

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna (om inte annat nämns)!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 24 p, 4: 36 p, 5: 48 p.

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till kolonrummet för A , en bas till nollrummet för A , rangen av A och nolldimensionen av A . (8 p)

2. Låt $p(z) = (z - 1)^8 - 16$.

(a) Hur många komplexa nollställen har $p(z)$? (1 p)

(b) Lös ekvationen

$$p(z) = 0.$$

Ange lösningarna på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. Rita ut lösningarna i det komplexa talplanet. (6 p)

(c) Hur många reella nollställen har $p(z)$? (1 p)

3. (a) Låt P vara parallelepipederna som spänns av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 2)$. Bestäm volymen av P . (2 p)

(b) Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, där $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Bestäm volymen av $f(P)$. (2 p)

(c) Låt $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen $\mathbf{x} \rightarrow 4\mathbf{x}$. Bestäm volymen av $g(P)$. (2 p)

(d) Låt $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som skickar en vektor på dess spegelbild i planet $x_3 = 0$. Bestäm volymen av $h(P)$. (2 p)

4. Låt $P_1 = (2, 0, 0)$, $P_2 = (0, 2, 0)$. Bestäm mängden av punkter Q i rummet som är på samma avstånd från P_1 som från P_2 . (6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen på uppgift (a)-(f) är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Om \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} är linjärt oberoende så är \mathbf{u} , $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ linjärt oberoende.

(b) Antag att A är en $n \times n$ -matris. Om $|A| = 0$ så är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ej lösbar för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Om produkten AB är väldefinierad så är $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A) \times \text{rang}(B)$.

(d) Antag att A är en $n \times n$ -matris. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ en eller oändligt många lösningar.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $x + y + 1 = 0$. Då är f en linjär avbildning.

(f) Antag att A är en 1×3 -matris. Då är $|A^T A| = 0$.

Till följande uppgifter räcker det med svar. (2 p)

(g) Ange en matris med rang 2.

(h) Ange en matris med determinant -1 .

6. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som avbildar $(1, 1, 1)$ på $(0, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$ på sig själv och $(1, 0, -1)$ på sig själv. Bestäm avbildningsmatrisen till A med avseende på standardbasen i \mathbb{R}^3 . Vilka vektorer i \mathbb{R}^3 avbildas på sig själva? Beskriv f geometriskt. (8 p)

7. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer i rummet (\mathbb{R}^3). (6 p)

(a) Definiera vektorprodukten (=kryssprodukten) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Visa att vektorprodukten är antikommutativ, d v s att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

(c) Visa att

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \quad (1)$$

När råder likhet i (1)?

(d) Visa, förslagsvis genom att ge ett motexempel, att vektorprodukten inte är associativ, d v s att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet.

8. Visa att en avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär om och endast om den är på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för någon $(m \times n)$ -matris A . (8 p)

Lycka till!
Elizabeth

1) Gausseliminering ger $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$ (I) (II) (III)

Märks: en bas för kolonn(A) ges av de kolonner i A vars motsvarande kolonner i T innehåller pivotelement, d v s kolonn 1, 3, 5 i A

Märks $\text{Noll}(A) = \text{Noll}(T) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Tx = 0\}$

För att lösa $Tx = 0$ sätt $x_2 = t_1, x_4 = t_2$

Nu ger rad (III) i T: $x_5 = 0$

(II) : $x_3 - x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = t_2$

(I) : $x_1 = -3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = -3t_1 - 4t_2 + t_2 = -3t_1 - 3t_2$

Alltså har $Ax = 0 \Leftrightarrow Tx = 0$ lösningarna:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Slutsats • En bas för kolonn(A) är $\{(1, 2, 3, 3), (4, 6, 3, 0), (2, -3, -3, 0)\}$

• $\text{rang}(A) = \dim(\text{kolonn}(A)) = 3$

• En bas för $\text{Noll}(A)$ är $\{(-3, 1, 9, 9, 0), (-3, 0, 1, 1, 0)\}$

• $\text{nolldim}(A) = \dim(\text{Noll}(A)) = 2$

2) a) $p(z)$ har grad 8. Då ger algebraens fundamental sats att $p(z)$ har 8 komplexa nollställen (räknat med multiplicitet)

b) Lös $p(z) = 0!$

Sätt $z-1 = re^{i\theta}$ $r > 0$ då $p(z) = (z-1)^8 - 16 = (re^{i\theta})^8 - 16 = r^8 e^{i8\theta} - 16$

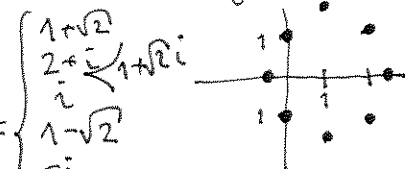
Alltså $p(z) = 0 \Leftrightarrow r^8 e^{i8\theta} = 16$

De Moivre

lös $\begin{cases} r^8 = 16, r \geq 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \\ \text{ges av: } \begin{cases} 8\theta = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi k}{8} \end{cases} \end{cases}$

