

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660, 12/01/2010, 14.00-18.00

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Anna Nyström, 0703-088304.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 30 poäng på del 1.

Del 1

1. (a) För vilka tal h är ekvationsystemmet nedan lösbart? (5p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 & = & -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + hx_3 - 3x_4 & = & 9 \end{cases}$$

- (b) Lös ekvationsystemmet ovan för $h = 3$. (3p)

2. (a) Hitta inversmatrisen till

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(6p)

- (b) Använd matrisen som du har räknat ut i uppgift (a) för att lösa ekvationsystemmet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = & -1 \\ x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

(2p)

3. (a) $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$ och $C = (1, 0, 1)$ är tre punkter i \mathbb{R}^3 . Hitta en ekvation för ett plan π som går genom punkterna A, B och C . (4p)
- (b) Hitta vinkel mellan planet π som du har hittat i uppgift (a) och XY -planet. (4p)
4. Polynomet $p(x) = x^3 + (1 - 2i)x^2 - (2 + 2i)x - 2$ har en reel rot. Hitta alla rötter av polynomet. (8p)
5. (a) Välj ett av största (i antal) system av linjärt oberoende vektorer från

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(6p)

- (b) Om man tar systemet som du har valt i uppgift (a) som en bas, vilka blir koordinater av resterande vektor(er) i den nya basen? (2p)

Del 2

6. Formulera och bevisa transponeringsregeln för matrisprodukt. (10p)
7. Formulera och bevisa Cramers regel för ekvationsystem med tre ekvationer och tre variabler. (10p)
8. I komplexa planet punkten 1 roteras kring origo i positive riktning med vinkel $\pi/3$ samma punkt 1 roteras kring i i negativ riktning med vinkel $\pi/4$. Beskriv två resulterande punkter som komplexa tal och beräkna avståndet mellan dem (svaret ska vara ett reel tal). (10p)
9. En professor har skrivit på tavlan exempel av matrismultiplication $A \cdot B = C$. Under rasten har en av studenterna suddat del av talen i matriserna B och C . Nu står det på tavlan

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ * & * & * & * \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & * & * & 2 \\ -1 & * & * & 4 \\ -2 & * & * & 3 \\ -2 & * & * & 5 \end{pmatrix}.$$

Går det att sätta in talen på tomma plats så att likheten blir rätt? (Om "ja" visa ett exempel, om "nej" förklara varför). Är lösningen entydlig? (10p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

Maria