

CO-FAKTOR UTVECKLING

Lemma 1. Om i matrisen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ alla tal i första rad utom det första är noll, so gäller co-faktor utveckling för första raden, d.v.s. $\det(A) = a_{11}\det(A_{11})$, där $A_{11} = (a_{ij})_{i,j=2}^{n,n}$.

Bevis. Om vi betraktar definition av determinant, så ser vi att alla produkter i summan har ngon element från första rad. Alltså om den element är inte a_{11} , såär den noll (och då är hela produkten noll). Så gäller $\det(A) = \sum_{\tau, \tau(1)=1} \sigma(\tau)a_{11}a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}$.

Om vi nu för varje permutation τ som börjas på 1 inför en permutation τ' av $(n-1)$ tal, genom att ta bort första tal, och minska varje tal i permutationen med ett, så ser vi att $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$ och $\det(A) = \sum_{\tau'} \sigma(\tau')a_{11}a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = a_{11}\det(A_{11})$. \square

Lemma 2. Om i en matris A alla tal i första rad är lika med noll, utom ett, så gäller co-faktor utveckling för första rad.

Bevis. Låt oss bevisa lemman med induktion i nummer av kolonn j i vilken i första rad står icke-noll talet. Basen är $j = 1$, och det är förra lemma. Om vi kan bevisa för $j = k$, och vi vill visa det för $j = k + 1$, så kan vi betrakta matris B som man får från A genom att byta plats på kolonnerna k och $(k + 1)$. Vi vet att $\det(A) = -\det(B)$. För B kan vi använda induktionens antagande, så $\det(B) = b_{1k}(-1)^{k+1}\det(B_{1k})$. Nu $B_{1k} = A_{a(k+1)}$, och $b_{1k} = a_{1(k+1)}$ såvi ser att $\det(A) = -a_{1(k+1)}(-1)^{k+1}\det(A_{1(k+1)}) = a_{1(k+1)}(-1)^{k+2}\det(A_{1(k+1)})$, d.v.s. co-faktor utvecklingen gäller för A . Genom induktionprincipen lemman är bevisat. \square

Nu vi kan använda oss från följande egenskap hos determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Man kan inse det genom att skriva definition för vänstersida, öppna paranteser och omgruppera summatermer.)

Nu,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + 0 & 0 + a_{12} & \dots & 0 + a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots \\ & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{(n-1)2} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + \dots + a_{1n}C_{1n}. \end{aligned}$$

2

Att visa att co-faktor utveckling gäller alla rader kan man på samma sätt på vilket vi visade Lemma 2.