MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2018-08-27 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Carl Lundholm
Telefon: 031-772 67 92

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$.

(a) Avgör om $\mathbf{b}$ ligger i kolonnrummet till A.

(b) Lös ekvationssystemet $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. (7 p)

2. Beräkna determinanten av $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. (6 p)

3. Låt P vara ett parallellogram. Visa att sidorna i P är lika långa (d v s P är en romb) om och endast om diagonalerna i P är vinkelräta. (6 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då spänner $\mathbf{u}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ upp $\mathbb{R}^3$.

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har en vänsterinvers.

(c) Antag att A är en (4×6)-matris av rang 2. Då är alla underdeterminanter till A av ordning 4 lika med 0.

(d) Det finns polynom av grad 7 med reella koefficienter som har exakt 5 reella nollställen (räknade med multiplicitet).

(e) Vektorn $(1, 1, -1)$ ligger i nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(f) Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser. Antag att $|AB| = 0$. Då gäller att $|A| = 0$ eller $|B| = 0$.

5. Låt $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara avbildningen $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, där (y_1, y_2, y_3, y_4) definieras genom

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Avgör om f är en linjär avbildning och bestäm i så fall dess avbildningsmatris. (6 p)

6. Låt $P = (1, 0, -1)$ och $Q = (3, 2, 3)$. Bestäm alla tänkbara punkter R i planet $\Pi = \{x - 3y + z = 0\}$ så att triangeln med hörn i P, Q och R är rätvinklig. (7 p)

7. (a) Visa att matrismultiplikation är associativ, det vill säga att $(AB)C = A(BC)$.

(b) Visa att kryssprodukt inte är associativ, det vill säga att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet. (6 p)

8. (a) Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Givet $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, låt

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'.$$

Visa att $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

(b) Använd detta för att visa att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ har en entydig uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp},$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth

1 a) Se om $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösbart:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\2&-1&3&-7\\2&1&1&-1\\2&-1&3&-7\end{array}\right]\begin{array}{c}-2\\ \\ \\ \\ \end{array}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-3&3&-9\\0&-1&1&-3\\0&-3&3&-9\end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ -3\\ \\ \end{array}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&1&-3\\0&0&0&0\end{array}\right]\cdot(-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{c}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\ \\ \\ \end{array}$$

trappform

Ingen ekvation på formen $0=c$ där $c\neq 0$. Alltså $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösbart.
Alltså $\underline{\mathbf{b}\in \text{Kolonn}(A)}$.

b) Eftersom $\mathbf{b}\in\text{Kolonn}(A)$ så har normalekv. $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ samma lösn. som $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. För att hitta dessa lös det trappformade systemet ovan.
Sätt $x_3=s$. Då ekv (II): $x_2-s=3\Leftrightarrow x_2=3+s$
Nu ekv (I): $x_1+(3+s)=1\Leftrightarrow x_1=-2-s$

Alltså lösn. $\begin{cases}x_1=-2-s\\ x_2=3+s\\ x_3=s\end{cases}\quad s\in\mathbb{R}$

2)
$$\begin{vmatrix}1&2&2&3&3&3\\2&2&3&3&3&4\\2&3&3&3&4&4\\3&3&3&4&4&4\\3&3&4&4&4&4\\3&4&4&4&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&3&3&3\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{5+3}\begin{vmatrix}1&2&3&3&3\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\end{vmatrix}=$$

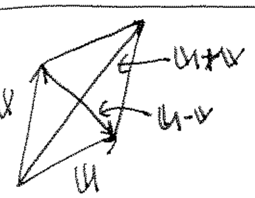
utveckla längs rad 5

$$\begin{vmatrix}0&2&3&3&2\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3&3&2\\1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&3&1&2\\1&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&1&2\\1&0&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=$$

utv. längs kolonn 1; kolonn 1

$$\begin{vmatrix}0&1&5\\1&0&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\underbrace{\begin{vmatrix}1&5\\-1&1\end{vmatrix}}_{1+5}=\underline{\underline{-6}}$$

kolonn 1

3)


Antag att parallellogrammet P spänns av $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$.
Då är diagonalerna givna av $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ & $\mathbf{u}-\mathbf{v}$.
Att diagonalerna är ortogonala är ekvivalent med att

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}\perp\mathbf{u}-\mathbf{v}\underset{\text{def av }\perp}{\Leftrightarrow}0=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{v})\underset{\text{räkneregler }\bullet\text{-prod}}{=}\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}-\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}=|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$$

$\Leftrightarrow |\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|$, dvs att sidorna i P är lika långa.

