20180417 Kom ihåg

Flerdim. kont. fördelningar (gemensamma)

Tal (X, Y) likf. förd. på $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$

a) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}$ $\quad (x,y) \in D$

$f_X(x) = \ldots = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \qquad -1 \le x \le 1$

$f_Y(y) = \ldots = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \qquad -1 \le y \le 1$

b) X, Y ej ober. //

Betingade fördelningar

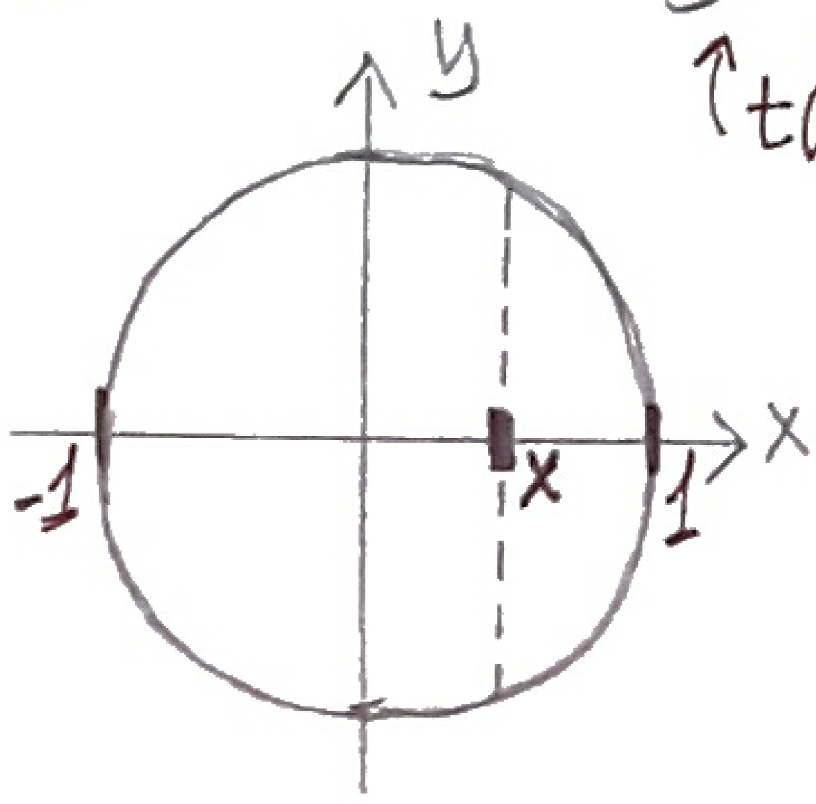
Def Vi def den betingade (fördelningen) tfkn för X givet $Y = y$ genom $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ om $f_Y(y) > 0$, & låter $f_{X|Y}(x|y) = 0$ om $f_Y(y) = 0$.

Anm: detta smakar som om vi betingar på händelsen $Y = y$ som har sanno. 0. Det är i själva verket inte vad vi gör då betingad sanno. ej är en del av vår def. Man säger dock att vi har den betingade tfkn givet $Y = y$.

Tal Bestäm $f_{Y|X}(y|x)$ om (X, Y) är som i sista uppg. ons 11/4. Tolka fördelningen.

L Vi har att $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1/\pi}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$,

för $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$ ↑täljaren & $-1 < x < 1$ ↑nämnaren



Vi ser att den bet. förd. för Y givet $X = x$ är uniform, ty beror ej på y. på intervallet $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ //

Från vår ursprungliga def. av gemensam tfkn, följer (med mkt pill) att

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{I((x,y)\in A)}\,f_{X,Y}(x,y)\,dxdy.$$

1 om $(x,y)\in A$, 0 annars
indikatorfunk.

Tal med (X,Y) som förut, bestäm $\mathbb{P}(X+Y\le 1)$

L Vi har att $\mathbb{P}(X+Y\le 1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I(x+y\le 1)\,f(x,y)\,dxdy$

$$=\iint_D I(x+y\le 1)\frac{1}{\pi}\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}I(x\le 1-y)\frac{1}{\pi}\,dxdy=\left\{\begin{array}{c}1-y^2=(1-y)(1+y)\ge(1-y)^2\\ \text{omm } 0\le y\le 1\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dxdy+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}2\sqrt{1-y^2}\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}1-y+\sqrt{1-y^2}\,dy=\ldots=\frac{2+3\pi}{4\pi}$$

Vi kan nu utöka definitionerna av väntevärden:

1) $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$, om (X,Y) kont. s.v.

