MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2019-08-26 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Olof Giselsson
Telefon: 031-772 5325

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna determinanten av $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$. (6 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm nollrummen och kolonnrummen till A, B och C. Beskriv dessa geometriskt.

(6 p)

3. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara funktionen $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Avgör om f är linjär. Bestäm i så fall dess avbildningsmatris. (6 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att A och B är $(m \times n)$-matriser sådana att $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Då är $A = B$.

(b) Avståndet mellan planen $\Pi_1 = \{x + y + z = 0\}$ och $\Pi_2 = \{x + y + z = 1\}$ är 1.

(c) Vektorerna $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$ och $(0, 0, 0, 1)$ är linjärt oberoende.

(d) Det finns linjära ekvationssystem som har exakt två lösningar.

(e) Determinanten av $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ är 3.

(f) Den komplexa exponentialfunktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ är surjektiv.

5. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\Pi = \{3x + 4y + 5z = 0\}$ och låt A vara avbildningsmatrisen till f. Bestäm för vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ det finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. För vart och ett av dessa λ beskriv vilka vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. (6 p)

6. (a) Bestäm alla polynom av grad ≤ 2, det vill säga på formen $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, vars graf $\{(x, p(x))\}$ går genom punkterna $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$ och $P_3 = (3, 4)$.

(b) Bestäm alla polynom av grad ≤ 3, det vill säga på formen $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, vars graf $\{(x, p(x))\}$ går genom punkterna $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$ och $P_3 = (3, 4)$. (6 p)

7. (a) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i rummet. Definiera vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en högerorienterad ON-bas i rummet. Visa att $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. (6 p)

8. (a) Låt A vara en $(m \times n)$-matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \tag{1}$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$.

(b) Finns det alltid en entydig lösning till (1)? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det med motexempel. (8 p)

Lycka till!
Elizabeth

TMA660 Linjär algebra och geometri, 26/8 19, lösningar (1)

1) a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. rad 3}}{=} (-1)^{3+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kol. 2}}{=}$$

$$1\cdot(-1)^{2+2}\cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kol. 1}}{=} 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2(-5+4) = -2\cdot(-1) = \underline{\underline{2}}$$

b) Obs, ekv. systemet kan skrivas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom $\det A \neq 0$ har detta endast den triviala lösningen $\underline{\underline{\mathbf{x} = \mathbf{0}}}$.

---

2) Minns $\text{Noll}(A) = \{\mathbf{x} \text{ så att } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, $\text{Kolonn}(A) = \text{span}(\text{kolonner i } A)$.
Eftersom A, B, C 2×3, så nollrum i $\mathbb{R}^3$, kolonnrum i $\mathbb{R}^2$.

Nollrum:
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ uppfylls av alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, dvs $\underline{\underline{\text{Noll}(A) = \mathbb{R}^3, \text{ rummet självt}}}$
- $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 = t \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

  Alltså $\underline{\underline{\text{Noll}(B) = \text{linjen } l: t(1,0,0)\ t\in\mathbb{R}, \text{ en linje i rummet}}}$
- $C\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dvs $\underline{\underline{\text{Noll}(C) = \text{planet } \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}}}$ $\underline{\underline{\text{– ett plan i rummet}}}$.

Kolonnrum:
- $\underline{\underline{\text{Kolonn}(A)}} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\underline{\{\mathbf{0}\}, \text{ en punkt i planet } \mathbb{R}^2}}$
- $\underline{\underline{\text{Kolonn}(B)}} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$, dvs $\underline{\underline{\text{planet självt}}}$

  2 linjärt obe. vektorer spänner upp $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^2$
- $\underline{\underline{\text{Kolonn}(C)}} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\text{linjen } t(1,1)\ t\in\mathbb{R}}}$ $\underline{\underline{\text{– en linje i planet}}}$.

