Tentamen
Linjär algebra och geometri, TMA660

140818 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: doktorand, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa

Betygsgränserna är följande: betyg 3 (24 poäng), betyg 4 (36 poäng), betyg 5 (48 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Linjen l går genom $(1,2,5)$, skär linjen $(x,y,z) = (2,3,1) + t(3,2,2)$ och är parallell med yz–planet. Bestäm en ekvation för l på parametrisk form. (6p)

2. Beräkna spegelbilden av punkten $(1,1,6)$ i planet $2x + 2y + z = 1$. (8p)

3. Beräkna avståndet mellan linjen $l_1 : (x,y,z) = (3+t, 1-t, 3+3t)$ och linjen l_2 som går genom punkterna $(2,-1,-3)$ och $(1,-2,1)$. (8p)

4. (i) Bestäm alla värden på a för vilka följande matris är inverterbar (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Lös matrisekvationen (4p)

$$(AX + B)^{-1} = A,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Låt A vara en 4×6 matris och B en 6×4 matris. Visa att $\det(BA) = 0$. (6p)

6. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av spegling i linjen $x_1 + 2x_2 = 0$ följt av rotation vinkeln $\pi/4$ (moturs). Bestäm matrisen för T m.a.p. standardbasen i $\mathbb{R}^2$. (8p)

7. (i) Formulera bassatsen i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(ii) Låt A vara en $n \times n$ matris. Visa att följande villkor är ekvivalenta: (6p)

(a) Kolonnerna till A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

(b) Ekvationen $AX = 0$ har bara trivial lösning.

(c) Ekvationen $AX = Y$ är lösbar för alla $Y \in \mathbb{R}^n$.

8. (i) Definiera basbytematrisen mellan två baser i $\mathbb{R}^n$. Given en godtycklig vektor $\mathbf{u}$, vilket samband finns mellan koordinaterna till $\mathbf{u}$ med avseende på två olika baser? Motivera! (4p)

(ii) Om $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning, vilket samband finns mellan avbildningsmatriserna för F med avseende på två olika baser? Motivera! (4p)

Lycka till!
Iulia Pop

Lösningar till Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660

140818

① Låt $\bar{v} = (a, b, c)$ vara en riktningsvektor till linjen l. Eftersom $\bar{v}$ är parallell med yz-planet, måste $a = 0$. Linjen l ges av

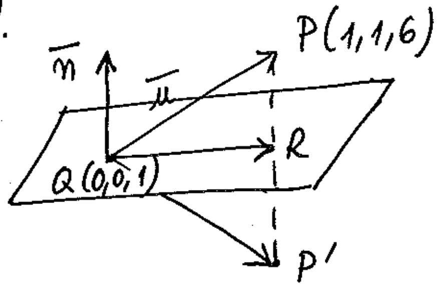
$$l: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + tb \\ z = 5 + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Å andra sidan, l skär linjen $l': \begin{cases} x = 2+3s \\ y = 3+2s \\ z = 1+2s \end{cases}$

$\Rightarrow$ systemmet $\begin{cases} 2+3s = 1 \\ 3+2s = 2+tb \\ 1+2s = 5+tc \end{cases}$ är lösbart. Vi får $s = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} tb = \frac{1}{3} \\ tc = -\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{b}{c} = -\frac{1}{14} \iff c = -14b \Rightarrow \bar{v} = (0, b, -14b) = b(0,1,-14)$, $b \neq 0$. Välj $b = 1$. (t.ex.)

Linjen l ges då av följande: $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+t \\ z = 5-14t \end{cases}}$

② 

Normalen till planet är $\bar{n} = (2,2,1)$. Låt $\bar{u} = \overrightarrow{QP} = (1,1,5)$. Välj $Q(0,0,1)$ i planet.

$$\text{proj}_{\bar{n}} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5}{2^2+2^2+1^2} \bar{n} = \bar{n}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{RP} = \text{proj}_{\bar{n}} \bar{u} = \bar{n}$.

