**MATEMATIK** **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-08-21 kl. 8.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Gustav Kettil
Telefon: 031-772 5325

# TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1**. Låt $T$ vara tetraedern med hörn $P_1 = (-1,-1,-1)$, $P_2 = (1,0,0)$, $P_3 = (0,1,0)$ och $P_4 = (0,0,1)$. Vidare låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara skalning med en faktor 3.

(a) Bestäm volymen av $T$.
**Tips**: Använd att volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea $B$ och höjd $h$ är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(b) Bestäm areorna av $T$'s sidor.

(c) Bestäm längderna av $T$'s kanter.

(d) Bestäm avbildningsmatrisen för $f$.

(e) Beskriv bilden $f(T)$ av $T$ under $f$. Vad är volymen av $f(T)$?

(f) Vad är areaorna av $f(T)$'s sidor? Vad är längderna av $f(T)$'s kanter?

(9 p)

**2**. Låt $p(z) = z^6 + 2z^4 + z^2$.

(a) Skriv $p$ på formen $c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$, där $c, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är komplexa tal.

(b) Faktorisera $p$ reellt, det vill säga skriv $p$ som en produkt av polynom med reella koefficienter och av så liten grad som möjligt.

(c) Hur många reella nollställen har $p(z)$?

(d) Hur många rent imaginära nollställen, d v s på formen $ai$, där $a \in \mathbb{R}$, har $p(z)$?(7 p)

**3**. (a) Hitta en minsta kvadratlösning $\hat{\mathbf{x}}$ till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Beräkna felet $|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|$. (6 p)

**4**. Låt $A$ och $B$ vara $(n \times n)$-matriser där $n \geq 2$.

(a) Gäller det att om $|AB| = 0$ så är $|BA| = 0$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel.

(b) Gäller det att om $AB = \mathbf{0}$ så är $BA = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel. (4 p)

**5**. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock $\geq 0$. (6 p)

(a) Antag att $A$ är en $(6 \times 6)$-matris av rang 4. Då är alla underdeterminanter av ordning 4 lika med noll.

(b) Vektorn $(4, -3)$ är vinkelrät mot linjen $\ell : (1, 2) + t(3, 4), t \in \mathbb{R}$.

(c) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $\ell = \{2x+3y = 4\}$. Då är $f$ en linjär avbildning.

(d) Vektorn $(1, 2, 3)$ är parallell med planet $\{x + 2y + 3z = 0\}$.

(e) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har en vänsterinvers.

(f) Det finns oändligt många linjära avbildningar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller att $f(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$, $f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$ och $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$.

**6**. Låt $P$ och $Q$ vara punkter i rummet och låt $\Pi$ vara planet $\Pi = \{x + 2y + 3z = 0\}$. Vidare låt $P'$ och $Q'$ vara den ortogonala projektionen av $P$ respektive $Q$ på $\Pi$. Visa att avståndet mellan $P$ och $Q$ är större än eller lika med avståndet mellan $P'$ och $Q'$. När råder likhet? (6 p)

**7**. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

**8**. Låt $A$ vara en $m \times n$-matris och låt $T$ vara en trappformad matris, ekvivalent med $A$, d v s $T$ kan fås genom elementära radoperationer på $A$.

(a) Visa att rangen av $A$ är lika med antalet pivotelement i $T$.

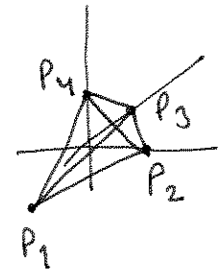
(b) Visa att nolldimensionen av $A$ är lika med $n$ minus antalet pivotelement i $T$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth

TMA660 Linjär algebra och geometri 21/8 17, lösningar 

1 T:




Obs 6 kanter: $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,0) - (-1,-1,-1) = (2,1,1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = \quad \dots \quad = (1,2,1)$

