MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-10-24 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Elizabeth Wulcan
Telefon: 031-772 53 47

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det A$.

(b) Låt T vara tetraedern med hörn $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (-5,-3,-3)$, $P_2 = (3,1,3)$ och $P_4 = (3,3,1)$. Bestäm volymen av T.

Tips: Minns att volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(c) Beräkna $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$.

(d) För vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ är $\det(A - \lambda I) = 0$?

(e) Bestäm rangen av $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ för varje $\lambda \in \mathbb{R}$. (8 p)

2. Låt $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ vara planet som går genom punkterna $(5,0,-3)$, $(4,-3,0)$ och $(0,5,-4)$ och låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på Π.

(a) Skriv Π på formen $\{ax + by + cz = d\}$.

(b) Visa att f är en linjär avbildning.

Tips: Använd att ortogonal projektion på ett plan Π är en linjär avbildning om och endast om origo ligger i Π.

(c) Bestäm avbildningsmatrisen A_f till f.

(d) Låt T vara tetraedern från uppgift **1.**(b). Vad är volymen av $f(T)$?

(e) Beräkna A_f^2. (9 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har en unik lösning.

(b) Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är positivt orienterade så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2$ positivt orienterade.

(c) Antag att A är en (5×5)-matris av rang 3. Då är alla underdeterminanter till A av ordning 4 lika med 0.

(d) Det gäller att $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ för alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

(e) Det finns oändligt många vektorer som är vinkelräta mot $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,1,1)$.

(f) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då är f surjektiv.

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Avgör om A har en högerinvers, d v s en matris H så att $AH = I$. Motivera ditt svar. Om svaret är ja bestäm en högerinvers till A.

(b) Avgör om A har en vänsterinvers, d v s en matris V så att $VA = I$. Motivera ditt svar. Om svaret är ja bestäm en vänsterinvers till A. (5 p)

5. Låt A vara en (4×5)-matris.

(a) Är det sant att om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för något $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^5$, så följer att $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej så räcker det att ange ett motexempel. (I detta ingår att visa att det motexempel du valt är ett motexempel.)

(b) Är det sant att om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^5$, så följer att $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej så räcker det att ange ett motexempel. (I detta ingår att visa att det motexempel du valt är ett motexempel.) (5 p)

6. För $i, j \in \mathbb{R}$ låt $\max(i, j)$ beteckna det största av talen i och j. Låt A vara $(n \times n)$-matrisen med matriselementen $a_{ij} = \max(i, j)$. Beräkna $\det(A)$. (5 p)

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icketrivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. (a) Formulera algebrans fundamentalsats.

(b) Låt $p(z)$ vara ett polynom av grad n. Använd algebrans fundamentalsats för att visa att p kan faktoriseras som

$$p(z) = \gamma(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

där $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ är nollställena till $p(z)$ och $\gamma \in \mathbb{C}$ är skilt från noll. (6 p)

Lycka till!

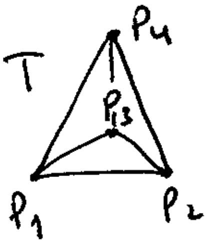
Elizabeth

1 a+c)
$$\underline{\underline{\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}}} \underset{\text{det linjär i kolonn 1}}{\uparrow =} - \begin{vmatrix} 5+\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{\uparrow =}$$

$$-\left[(5+\lambda)(1-\lambda)^2+3\cdot3\cdot3+3\cdot3\cdot3-(5+\lambda)\cdot3\cdot3-3\cdot3\cdot(1-\lambda)-3\cdot3(1-\lambda)\right]=$$

$$\dots = \underline{\underline{4-3\lambda^2-\lambda^3}}$$ Sätt $\lambda=0$: $\underline{\underline{|A|}} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{4}}$

b) T



__Minns__: Volymen av T är absolutbeloppet av
$$\frac{1}{6}\left|\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overrightarrow{P_1P_2} & \overrightarrow{P_1P_3} & \overrightarrow{P_1P_4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|A| = \frac{1}{6}4 = \frac{2}{3}$$

__Slutsats__ Vol $(T) = \underline{\underline{2/3}}$

c) Lös $4-3\lambda^2-\lambda^3=0$! Lätt se att $\lambda=1$ är en lösning.
Faktorsatsen $\Rightarrow$ $\lambda-1$ faktor i $4-3\lambda^2-\lambda^3 =: p(\lambda)$
Polynomdivision ger $p(\lambda) = -(\lambda^2+4\lambda+4)(\lambda-1)$
__Obs__ $\lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$ Alltså $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$.
Alltså $\det(A-\lambda I) = p(\lambda) = 0$ för $\underline{\underline{\lambda=1}}$ och $\underline{\underline{\lambda=-2}}$ (mult 2)

d) För $\underline{\underline{\lambda\neq1, \lambda\neq-2}}$ är $\det(A-\lambda I)\neq0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rang}(A-\lambda I)=3}}$

$\underline{\underline{\lambda=1}}$: $A-I = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ← Använd elementära radoper. för att få trappformad matris.

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 6 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} (-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} (1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$ pivot

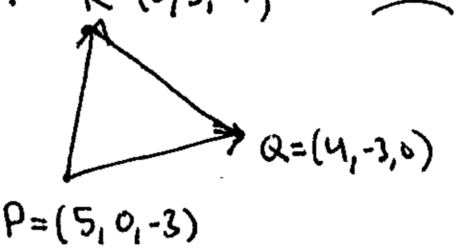
rang $(A-I) = \#$ pivot i $T = \underline{\underline{2}}$

$\underline{\underline{\lambda=-2}}$ $A+2I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} (-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$ pivot

rang $(A+2I) = \#$ pivot i $T = \underline{\underline{1}}$

---

2 a) Π



__Obs__: $\overrightarrow{PQ} = (-1,-3,3)$ $\overrightarrow{PR} = (-5,5,-1)$
en normal till Π fås som

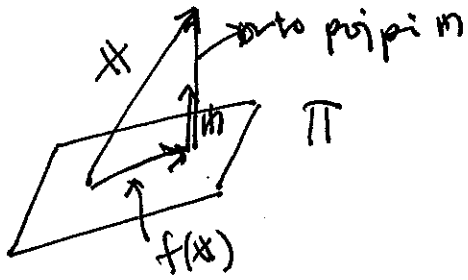
$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} \underset{\text{Sarrus}}{\uparrow =} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -3 & 3 \\ -5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (3-15, -15-1, -5-15) = (-12,-16,-20) =$$
$-4(3,4,5)$.

TMA 660 24/10 16 (2)

En normal till Π är $n = (3,4,5)$.
Vet nu att Π är på formen $\{3x+4y+5z=d\}$ för något $d \in \mathbb{R}$.
Sätt in en punkt för att bestämma d: $p \in \Pi$ ger $3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = d$
$\Leftrightarrow d=0$. Alltså $\underline{\underline{\Pi = \{3x+4y+5z=0\}}}$

b) Obs $0 = (0,0,0)$ uppfyller ekv. för Π $(3\cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0)$.
Alltså $0 \in \Pi$. Alltså f. linjär avbildning.

c)



Minns: orto proj av x på $n = \frac{x \cdot n}{|n|^2} n$

Alltså $f(x) = x - \frac{x \cdot n}{|n|^2} n = x - \frac{n \cdot x}{|n|^2} n =$

[Om ident. x med $\begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix}$ och $[a]=a$]

$$I x - \frac{1}{|n|^2} n n^T x = \left(I - \frac{1}{|n|^2} n n^T\right) x$$

Alltså är avbildningsmatrisen $\left(I - \frac{1}{|n|^2} n n^T\right) = A_f$

Obs: $|n|^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$

$$n n^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} [3\ 4\ 5] = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Alltså $A_f = \frac{1}{50}(50 I - n n^T) = \frac{1}{50}\left(\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}\right) =$

$$\underline{\underline{\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 41 & -12 & -15 \\ -12 & 34 & -20 \\ -15 & -20 & 25 \end{bmatrix}}}$$

d) Obs Kolonn$(A_f) = \Pi \subsetneq \mathbb{R}^3$. Alltså det$(A)$. Alltså Vol$(f(T)) = 0$.

e) Obs $f(x') = x'$ om x' parallell med Π.
Skriv $x \in \mathbb{R}^3$ som $x = \underbrace{x'}_{\text{parallell m }\Pi} + \underbrace{x^{\perp}}_{\text{ortogonal mot }\Pi}$. Då $f(x) = x'$

$f \circ f(x) = f(x') = x'$

Alltså $f \circ f = f \Rightarrow A_{f \circ f} = A_f$
Men vi vet också att $A_{f \circ f} = A_f A_f$. Alltså $A_f^2 = A_f = \underline{\underline{\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 41 & -12 & -15 \\ -12 & 34 & -20 \\ -15 & -20 & 25 \end{bmatrix}}}$

---

3 a) FALSKT Obs rang$(A) \leq 3 \Rightarrow$ nolldim$(A) \geq 1$

b) FALSKT

c) SANT Minns rang(A) = ordning på största nollskilda underdet

d) FALSKT X-prod ej associativ

TMA 660 24/10 16

e) FALSKT Obs $u \perp (1,0,0),(0,1,0),(0,1,1) \iff \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ (*)

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ så (*) har endast lösn. $u=0$.

f) SANT Värdemängden $(f)=$ Kolonn$(A)=$ span$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^2$

4a) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ Lätt att se att kolonnerna i A spänner hela $\mathbb{R}^2$. Alltså $Ax=b$ lösbart $\forall b\in\mathbb{R}^2$. Alltså har A högerinvers.

