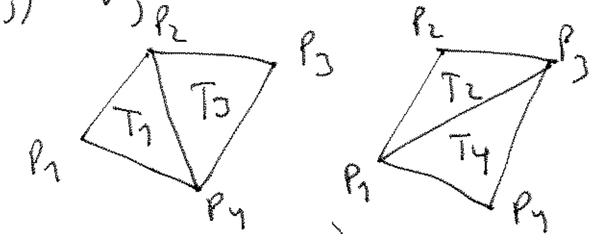
Obs: $\text{Area}(S_4) = \frac{1}{2}\left| \left| \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_4P_1} \; \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_4P_3} \right| \right| =$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left| \left| \overrightarrow{P_4P_1} \; \overrightarrow{P_4P_3} \right| \right| = \frac{1}{4}\text{Area}(T_4)$

På samma sätt $\text{Area}(S_j) = \frac{1}{4}\text{Area}(T_j) \quad \forall j$

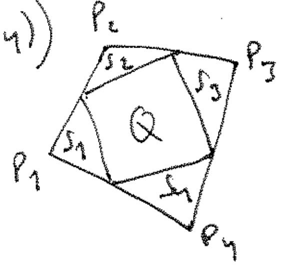
Obs $\text{Area}(P) = \text{Area}(T_1) + \text{Area}(T_3)$

$(*) \qquad = \text{Area}(T_2) + \text{Area}(T_4)$



och $\underline{\underline{\text{Area}(Q)}} = \text{Area}(P) - (\text{Area}(S_1) + \dots + \text{Area}(S_4))$

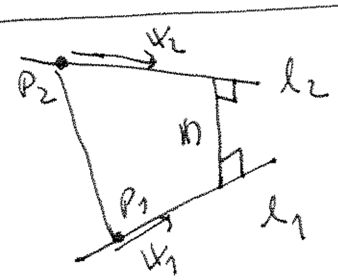
$= \text{Area}(P) - \frac{1}{4}\underbrace{(\text{Area}(T_1) + \dots + \text{Area}(T_4))}_{= 2\,\text{Area}(P)\ (*)} =$



$\text{Area}(P) - \frac{1}{4} \cdot 2\,\text{Area}\,P = \frac{1}{2}\text{Area}(P) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

---

5)



Strategi: hitta $n \perp v_1, v_2$. Då är avståndet mellan l_1 & l_2 längden av orto proj av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på n.

Bestäm parametrisering av l_1:

l_1 är lösningen till $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \end{cases} \; -1 \iff \begin{cases} x+y+z=1 & (I) \\ y+2z=3 & (II) \end{cases}$

Sätt $z = s \in \mathbb{R}$. Då (II): $y + 2s = 3 \iff y = 3-2s$

(I) $x + 3 - 2s + s = 1 \iff x = s - 2$

Alltså $\begin{cases} x = -2+s \\ y = 3-s2 \\ z = s \end{cases} \; s \in \mathbb{R}$

dvs $\underline{l_1 = (-2,3,0) + s(1,-2,1)}^{\,s\in\mathbb{R}}$ Har $\underline{l_2 = (0,1,-4) + t(1,2,1)}^{\,t\in\mathbb{R}}$

Kan nu välja $v_1 = (1,-2,1)$, $v_2 = (1,2,1)$ $\quad v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4,0,4)$

Välj t ex $n = (1,0,-1)$. Kan välja $P_1 = (-2,3,0)$, $P_2 = (0,1,-4)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = (2,-2,-4)$

Nu: $\underline{\underline{\text{avst.}(l_1,l_2)}} = \left| \text{orto proj av } \overrightarrow{P_1P_2} \text{ på } n \right| = \left| \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n}{|n|^2} n \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n|}{|n|^2}|n| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n|}{|n|} =$

$\frac{|(2,-2,-4)\cdot(1,0,-1)|}{\sqrt{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$

TMA660 7/1 20

6)
$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} n+x & n+x & \cdots & n+x \\ 1 & 1+x & & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix} =$$

Legg varje rad nr 2,..,n till rad nr 1

bryt ut n+x från rad 1

$$(n+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & & 1 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = (n+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

Legg -1·rad 1 till varje annan rad

diagonal matris

$$(n+x)\,1\cdot x\cdots x = (n+x)\,x^{n-1}$$

---

7) Se boken kapitel 2.4

---

8) a, ~~[illegible]~~ se boken kapitel 5.2

b,c) se boken kapitel 5.4