2) $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\sum_{x_i}\sum_{y_j}g(x_i,y_j)\,\mathbb{P}(X=x_i;\,Y=y_j)$, om (X,Y) diskreta s.v.

Anm: $\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I((x,y)\in A)\,f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\mathbb{E}[I((X,Y)\in A)]$

Sats Om X, Y ober. gäller att $\mathbb{E}[g(X)h(Y)]=\mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$ $\forall g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Bevis 1) (X,Y) kont.

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)h(y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\{\text{ober. } f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)h(y)f_Y(y)\,dydx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}h(y)f_Y(y)\,dy=$$

$$=\mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$$ ∎

2) övning

Kovarians & Korrelation

Def kovariansen av s.v. X, Y def som

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$$

korrelationskoeff. $\rho(X,Y)$ def. som

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Anm: 1) ρ är dimensionslös (normerad)

2) Om X, Y är ober. gäller att $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$ $\overset{\text{ober.}}{=} \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X]]\,\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]] = 0.$

Dessutom blir $\rho(X,Y)=0.$

Naturlig fråga: om $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ är då X, Y ober?

Svar: Nej!

Ex: låt $X \sim N(0,1)$ & låt $w \in \{-1,1\}$ med sanno. $1/2$ vardera.

låt också X, w vara ober. & sätt $Y = wX$.

Vi har att $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] =$

$= \{\mathbb{E}[X]=0 \text{ ok}, \mathbb{E}[Y]=0 \text{ övn.}\} = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[wX^2] =$

$= \mathbb{E}[w]\,\mathbb{E}[X^2] = 0$ ty $\mathbb{E}[w] = 1\cdot 1/2 + (-1)\cdot 1/2 = 0$

Är X, Y ober?

Vi har att $|X| = |Y|$ s.a. $P(|X|\geq 2, |Y|\leq 1) = 0 \neq P(|X|\geq 2)P(|Y|\leq 1)$

Sats För 2 s.v. X, Y gäller

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Bevis

$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 +$
$+ 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ ∎

Anm: Om X, Y ober. $\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

OBS! $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ kräver ej ober!

Sats i) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

ii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad Cov(aX, Y) = a\, Cov(X, Y)$

iii) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$

iv) $Cov(X, X) = Var(X)$

v) $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

20180418 Kom ihåg
$$Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
&
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

Sats $-1 \leq \rho \leq 1$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$
$$\Rightarrow Var(X-Y) = Var(X) + Var(-Y) + 2Cov(X,-Y) = Var(X) + (-1)^2 Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$
OBS! Om X, Y är ober. $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$ ty $Cov(X,Y)=0$

Bevis Låt $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$.

Vi har $0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) + Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right) - 2Cov\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2} Var(X) + \frac{1}{\sigma_Y^2} Var(Y) - 2\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 1 + 1 - 2\rho = 2(1-\rho)$$

$\Rightarrow \rho \leq 1$

p.s.s. $0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \ldots = 2(1+\rho) \Rightarrow \rho \geq -1$ ∎

Betingade Väntevärden

Def det betingade väntevärdet av X givet $Y=y$ ges av

1) $E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$ om (X,Y) är kont. s.v.

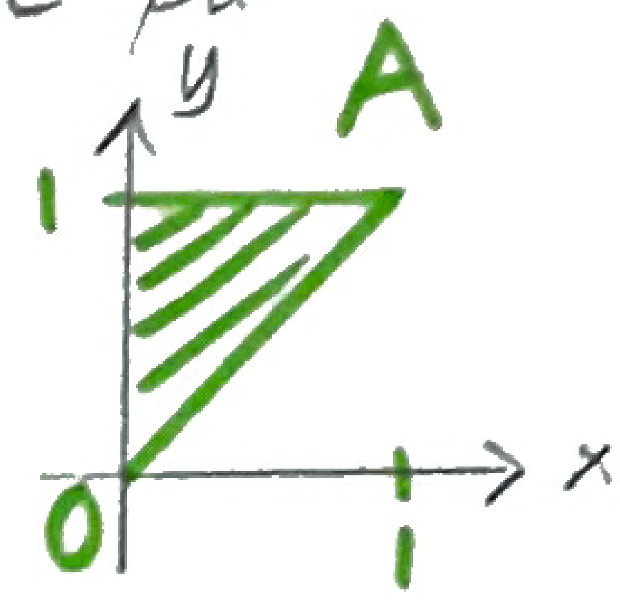
$E[g(X) \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)\, dx$

2) $E[X \mid Y=y_j] = \sum_{x_i} x_i\, p_{X|Y}(x_i|y_j)$ om (X,Y) är diskreta s.v.