---

3)
$$f(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} x_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} x_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} x_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}_{A_{11}} x_1 - \underbrace{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})}_{A_{21}} x_2 + \underbrace{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}_{A_{31}} x_3$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Det följer att $\underline{\underline{f(\mathbf{x}) \text{ är linjär}}}$ (eftersom den är på formen matris $\cdot\, \mathbf{x}$)

och avbildningsmatrisen är:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \end{bmatrix}}}$$

TMA 660 26/8 19 (2)

4 a) SANT, obs tag $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j = (0,\dots,\overset{\text{plats } j}{1},\dots,0)$, då $A\mathbf{x} = B\mathbf{x} \Leftrightarrow$ j:te kolonner samma

b) FALSKT, Tag t ex $P=(0,0,0)\in\Pi_1$, $Q=\frac{1}{3}(1,1,1)\in\Pi_2$. Då
avstånd $(\Pi_1,\Pi_2) \leq$ avstånd $(P,Q) = \frac{1}{3}|(1,1,1)| = \frac{1}{3}\sqrt{3} < 1$

c) SANT, ty $\begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 2&1&0&0\\ 3&2&1&0\\ 4&3&2&1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

d) FALSKT, linjära ekvationssystem har 0, 1, eller ∞ många lösn

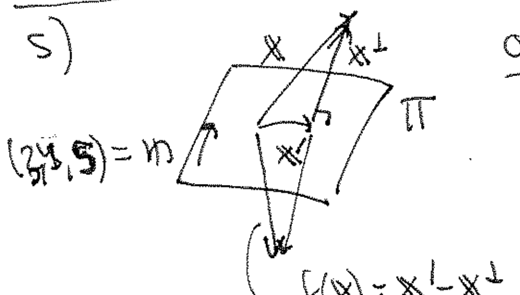
e) FALSKT, $\begin{vmatrix} 1&2&11\\ 3&4&7\\ 2&2&2 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\begin{vmatrix} 1&2&11\\ 3&4&7\\ 1&1&1 \end{vmatrix}}_{\text{heltal}} = 2\cdot$heltal, alltså ej $= 3$

f) FALSKT, ty för alle $z\in\mathbb{C}$ gäller $e^z \neq 0$.

7) a) se kap 5.2 b) se kap 5.4) Sparr

8) se kap 7.8 Sparr + hemsidan

5)



Obs (minns) $\mathbf{x}$ har entydig uppdelning $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}^\perp$
där $\mathbf{x}'$ parallell med Π, $\mathbf{x}^\perp$ ortogonal mot Π
Då $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}^\perp$

Obs: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}^\perp \,//\, \mathbf{x}' + \mathbf{x}^\perp = \mathbf{x}$ omm $\mathbf{x}'=\mathbf{0}$ eller $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{0}$

Om $\mathbf{x}' = 0$ så $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ Om $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{0}$ så $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Alltså $\underline{\lambda = \pm 1}$

Fall $\underline{\lambda = 1} \Leftrightarrow \mathbf{x}^\perp = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{\mathbf{x}\text{ parallell med }\Pi}$

$\underline{\lambda = -1} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{\mathbf{x}\text{ ortogonal mot }\Pi}$ ($\mathbf{x}$ på formen $t\mathbf{n} = t(3,4,5)$ $t\in\mathbb{R}$)

6)b) Att grafen till $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ går genom P_1, P_2, P_3

innebär: $\begin{cases} P_1=(1,2) : a_3+a_2+a_1+a_0 = 2 \\ P_2=(2,3) : 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 = 3 \\ P_3=(3,4) : 27a_3+9a_2+3a_1+a_0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&2&4&8\\ 1&3&9&27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\3\\4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&2\\ 1&2&4&8&3\\ 1&3&9&27&4 \end{array}\right] (-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&2\\ 0&1&3&7&1\\ 0&2&8&26&2 \end{array}\right] (-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&2\\ 0&1&3&7&1\\ 0&0&2&12&0 \end{array}\right] \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&2\\ 0&1&3&7&1\\ 0&0&1&6&0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{I}\\ \text{II}\\ \text{III} \end{array}$

Sätt $a_3 = t$ då $a_2 = -6t$ (III) & (II): $a_1 + 3(-6t) + 7t = 1 \Leftrightarrow a_1 = 1 + 11t$
& (I) $a_0 + (1+11t) + (-6t) + t = 2 \Leftrightarrow a_0 = 1 - 6t$

$\Leftrightarrow [a_0, a_1, a_2, a_3] = [1-6t, 1+11t, -6t, t]$, dvs $\underline{p(x) = tx^3 - 6tx^2 + (1+11t)x + 1 - 6t,\ t\in\mathbb{R}}$

a) motsvarar att $a_3 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow a_2 = 0,\ a_1 = 1,\ a_0 = 1$,
dvs $\underline{p(x) = x+1}$. (Obs, detta kan ses direkt. Se direkt att
$p(x) = x+1$ går genom punkterna & vet att 3 punkter entydigt bestämmer p.