$\overrightarrow{P_1P_4} = \quad \dots \quad = (1,1,2)$

$\overrightarrow{P_2P_3} = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$

$\overrightarrow{P_2P_4} = (0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{P_3P_4} = (0,0,1) - (0,1,0) = (0,-1,1)$

a) $\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{6}\left| \left| \overrightarrow{P_1P_2} \ \ \overrightarrow{P_1P_3} \ \ \overrightarrow{P_1P_4} \right| \right| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{6}\left| 8+1+1-2-2-2 \right| = \frac{1}{6}\cdot 4 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

b) Obs: 4 sidor $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_2P_3P_4$

$\mathrm{Area}(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right|$

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-2,\ 1-2,\ 4-1) = (-1,-1,3)$

$\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right| = \sqrt{(-1,-1,3)\cdot\overbrace{(-1,-1,3)}^{\text{samma}}} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11} \Rightarrow \mathrm{Area}(P_1P_2P_3) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{11}}{2}}}$

Av symmetriskäl / på samma sätt $\mathrm{Area}(P_1P_2P_4) = \mathrm{Area}(P_1P_3P_4) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{11}}{2}}}$

$\mathrm{Area}(P_2P_3P_4) = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4} \right|$

$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,1) \Rightarrow \dots \ \mathrm{Area}(P_2P_3P_4) = \underline{\underline{\sqrt{3}/2}}$

c) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(2,1,1)\cdot(2,1,1)} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$ Symmetri / samma argument $\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$

$\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \left|(-1,1,0)\right| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$ — " — $\left|\overrightarrow{P_2P_4}\right| = \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

d) $A_f = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (alla vektorer skalas med en faktor 3)

$f(\overrightarrow{OP_j}) = 3\,\overrightarrow{OP_j} \Rightarrow f(T)$ är tetraedern med hörn i

$3P_1 = \underline{\underline{(-3,-3,-3)}}$, $3P_2 = \underline{\underline{(3,0,0)}}$, $3P_3 = \underline{\underline{(0,3,0)}}$, $3P_4 = \underline{\underline{(0,0,3)}}$

Volymen skalas med en faktor $3^3 = 27$. $\therefore \mathrm{Vol}(f(T)) = 27\cdot\frac{2}{3} = \underline{\underline{18}}$

e) Area skalas med en faktor $3^2 = 9$. Sidorna har area $\underline{\underline{9\sqrt{11}/2}}$ resp. $\underline{\underline{9\sqrt{3}/2}}$.

Längd skalas med en faktor 3. Kanterna har längd $\underline{\underline{3\sqrt{6}}}$ resp $\underline{\underline{3\sqrt{2}}}$.

TMA 660 21/8 17



2 a) Obs: kan bryta ut $z^2$ $\therefore$ $p(z)=z^2(z^4+2z^2+1)$

Obs vidare $z^4+2z^2+1=(z^2+1)^2$ och $z^2+1=(z-i)(z+i)$

Alltså $p(z)=z\cdot z\cdot(z-i)\cdot(z-i)(z+i)(z+i)$ $\left(=z^2(z-i)^2(z+i)^2\right)$

b) Obs: $z^2+1$ kan inte faktoriseras vidare reellt.

$\therefore$ $p(z)=z^2(z^2+1)^2$ reell faktorisering.

c) Det enda reella nollstället är $0$ (med multiplicitet 2).

d) Alla nollställen till $p$ är på formen $ai$, alltså rent imaginära. dvs $p(z)$ har 3 rent imaginära nollställen, alla med multiplicitet 2.

---

3 a) Minns: en minstakvadratlösn är en lösn. till ekv-systemet

(*) $A^TA\hat{x}=A^Tb$ där

$$A^TA=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&2\\1&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&4\\3&6&7\\4&7&11\end{bmatrix}\qquad A^Tb=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&2\\1&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

