MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Functional Analysis, TMA401/MMA400, 2008-08-30 (8.30-13.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Ida Säfström, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt (bonuspoäng inkluderade).

---

1. Prove uniqueness and existence of solutions to the following BVP:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda \cos(u(x^2)) = u(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

Here λ is a real number with $|\lambda|$ small enough. Give an estimate on $\lambda_0 > 0$ such that the BVP has a unique solution for all $|\lambda| < \lambda_0$.

(4p)

2. Calculate A^* and $\|A\|$ for the operator A on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (\sin x - \sin y) f(y)\, dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

(4p)

3. Consider the equation

$$f(x,y) = 1 + \int_0^x \left(\int_0^y f(u,v)\, du\right) dv, \quad 0 \le x, y \le 1.$$

Show that

(a) there exists at most one continuous solution f,
(b) there exists a continuous solution f.

(4p)

4. State and prove the Orthogonal Projection Theorem. Also the "Closest Point Property" theorem should be proved.

(5p)

5. Let A be a nonempty subset of a Hilbert space H. Show that $(A^{\perp})^{\perp}$ is the smallest closed subspace of H that contains A.

(4p)

6. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a bounded sequence in a Hilbert space H. Moreover let $A : H \to H$ be a bounded linear mapping. Show that if $(A^*Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ converges in H then also $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ converges in H.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter