**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-01-04 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen | Telefonvakt: Olof Giselsson

Telefon: 0703-088304

# TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 p (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1.** (a) Låt $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(A_1)$ och $\det(A_2)$.

(b) För $j = 1, 2$, låt $f_j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $A_j$. Bestäm värdemängden av $f_1$ respektive $f_2$.

(c) Ligger $\mathbf{y} = (1, 1, 2, 2)$ i bilden av $f_2$? Det vill säga, finns det något $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ så att $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$? (7 p)

**2.** Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock $\geq 0$. (7 p)

(a) Antag att $A$ är en $(m \times n)$-matris. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en eller oändligt många lösningar.

(b) Antag att $A$ är en $5 \times 5$-matris av rang 4. Då gäller att någon underdeterminant till $A$ av ordning 3 är nollskild.

(c) Antag att matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Då ger minsta kvadratmetoden en entydig lösning till $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

(d) Det finns polynom av grad 7 med reella koefficienter som saknar reella nollställen.

(e) Det finns matriser $A$ och $B$ av typ $5 \times 6$ respektive $6 \times 7$, så att rangen av $AB$ är 6.

(f) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då är $f$ injektiv.

(g) Det finns oändligt många vektorer som är ortogonala mot $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ och $(7, 8, 9)$.

**3.** Låt $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, och låt $A = \mathbf{v}\mathbf{v}^T$.

(a) Bestäm $A$'s kolonnrum, nollrum, rang och nolldimension. (4 p)

(b) Beräkna $A^r$ för $r \in \mathbb{N}$. Bestäm $A^r$'s kolonnrum, nollrum, rang och nolldimension. (4 p)

**Tips:** Om du inte vet hur du skall göra detta i allmänhet kan det vara bra att börja med små $r$. En lösning för $r = 2$ ger 2 poäng.

**4**. Låt $T$ vara tetraedern med hörn i $P_1 = (3, 0, 0)$, $P_2 = (0, 3, 0)$, $P_3 = (0, 0, 3)$ och $P_4 = (3, 3, 3)$.

(a) Beräkna volymen av $T$.

**Minns**: Volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea $B$ och höjd $h$ är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(b) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\Pi = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Beskriv $f(T)$. Bestäm speciellt bilderna $f(P_j), j = 1, \ldots, 4$ av hörnen. Vad är arean av $f(T)$? (7 p)

**5**. (a) Antag att $A$ är en ortogonal $(n \times n)$-matris. Visa att $\det(A) = \pm 1$.

(b) Gäller omvändningen? Det vill säga medför $\det(A) = \pm 1$ att $A$ är ortogonal? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange ett motexempel. (I detta ingår att visa att det exempel du valt är ett motexempel.) (5 p)

**6**. Avgör om funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som ges av $z \mapsto e^z$ är injektiv, surjektiv respektive bijektiv. ( 6 p)

**7**. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

**8**. Låt $A$ vara en $(n \times n)$-matris. Visa att om $A$ är inverterbar så är inversen entydigt bestämd. (4 p)

Lycka till!

Elizabeth

1a)
$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\, 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} (-1)$$

utv. kolonn 2

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(10+9-12) = \underline{\underline{-7}}$$

Sarrus

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$ eftersom rad 2 & 4 lika.

b) $|A_1| \neq 0 \Rightarrow f_1$ surjektiv, dvs $f_1$'s värdemängd är $\mathbb{R}^4$.
Låt $v_1, \dots, v_4$ vara $A_2$'s kolonner. Obs $v_1, v_3, v_4$ kolonner också i $A_1$. $|A_1| \neq 0 \Rightarrow v_1, v_3, v_4$ linj. oberoende. Alltså $|A_2| = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ linjärt beroende.
Värdemängd $(A_2)$ = Kolonn $(A_2)$ = span $(v_1, v_3, v_4)$ = span $((2,2,1,2), (-1,1,2,1), (-2,1,1,1))$.

c) Obs $y$ är kolonn nr. 2 i $A_1$. $|A_1| \neq 0 \Rightarrow v_1, y, v_3, v_4$ linjärt oberoende. Alltså $y \notin$ ~~[scribbled]~~ Bilden $(f_1)$ = Kolonn $(A_2)$ = span $(v_1, v_3, v_4)$.

---

2 a) SANT ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid lösbart)

b) SANT (rang = ~~[scribbled]~~ maximal ordning på nollskild underdet)

c) FALSKT (minsta kvadratmetoden ger ej entydig lösning i allmänhet)

d) FALSKT ($p(z)$ reella koeff $\Rightarrow (p(a) = 0 \Rightarrow p(\bar{a}) = 0)$)

e) FALSKT (rang $(A) \leq \min(m,n)$ om $A$ typ $m \times n$)

f) FALSKT ($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linjär är aldrig injektiv)

g) SANT ($\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ span $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ har dim högst 2 $\Rightarrow$ finns $\infty$ många vinkelräta vektorer)

TMA 660 4/1 2016 



3a) $A = \mathbb{v}\mathbb{v}^T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbb{v} & 2\mathbb{v} & 3\mathbb{v} \\ | & | & | \end{bmatrix}$

$\underline{\text{Span}(A)} = \text{span}(\mathbb{v}, 2\mathbb{v}, 3\mathbb{v}) = \underline{\text{span}(\mathbb{v})} = \text{span}((1,2,3))$

$\underline{\text{rang}(A)} = \dim(\text{span}\,\mathbb{v}) = \underline{\underline{1}}$

$\underline{\text{nolldim}(A)} = 3 - \text{rang}(A) = \underline{\underline{2}}$

Obs $A\mathbb{x} = \mathbb{v}\underbrace{\mathbb{v}^T\mathbb{x}}_{[\mathbb{v}\cdot\mathbb{x}]} = \mathbb{v}[\mathbb{v}\cdot\mathbb{x}]$. Alltså $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ om $\mathbb{v}\cdot\mathbb{x} = 0$, dvs om $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

Alltså $\underline{\Pi = \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}} \subseteq \text{Noll}(A)$.
Å andra sidan Noll(A) har dim 2. Alltså är $\underline{\underline{\text{Noll}(A) = \Pi}}$

b) $A^r = \mathbb{v}\underbrace{\mathbb{v}^T\mathbb{v}}_{\substack{[|\mathbb{v}|^2] = \\ [1^2+2^2+3^2] = [14]}}\mathbb{v}^T \ldots \mathbb{v}\mathbb{v}^T = \mathbb{v}[14]^{r-1}\mathbb{v}^T = 14^{r-1}\mathbb{v}\mathbb{v}^T = \underline{14^{r-1}A}$

rang, nolldim, kolonnrum, nollrum samma som för A.

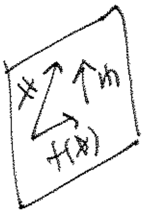
---

4a) Volymen av $T = \left| \frac{1}{6} \underbrace{\left| \overrightarrow{P_1P_4} \; \overrightarrow{P_2P_4} \; \overrightarrow{P_3P_4} \right|} \right| = \frac{1}{6} 54 = \underline{\underline{9}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 27(1+1) = 54$$

b) $\Pi = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ har normalvektor $\mathbb{n} = (1,1,1)$

Då $f(\mathbb{x})$ = ortoproj av $\mathbb{x}$ på $\Pi = \mathbb{x} - \frac{\mathbb{x}\cdot\mathbb{n}}{\underbrace{|\mathbb{n}|^2}_{=3}}\mathbb{n}$




$f(P_1) = f(\overrightarrow{OP_1}) = (3,0,0) - \frac{(3,0,0)\cdot(1,1,1)}{3}(1,1,1) =$

$(3,0,0) - (1,1,1) = (2,-1,-1)$

$f(P_2) = \ldots = (-1,2,-1)$, $f(P_3) = \ldots = (-1,-1,2)$

$f(P_4) = (3,3,3) - \frac{(3,3,3)\cdot(1,1,1)}{3}(1,1,1) = (0,0,0) = \mathbb{0}$

Låt $\tau$ vara triangeln med hörn $Q_1 = (2,-1,-1)$, $Q_2 = (-1,2,-1)$ och $Q_3 = (-1,-1,2)$. Obs att $f(P_4) = \mathbb{0}$ är tyngdpunkten i $\tau$. Slutsats: $\underline{f(T) = \tau}$

Arean av $\tau = \left| \frac{1}{2} \underbrace{\left| \overrightarrow{Q_1Q_2} \times \overrightarrow{Q_1Q_3} \right|} \right| = \underline{\underline{\frac{9}{2}\sqrt{3}}}$

$$\left\| \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right\| = |(9,9,9)| = 9\sqrt{3}$$

5a) $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ ortogonal $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$

$$\Leftrightarrow A^TA = \begin{bmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} = I$$

$$\underline{A^TA = I} \Rightarrow \underbrace{|A^TA|}_{= |A^T||A| = \boxed{|A|^2}} = \boxed{|I| = 1} \Leftrightarrow \underline{|A| = \pm 1}$$

b) $|A| = \pm 1 \not\Rightarrow A$ ortogonal

T ex, låt $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Då $a_2 \cdot a_2 = (0,2)\cdot(0,2) = 4 \neq 1$

Alltså $A$ ej ortogonal.

Men $|A| = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1/2 \cdot 2 = 1$

---

6 Minns $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Injektiv? Nej Låt (t ex) $z_1 = 0$ $z_2 = i2\pi$.

Då $e^{z_1} = e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1$ $e^{z_2} = e^0(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$

Alltså $e^{z_1} = e^{z_2} \not\Rightarrow z_1 = z_2$

Surjektiv? Tag $w \in \mathbb{C}$. Vi ska visa att det finns (åtminstone) ett $z \in \mathbb{C}$ så att $e^z = w$. Skriv $w$ på polär form, $w = re^{i\theta}$, $r>0$

Låt nu ~~...~~. Låt nu $z = \log r + i\theta$

Då $e^z = e^{\log r + i\theta} = e^{\log r} \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta}$. Alltså $e^z$ surjektiv.

Bijektiv? Nej ty ej injektiv.

---

7 Se Sparr kap 5.3

---

8 $A^{-1}$ uppfyller $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ $(*)$

Antag att $A_1^{-1}$ & $A_2^{-1}$ uppfyller $(*)$.

Då $$\boxed{A_1^{-1}} = A_1^{-1}I = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) \underset{\text{matrisprod associativ}}{=} (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = IA_2^{-1} = \boxed{A_2^{-1}}$$ Alltså $A_1^{-1} = A_2^{-1}$.

$A_2^{-1}$ uppfyller $(*)$ $\Rightarrow AA_2^{-1} = I$

matrisprod associativ

$A_1^{-1}$ uppfyller $(*)$ $\Rightarrow A_1^{-1}A = I$

Alltså inversen entydigt bestämd.