$(A^TA)^{-1}$: $$[A^TA\mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&4&1&0&0\\3&6&7&0&1&0\\4&7&11&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&4&1&0&0\\0&3&3&-1&1&0\\0&9&17&-4&0&3\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&4&1&0&0\\0&3&3&-1&1&0\\0&0&8&-1&-3&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&2&-1&0\\0&1&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&\frac{3}{8}\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&17/8&-5/8&-3/8\\0&1&0&-5/24&17/24&-9/24\\0&0&1&-1/8&-3/8&3/8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\\0&1&0&\frac{1}{24}\begin{bmatrix}17&-5&-3\\-5&17&-9\\-3&-9&9\end{bmatrix}\\0&0&1&\end{array}\right]$$

$$\therefore\ (A^TA)^{-1}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}17&5&-3\\-5&17&-9\\-3&-9&9\end{bmatrix}$$

$\therefore$ (*) har lösning $$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}17&-5&-3\\-5&17&-9\\-3&-9&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}24\\24\\-24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

b) $$A\hat{x}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}=b$$ Alltså är felet $0$.

Alternativt: Lös ekv. syst. $Ax=b$. Då är detta också lösn till (*).

---

4 a) Minns: $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$ Alltså $|AB|=0\Rightarrow|BA|=0$

det multiplikativ

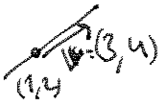
b) Ex: Låt $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}$

Då $AB=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ och $BA=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

Alltså $AB=0\not\Rightarrow BA=0$

TMA 660 21/8 17 

5 a) FALSKT (Jämför Sats 13 s 280 i Sparr)

b) SANT $l$:  $u=(4,-3)$ uppfyller $u\cdot v=(4,-3)\cdot(3,4)=0$

c) FALSKT Spegling linjär avbildning omm $l$ går genom origo

d) FALSKT $(1,2,3)$ är en normalvektor till planet.

e) FALSKT En vänsterinvers $V$ skulle vara av typ $3\times 2$.

Då Kolonn$(VA) \subseteq$ Span$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\p\end{bmatrix}\right)$ vilket har max rank 2.

Alltså kan ej $VA=I$

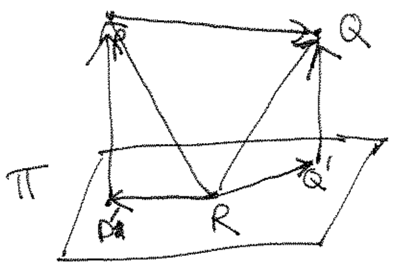
f) FALSKT $f$'s avbildningsmatris ska uppfylla $A\overbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}^{=:B}=\overbrace{\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}^{=:C}$

$|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ Alltså finns entydigt $A=CB^{-1}$.

Alltså finns bara en linjär avbildning med de önskade egenskaperna.

---

6




Tag $R$ godtycklig punkt i $\Pi$.

Obs: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RQ}-\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RQ'}+\overrightarrow{Q'Q}-(\overrightarrow{RP'}+\overrightarrow{P'P})=$

$\overrightarrow{RQ'}-\overrightarrow{RP'}+\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P}=$

$\underbrace{\overrightarrow{P'Q'}}_{/\!/ \text{ med } \Pi}+\underbrace{\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P}}_{\perp \text{ mot } \Pi}$

Avstånd$(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|$ Avstånd$(P',Q')=|\overrightarrow{P'Q'}|$

Obs: $|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{P'Q'}+(\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P})|^2=|\overrightarrow{P'Q'}|^2+\underbrace{2\overrightarrow{P'Q'}\cdot(\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P})}_{=0 \text{ ty } \overrightarrow{P'Q'} /\!/ \text{ med } \Pi,\ \overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P} \perp \text{ mot } \Pi}+|\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P}|^2$

$=|\overrightarrow{P'Q'}|^2+\underbrace{|\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P}|^2}_{\geq 0}$

Alltså $|\overrightarrow{PQ}|\geq|\overrightarrow{P'Q'}|$

Likhet råder då $\overrightarrow{Q'Q}-\overrightarrow{P'P}=0$, dvs $\overrightarrow{PQ}$ parallell med $\Pi$

---

7 Se Sparr, Sats 4, Lemma 2, s 87

---

8 Se Sparr, Sats 9, s 179