Obs H högerinvers om $H=\begin{bmatrix}| & |\\ h_1 & h_2\\ | & |\end{bmatrix}$ där $Ah_1=e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (1)

$Ah_2=e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ (2)

Vill alltså lösa ekv (1) & (2):

(1): $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\4&5&6&0\end{array}\right] \overset{(-4)\cdot 3}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|c}3&6&9&3\\0&-3&-6&-4\end{array}\right] \overset{2}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|c}3&0&-3&-5\\0&-3&-6&-4\end{array}\right]$ (I) (II)

Vi vill bara hitta en högerinvers till A. Alltså räcker det att hitta en lösning till (1).

x_3 är en fri ~~variabel~~ variabel. Välj x_3 som 0.

Då (II) $\Rightarrow -3x_2=-4 \iff x_2=4/3$

(I) $\Rightarrow 3x_1=-5 \iff x_1=-5/3$

Alltså ges en lösning till (1) av $h_1=\frac{1}{3}(-5,4,0)$

(2): $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\4&5&6&1\end{array}\right] \overset{(-4)\cdot 3}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|c}3&6&9&0\\0&-3&-6&1\end{array}\right] \overset{2}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|c}3&0&-3&2\\0&-3&-6&1\end{array}\right]$ (I) (II)

x_3 fri, välj $x_3=0$ Då (II): $-3x_2=1 \iff x_2=-1/3$

(I): $3x_1=2 \iff x_1=2/3$

Alltså ges en lösning till (2) av $h_2=\frac{1}{3}(2,-1,0)$

Alltså en högerinvers ges av $H=\begin{bmatrix}| & |\\ h_1 & h_2\\ | & |\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-5&2\\4&-1\\0&0\end{bmatrix}$

b) Obs om A har vänsterinvers måste den vara av typ 3×2 $V=\begin{bmatrix}| & |\\ v_1 & v_2\\ | & |\end{bmatrix}$. Obs att kolonnerna i

$VA=\begin{bmatrix}| & |\\ v_1 & v_2\\ | & |\end{bmatrix}A$ kommer vara linjärkombinationer av

v_1 och v_2. Men två kolonner kan inte spänna hela $\mathbb{R}^3=$ Kolonn(I). Med andra ord Kolonn$(VA)\subseteq$ Span$(v_1,v_2)\subsetneq$ $\mathbb{R}^3=$ Span(I) $\Longrightarrow VA\neq I$.

5a) Tag t.ex $A=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\neq 0$ och $x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\neq 0$ Då $Ax=0$

Slutsats $Ax=0$ för något $x\neq 0$ implicerar inte att $A=0$.

b) Antag att $Ax=0 \ \forall x\in\mathbb{R}^n$. Antag $A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1s}\\ \vdots & & \\ a_{41}&\cdots&a_{4s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}| & & |\\ a_1 & \cdots & a_s\\ | & & |\end{bmatrix}$

Tag $x=e_j=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow$ plats j. Då $Ax=Ae_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{4j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\\ a_j\\ |\end{bmatrix}$

Att $Ae_j=0$ implicerar alltså att $a_j=0$.
Eftersom $Ax=0 \ \forall x$ så gäller speciellt att $Ae_j=0$ för alla j, dvs $a_j=0$ för alla j, dvs $A=0$.

Slutsats $Ax=0 \ \forall x \Longrightarrow A=0$.

---

6)

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ n-1&n-1&n-1&\cdots\ n-1&n\\ n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\-1&-1&0&\cdots&0\\-1&-1&-1&\ddots&\vdots\\ \vdots&&&\ddots&\\ -1&-1&-1&\cdots\ -1&0\\ n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}=$$

gör radoperationer

-1 -1 -1

Minns radoperationen "tag en multipel av en rad och lägg till en annan rad" förändrar ej determinanten

Minns determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

$$\underbrace{(-1)(-1)(-1)\cdots(-1)}_{n-1\text{ st}}\cdot n=(-1)^{n-1}n$$

---

7) Se Sparr kap 6.2 (Def 3 & Sats 2)

8) Se Persson-Böiers kap A.10 (Sats 8, Sats 9, följdsats 1