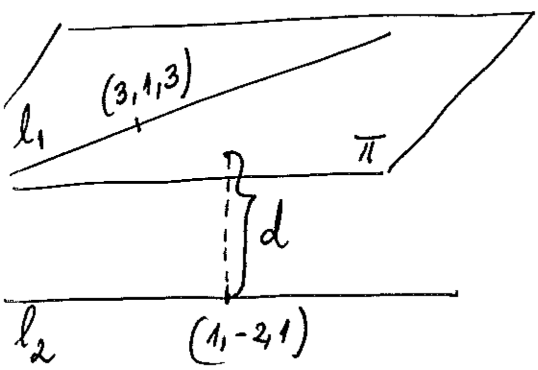
Vi får $\overrightarrow{P'P} = 2\overrightarrow{RP} = 2\bar{n} = (4,4,2)$ eftersom R är mittpunkt på PP'.

$\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = (4,4,2) \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = (1,1,6) - (4,4,2) = (-3,-3,4)$.

Spegelbilden är alltså $\boxed{P'(-3,-3,4)}$.

③ l_1 har riktningsvektor $\bar{v}_1 = (1,-1,3)$

l_2 har riktningsvektor $\bar{v}_2 = (1,-2,1) - (2,-1,-3) = (-1,-1,4)$.



Låt π vara planet genom l_1 parallellt med l_2. En normalriktning $\bar{n}$ till π ges av

$$\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\bar{e}_1 - 7\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 = (-1,-7,-2).$$

Planet π går genom punkten $(3,1,3)$ som ligger på l_1. Då får vi planets ekvation:

$$(-1)(x-3)-7(y-1)-2(z-3)=0 \iff x+7y+2z-16=0.$$

Det sökta avståndet mellan linjen l_1 och linjen l_2 är lika med avståndet från l_2 till planet π. Eftersom l_2 är parallell med planet enligt konstruktionen, räcker det att beräkna avståndet från t.ex. $(1,-2,1)$ till planet π. Vi får:

$$d = \text{avstånd}(l_1, l_2) = \text{avstånd}((1,-2,1),\pi) = \frac{|1+7\cdot(-2)+2\cdot 1-16|}{\sqrt{1^2+7^2+2^2}} =$$
$$= \frac{27}{\sqrt{54}} = \frac{27}{3\sqrt{6}} = \boxed{\frac{3\sqrt{6}}{2}}.$$

4. (i) Matrisen A är inverterbar omm $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ a^2 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(1-a^2) = -(a-1)^2(a+1) \neq 0$$

omm $a \neq \pm 1$. Alltså är $\boxed{A \text{ inverterbar omm } a \neq \pm 1}$.

(ii) $(AX+B)^{-1} = A \iff AX+B = A^{-1} \iff AX = A^{-1}-B \iff$

$\iff X = A^{-1}(A^{-1}-B)$. Vi beräknar A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & -6 & -6 \\ -8 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

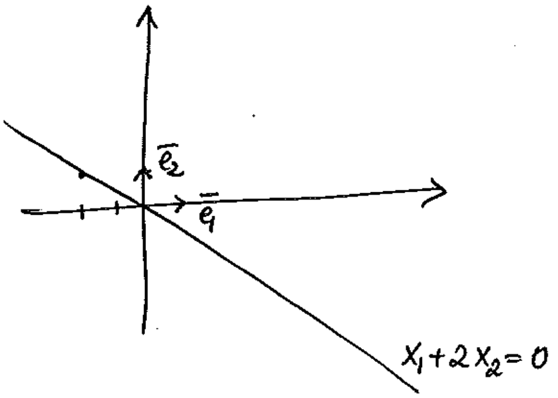
$$X = A^{-1}(A^{-1}-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & -6 & -6 \\ -8 & -7 & -8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -11 & -11 & -10 \end{pmatrix}}$$

5. Eftersom BA är en 6×6-matris, alltså kvadratisk, räcker det att visa att BA är ej inverterbar.

Vi vet att A är en 4×6-matris. Då har ekvationen $AX=0$ icke-trivial lösning ty $AX=0$ är ekvivalent med ett system med 4 ekvationer och 6 obekanta. Då har ekvationen $BAX=0$ också icke-trivial lösning. Satsen om inverterbara matriser implicerar att BA är ej inverterbar.