4)a) SANT, ty $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ koordinater i basen $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$.

b) FALSKT, för A kvadratisk: A har vänsterinvers $\Leftrightarrow$ A inv.bar.
Här är det $=0$.

c) SANT, ty rang = ordning av största nollskilda underdeterminant.

d) SANT, ty tex $p(z) = (z-1)^5(z-i)(z+i)$

e) SANT, ty $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

f) SANT, ty $0=|AB|=|A||B| \Rightarrow |A|=0$ eller $|B|=0$

---

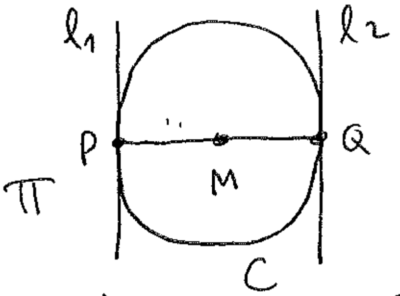
5) Obs: $\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_3&x_2+2x_4\\3x_1+4x_3&3x_2+4x_4\end{bmatrix}$

Det följer att $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$

Speciellt är $f(X)$ på formen $f(X)=AX$. Alltså är f en linjär avbildning med avbildningsmatris $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{bmatrix}$

---

6) Obs $1-1=3-3\cdot 2+3=0 \Rightarrow P,Q\in\Pi$



Låt M = mittpkt på sträckan PQ

l_1 = linje i Π genom P $\perp$ mot $\vec{PQ}$

l_2 = — " — Q — " —

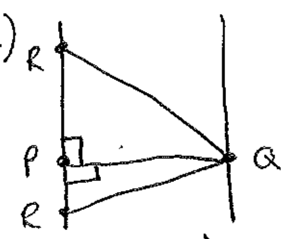
C = cirkel i Π m centrum M, radie $|\vec{PM}|$

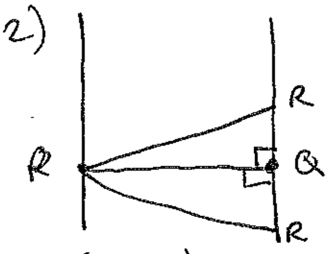
Då kan vi följande möjliga placeringar för M:

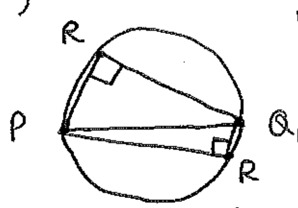
1) $R\in l_1$, $R\neq P$. Då är vinkeln mellan $\vec{PQ}$ & $\vec{PR}$ rät

2) $R\in l_2$, $R\neq Q$ — " — $\vec{QP}$ & $\vec{QR}$ — " —

3) $R\in C$, $R\neq P,Q$ — " — $\vec{PR}$ & $\vec{QR}$ — " —

1) 

2) 

3) 

$|\vec{PM}|=\frac{1}{2}|\vec{PQ}|=\frac{1}{2}|(2,2,4)|=|(1,1,2)|=\sqrt{6}$

Räkna: $\vec{PQ}=(3,2,3)-(1,0,-1)=(2,2,4)$ $M=P+\frac{1}{2}\vec{PQ}=(1,0,-1)+\frac{1}{2}(2,2,4)=(2,1,1)$

Obs: $l_1,l_2\perp\vec{PQ}$ & Π's normalriktning $n=(1,-3,1)$. För att få en riktningsvektor v, betrakta $\vec{PQ}\times n=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&2&4\\1&-3&1\end{vmatrix}=(14,2,-8)=2(7,1,-4)$

Låt $v=(7,1,-4)$

Alternativen:

1) $R\in l_1\setminus\{P\}$, dvs $R=P+tv=(1,0,-1)+t(7,1,-4)$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) $R\in l_2\setminus\{Q\}$, dvs $R=Q+sv=(3,2,3)+s(7,1,-4)$, $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

3) $R\in C\setminus\{P,Q\}$ dvs $(x,y,z)\in\Pi$ som uppfyller $|(x,y,z)-M|^2=|\vec{PM}|^2 \Leftrightarrow$ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$ och $x-3y+z=0$ (och $(x,y,z)\neq P,Q$)

7a) Se Sparr kap 7.2 b) Sparr kap 5 | 8) Sparr kap 4.1 + ant. på hemsidan