MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2019-01-07 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Johannes Borgqvist
Telefon: 031-772 5325

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna determinanterna av A och B.

(b) Bestäm kolonnrummen till A och B.

(c) Bestäm rang och nolldimension för A och B.

(d) Låt $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ och $f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara de linjära avbildningar vars avbildningsmatriser är A respektive B. Avgör om f_A och f_B är surjektiva, injektiva och bijektiva. (7 p)

2. Låt P vara ett parallellogram. Visa att diagonalerna i P är lika långa om och endast om P är en rektangel. (4 p)

3. För f given nedan avgör om f är linjär och bestäm i så fall avbildningsmatrisen.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \mapsto$ ortogonal projektion av $\mathbf{u}$ på $(1, 2, 3)$. (7 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att A och B är (2×2)-matriser. Då gäller $(A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Antag att A är en (5×4)-matris av rang 4. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar.

(c) Vektorerna $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$, $(1, 0, 2)$ och $(3, 3, 4)$ är linjärt beroende.

(d) Polynomet $p(z) = z^6 + z^5 - 3z^2 + 4 = 0$ har exakt fem reella nollställen.

(e) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(f) Antag att $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ båda är lösningar till $A\mathbf{x} = (1, 1, 1)$. Då är alla linjärkombinationer av $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ lösningar till $A\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

5. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller

$$A^2 + A = \mathbf{0}.$$

(a) Är det utifrån den här informationen möjligt att avgöra om A är inverterbar? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt.

(b) Är det utifrån den här informationen möjligt att bestämma determinanten av A? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt. (6 p)

6. Låt ℓ vara linjen i $\mathbb{R}^2$ given av ekvationen $x_1 = 0$ och låt P vara punkten $(7, 0)$. Vidare låt $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kommentar En sådan avbildning kallas *skjuvning*.

(a) Vad är avståndet mellan P och ℓ?

(b) Visa att bilden $f_A(\ell) = \{f_A(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \ell\}$ av ℓ under f_A är linjen given av ekvationen $x_1 - x_2 = 0$.

(c) Vad är avståndet mellan P och $f_A(\ell)$?

(d) Bestäm avbildningsmatrisen för $f_A^n = f_A \circ f_A \circ \cdots \circ f_A$ (n gånger).

(e) Vad är bilden av $f_A^n(\ell)$?

(f) Vad är avståndet mellan P och $f_A^n(\ell)$? Vad händer då $n \to \infty$? (8 p)

7. Låt A vara en $n \times n$-matris.

(a) Definiera vad det innebär att A är inverterbar.

(b) Visa att om A har en invers så är denna entydigt bestämd. (6 p)

8. Betrakta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp},$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

TMA 660 Linjär algebra och geometri 7/1 19, lösningar (1)

1. a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kolonn 3}}{=} (-1)^{1+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} \underset{\text{faktor 2 kolonn 2 \& 3}}{=} 2\cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$

$4(-12+28+16-24-32+7) = 4\cdot(-17) = \underline{\underline{-68}}$

$\det B = \underline{\underline{0}}$ ty kolonn 1 & 3 är lika.

b) $\det A \neq 0 \iff$ A's kolonner linjärt oberoende $\iff$ Kolonn $A = \underline{\underline{\mathbb{R}^4}}$

Obs kolonn 1, 2, 4 i B är samma som i A $\Rightarrow$ dessa linjärt oberoende ty kolonnerna i A är. Kolonn 3 i B = kolonn 1.

Alltså Kolonn B = $\underline{\underline{\text{span}((1,3,5,7),(2,4,0,8),(1,2,5,8))}}$

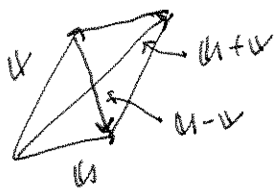
c) Kolonn $A = \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ rang $A = \underline{\underline{4}}$, nolldim $A = \underline{\underline{0}}$

Kolonn B = span av 3 linjärt oberoende vektorer $\Rightarrow$ rang $B = \underline{\underline{3}}$ nolldim $B = 4-3 = \underline{\underline{1}}$

d) $\det A \neq 0 \iff \underline{\underline{f_A \text{ inj, surjektiv \& bijektiv}}}$

$\det B = 0 \iff \underline{\underline{f_A \text{ ej} - \text{"} -}}$

2. P



Antag att P spänns av u & v. Då definieras diagonalerna av $u+v$ & $u-v$.

P rektangel betyder per def att sidorna är vinkelräta

dvs $u \perp v \iff u \bullet v = 0 \iff$

$|u+v|^2 = (u+v)\bullet(u+v) = u\bullet u + 2u\bullet v + v\bullet v = u\bullet u - 2u\bullet v + v\bullet v = (u-v)^2 = |u-v|^2$

$\iff |u+v| = |u-v|$, dvs diagonalerna är lika långa.

3 a) Ej linjär. Tag t ex $x = (1,0,0)$ och $x' = -x = (-1,0,0)$.