Alltså måste $\det(BA)=0$.

⑥. T är sammansättningen av två linjära avbildningar: $T = T_2 \circ T_1$, där T_1 är speglingen och T_2 är rotationen.
Om A_1 och A_2 är avbildningsmatriserna till T_1 respektive T_2, då är avbildningsmatrisen till T just A_2A_1. Låt oss beräkna A_1 och A_2.



$T_1(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - 2\,\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_1$ där $\bar{n} = (1,2)$ är normalen till linjen.

$T_1(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 - 2\,\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_2$

$$\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{(1,0)\cdot(1,2)}{1^2+2^2}\bar{n} = \frac{1}{5}\bar{n} = \left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow T_1(\bar{e}_1) = (1,0) - 2\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

$$\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_2 = \frac{\bar{e}_2\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{(0,1)\cdot(1,2)}{5}\bar{n} = \left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow T_2(\bar{e}_2) = (0,1) - 2\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right).$$

Matrisen till speglingen är alltså $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Rotationen $\pi/4$ moturs har motsvarande matris $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

Avbildningsmatrisen till T är alltså

$$A = A_2A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{7\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}}.$$

⑦ (i) <u>Bassatsen</u>: För rummet $\mathbb{R}^n$ gäller:

(1) varje bas i $\mathbb{R}^n$ har n element

(2) n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$ är en bas $\Longleftrightarrow$ de är linjärt oberoende $\Longleftrightarrow$ de spänner upp $\mathbb{R}^n$.

(3) fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende
färre än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan inte spänna upp $\mathbb{R}^n$.

(ii) (a) $\Rightarrow$ (b). Antag att kolonnerna $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ utgör en bas.
Då är de linjärt oberoende. Ekvivalent, ekvationen $x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$ har bara trivial lösning. På matrisform, är ekvationen ekvivalent med

$$[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow AX = 0.$$ Då får vi att (b) gäller.

Omvänt, om (b) gäller, då har ekv. $x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$ trivial lösning $\Rightarrow \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ linj. oberoende $\xRightarrow{\text{bassatsen}}$ $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ är en bas. Vi får att (a) gäller.

(a) $\Rightarrow$ (c). Antag att $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ är en bas. Då spänner de upp $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow$ varje $Y \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkombination av $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$, dvs.
$Y = x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n$ där $x_1, \dots, x_n$ reella. Ekvivalent, $Y = AX$ där
$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Då är ekv. $AX = Y$ lösbart, för varje $Y \in \mathbb{R}^n$.

Omvänt, antag att ekv. $AX = Y$ lösbart för varje Y, då är Y en linjärkombination av $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ $\Rightarrow$ $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
Bassatsen implicerar då att $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ bas, alltså får vi (a).

8. (i) Låt $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ och $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$ vara två baser i $\mathbb{R}^n$. Antag

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2 + \dots + s_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}_2' = s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2 + \dots + s_{n2}\bar{e}_n \\ \dots \\ \bar{e}_n' = s_{1n}\bar{e}_1 + s_{2n}\bar{e}_2 + \dots + s_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

Matrisen $S = [s_{ij}]$ är basbytematrisen.

Om $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n = x_1'\bar{e}_1' + \dots + x_n'\bar{e}_n'$ är koordinatframställningarna av vektorn $\bar{u}$ m.a.p. de två baserna, då gäller följande: $\boxed{X = SX'}$,
där $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

<u>Bevis:</u> $\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j' \bar{e}_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j'\right)\bar{e}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j'$, eftersom $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ är en bas.
Ekvivalent, $X = SX'$.

(ii) Om $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning, kan den uttryckas på matrisform som $Y = AX$ med avseende på basen $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, och som $Y' = A'X'$ med avseende på basen $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$.
Men $X = SX'$ och $Y = SY'$ implicerar att $SY' = ASX'$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Y' = S^{-1}ASX'$. Alltså är $\boxed{A' = S^{-1}AS}$, där S är basbytematrisen.