TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2006-01-12, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Marcus Better, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på parametern λ det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 - x_2 + \lambda x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 &= 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{cases}. \quad (6p)$$

2. Givet är de tre räta linjerna

$$l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$l_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad s, t, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm punkter A på l_1, B på l_2 och C på l_3 så att A, B, C ligger på en rät linje och B är mittpunkt på sträckan AC. (3p)

(b) Beräkna arean av triangeln $\triangle ACD$, där D är B:s ortogonalprojektion på linjen l_1. (5p)

3. Ekvationen

$$z^6 + 3z^4 - 3z^2 + 4 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Visa att punkterna $(-2, 12), (-1, 5), (0, 3), (1, 2), (2, 4)$ ej ligger på grafen till någon andragradsfunktion $y = ax^2 + bx + c$. Bestäm den bästa anpassningen i minsta kvadratmening av en sådan funktion till punkterna ovan. (6p)

5. Bestäm alla λ för vilka vektorerna $u_1 = (\lambda+1, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$, $u_2 = (\lambda, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda, \ldots, \lambda)$, $u_3 = (\lambda, \lambda, \lambda + \frac{1}{3}, \ldots, \lambda)$, $\ldots$, $u_n = (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda + \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende. (5p) För alla övriga λ, uttryck $(1, 1, \ldots, 1)$ i basen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. (4p)

6. Låt $z = a + iy$, där $a \neq 0$ är ett fixt reellt tal. Visa att det finns en cirkel med medelpunkt i $\frac{1}{2a}$ sådan att $\frac{1}{z}$ ligger på den cirkeln för alla $y \in \mathbb{R}$ och bestäm cirkelns radie. (8p)

7. Redogör för den geometriska tolkningen av skalär trippelprodukt. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om att icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter förekommer i komplexkonjugerade par. (6p) Visa att polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradsfaktorer, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen. (2p)

/JM