Då $f(x+x') = f(0) = |0| = 0$ men

$f(x)+f(x') = |x|+|x'| = 1+1 = 2$ Alltså $f(x+x') \neq f(x)+f(x')$ i allmänhet. Alltså ej linjär.

b) Minns: orto proj av u på $v = (1,2,3)$ ges av $\frac{u\bullet v}{|v|^2} v$

Identifiera v med kolonnvektorn $\begin{bmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{bmatrix}$ och skalärer λ med $[\lambda]$.

Kan då skriva $u\bullet v = v\bullet u = v^T u$ och $\lambda v = [v][\lambda]$

Alltså $f(u) = \frac{1}{|v|^2} u\bullet v\, v = \frac{1}{|v|^2} v v^T u$. Alltså f linjär m avb.matris

$A = \frac{1}{|v|^2} v v^T$. Nu $|v|^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14$ $\quad v v^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Alltså $A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

4 a) FALSKT ty $AB \neq BA$ i allmänhet.

b) FALSKT ty nolldim A = # kolonner − rang $A = 4-4 = 0$

c) SANT 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ är alltid linjärt beroende

d) FALSKT polynom med reella koeff, om z icke-reellt nollställe så är $\bar{z}$ nollställe nu p grad 6 kan de inte ha exakt ett ~~icke~~-reellt nollställe

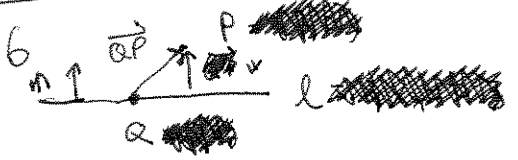
e) FALSKT t.ex. $e_2\times(e_1\times e_2) = e_2\times e_3 = e_1$ om e_1, e_2, e_3 ON-bas

f) FALSKT om $Ay=(1,1,1)$ & $Az=(1,1,1)$ så $A(y+z)=(2,2,2)$ t.ex.

---

5 $A=0$ och $A=-I$ uppfyller båda $A^2+A=0$. Alltså är det inte möjligt att avgöra om A är inverterbar, och därmed inte heller möjligt att bestämma determinanten.

---

6 

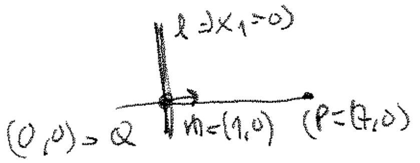
Avstånd mellan P & l i $\mathbb{R}^2$

Tag $Q\in l$, & $n\perp l$

Då avst.(P,l) = längd av orto proj av $\vec{PQ}$ på n

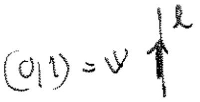
$$= \left|\frac{\vec{PQ}\cdot n}{|n|^2}\, n\right| = \frac{\vec{PQ}\cdot n}{|n|}$$

a) $l=\{x_1=0\}$, en normalvektor ges t ex av $(1,0)$, välj $Q=(0,0)$



$$\text{avst.}(P,l) = \frac{\vec{PQ}\cdot n}{|n|} = \frac{(7,0)\cdot(1,0)}{|(1,0)|} = \frac{7}{1} = \underline{\underline{7}}$$

b) Tag $v \parallel l$, t.ex. $v=(0,1)$. Då $Av=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow$



$l=\{tv,\ t\in\mathbb{R}\}$ avbildas på $l^1=\{tAv,\ t\in\mathbb{R}\}=\{t(1,1),\ t\in\mathbb{R}\}$

Skriv l^1 på affin form: $x_1=t,\ x_2=t$ ger $l^1=\{x_1-x_2=0\}$

c) en normalvektor till $l^1=\{x_1-x_2=0\}$ är t.ex. $n=(1,-1)$, $Q=(0,0)\in l^1$

$$\text{avst.}(P,l^1) = \frac{|\vec{PQ}\cdot n|}{|n|} = \frac{|(7,0)\cdot(1,-1)|}{|(1,-1)|} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{2}}}}$$

d) <u>Påst</u> $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}}}$ ok om $n=1$. Antag sant om $n=p$:

Då $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{p+1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^p=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&p\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&p+1\\0&1\end{bmatrix}$. Alltså sant för $n=p+1$.

Påst följer med induktion. Avb. matrisen för f_A^n är $\underline{\underline{A^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}}}$

e) $f_A^n(l)=f_A^n(\{tv,\ t\in\mathbb{R}\})=\{tA^n v,\ t\in\mathbb{R}\}=\left\{t\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}=$

$\left\{t\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}$. Bilden är $\underline{\text{linjen } l^n = t(n,1),\ t\in\mathbb{R}}$

f) En normalvektor till l^n är $n=(1,-n)$ t.ex. $Q=(0,0)\in l^n$

$$\text{avst.}(P,l^n)=\frac{|\vec{PQ}\cdot n|}{|n|}=\frac{(7,0)\cdot(1,-n)}{|(1,-n)|}=\underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{1+n^2}}}}\longrightarrow 0 \text{ då } n\to\infty$$

---

7 Se Sparr kap 7.5 (Def 5 och Lemma 2)

8 Se Sparr kap 4.1 (Sats 1) och extramaterial på hemsidan