Genom att variera k får vi 8 olika lösningar: $k=0, 1, \dots, 7$ ges

$$re^{i\theta} = \begin{cases} \sqrt{2} e^{i0} = \sqrt{2} \\ \sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{8}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i \\ \sqrt{2} e^{i\frac{4\pi}{8}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} e^{i\frac{6\pi}{8}} = -1+i \\ \sqrt{2} e^{i\frac{8\pi}{8}} = \sqrt{2} e^{i\pi} = -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} e^{i\frac{10\pi}{8}} = -1-i \\ \sqrt{2} e^{i\frac{12\pi}{8}} = -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2} e^{i\frac{14\pi}{8}} = 1-i \end{cases}$$



c) $p(z)$ har 2 reella nollställen

3a) Volymen av P ges av absolutbeloppet av

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4 \quad \text{Slutsats Volymen av } P \text{ är } \underline{4}$$

Sarrus

b) Minns: Volymförändringen under den linjära avb.
 $f_*: \mathbb{X} \rightarrow A\mathbb{X}$ är absolutbeloppet av $|A|$.

$$\text{Nu } |A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -3(-7 + 10) = -9$$

utr. längd
kann 2

$$\text{Slutsats } \text{Vol}(f_*(P)) = \|A\| \cdot \text{Vol}(P) = 9 \cdot 4 = \underline{36}$$

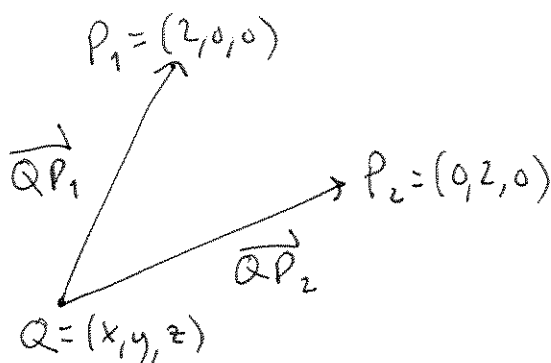
c) $g: \mathbb{X} \rightarrow 4\mathbb{X}$ har avbildningsmatrisen $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ med $\det 4 = 64$
 (Allmänt: vid skalning med en faktor k i dimension n ändras (den n -dim) volymen med en faktor $|k|^n$)

$$\text{Slutsats: } \text{Vol}(g(P)) = 64 \cdot \text{Vol}(P) = 64 \cdot 4 = \underline{256}$$

d) Spiegling bevarar volym:

$$\text{Slutsats } \text{Vol}(h(P)) = \text{Vol}(P) = \underline{4}$$

4)



• Minns: avståndet mellan P_i och Q ges av $|\overrightarrow{QP_i}|$

• Antag $Q = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} \text{• Då } \overrightarrow{QP_1} &= (2-x, -y, -z) \Rightarrow |\overrightarrow{QP_1}|^2 = (x-2)^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 \\ \overrightarrow{QP_2} &= (-x, 2-y, -z) \Rightarrow |\overrightarrow{QP_2}|^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \end{aligned}$$

$$\text{Alltså } |\overrightarrow{QP_1}| = |\overrightarrow{QP_2}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{QP_1}|^2 = |\overrightarrow{QP_2}|^2$$

\uparrow ty $|\overrightarrow{QP_i}| \geq 0$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2$$

$$\Leftrightarrow -4x = -4y \Leftrightarrow x - y = 0$$

Slutsats Avståndet mellan Q & P_1 är lika med avståndet mellan Q & P_2 om och endast om Q ligger i planet $x - y = 0$

- 5) a) SANT $\left[\text{ty } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right]$
 b) SANT ["Hurvudsatsen": sparr säger tla ~~detta~~ detta]
 c) FALSKT [Tay tek $A=B=I$ di $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$]
 d) SANT [$Ax=x \Leftrightarrow (A-I)x=0$ $Bx=0$ har alltid minst en lösning]
 e) FALSKT [~~✗~~ $x+y \neq 1=0$ \odot speglas i planet $(-1, -1)$, ej linjärt]
 f) SANT [ATA har tre linjära kolonner]
 g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + ex$
 h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [-1]$ tek

- 6) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Avbildningsmatrisen A till f uppföljer
 alltså $\begin{matrix} (1,1,1) \mapsto (0,0,0) \\ (1,-1,0) \mapsto (1,-1,0) \\ (1,0,-1) \mapsto (1,0,-1) \end{matrix}$
 $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_C$

Gausseliminering ger:

$$[B | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array} \right] = [I | B^{-1}]$$

$$\text{Alltså är } A = CB^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

x avbildas på sig självt om $Ax=x \Leftrightarrow (A-I)x=0 \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Slutsats $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, f avbildar x på sig självt om

x ligger i planet $\Pi = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, f avbildar x

som är ortogonalt mot Π på \odot , eftersom $(1,1,1)$

är en normalvektor till Π . Alltså är f ortogonal projektion på planet $\Pi = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

- 7a) Se sparr kap 5.2 b) Se sparr kap 5.3

c) $|u \times v| = |u||v| \sin \theta$, där θ minsta vinkel mellan u & v

Eftersom $0 \leq \sin \theta \leq 1$ så är $|u \times v| \leq |u||v|$

Likhet råder då $|\sin \theta| = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$ (ty minsta vinkel) $\Leftrightarrow u \perp v$

- d) Låt e_1, e_2, e_3 vara en HON-bas. Di $(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$,
 men $e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0$ | 8) Se sparr kap 8.2