$E[g(X) \mid Y=y_j] = \sum_{x_i} g(x_i)\, p_{X|Y}(x_i|y_j)$

Anm: Om (X,Y) diskreta så är $E[X \mid Y=y]=0$ om $P(Y=y)=0$

Tal låt (X, Y) vara likf. fördelade på
$A = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$.



Beräkna $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ $\forall y \in [0,1]$

L Då $|A| = \text{arean}(A) = 1/2$, så är
$f_{X,Y}(x,y) = 2 \quad \forall (x,y) \in A$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2y \qquad 0 \le y \le 1$$

Därför blir $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{2}{2y} = \dfrac{1}{y}$ $\quad 0 \le y \le 1$ & $0 \le x \le y$

Vi får att

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^y \frac{x}{y}\,dx = \frac{y}{2} \quad \text{om } 0 \le y \le 1$$

(& $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = 0$ annars) //

Observera att $\mathbb{E}[X \mid Y]$ är den funk. av s.v. Y som antar värdet $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ om $Y = y$. Då $\mathbb{E}[X \mid Y]$ är en funk. av Y är även $\mathbb{E}[X \mid Y]$ en s.v.

Sats Vi har att $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X]$.

Bevis (kont. fallet)

Vi har att $\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y)\,dy$, så

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X \mid Y = y] f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx\, f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X] \quad \blacksquare$$

Anm: 1) Satsen kallas ibland för LTE = Low of Total Expectation

2) Vårt tal ger $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y = y]] = \int_0^1 y/2 \cdot 2y\,dy = 1/3$ //

3) I detta fall är $\mathbb{E}[X \mid Y] = \dfrac{Y}{2}$

Olikheter

Sats För alla s.v. X & $a>0$, gäller att

$$\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a} \leftarrow \text{Markov's olikhet}$$

Bevis Låt X vara kont. $\mathbb{E}[|X|]\geq \mathbb{E}[I(|X|\geq a)|X|]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x|I(|x|\geq a)f_X(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} a I(|x|\geq a)f_X(x)\,dx = a\int_a^{\infty} f_X(x)\,dx + a\int_{-\infty}^{-a} f_X(x)\,dx =$$

$$= a\mathbb{P}(X\geq a)+a\mathbb{P}(X\leq -a) = a\mathbb{P}(|X|\geq a)$$

Diskreta fallet p.s.s. $\blacksquare$

Sats Låt X vara en s.v. med $Var(X)<\infty$. Vi har att $\forall a>0$,

$$\text{Chebyshev's olikhet} \rightarrow \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq a)\leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Bevis Vi har att $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq a)=\mathbb{P}((X-\mathbb{E}[X])^2\geq a^2)\leq$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2} \quad \blacksquare$$

Tal låt $X\sim Bin(n,1/4)$. Hitta övre begr. till $\mathbb{P}(X\geq n/2)$ mha

a) Markov's olikhet b) Chebyshev's olikhet

L a) $\mathbb{P}(X\geq n/2)\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} = \frac{n/4}{n/2} = \frac{1}{2}$

b) $\mathbb{P}(X\geq n/2) = \mathbb{P}(X-n/4\geq n/4)\leq \mathbb{P}(|X-\frac{n}{4}|\geq \frac{n}{4})\leq \frac{Var(X)}{(n/4)^2}$

$= \frac{n\cdot 1/4\cdot 3/4}{n^2/16} = \frac{3}{n}$ //

Anm: $\frac{3}{n} \ll \frac{1}{2}$ om n stort, men i själva verket kan vi göra mkt bättre

---

~~Sats~~ Stora Talens Lag, STL, LLN

Def en sekvens av s.v. $X_1, X_2, \ldots$ som är <u>ober. & lika-fördelade</u> kallas för en i.i.d. (independent and identically distributed) sekvens.

Tag en iid sekvens $X_1, X_2, \dots$ med $\mu = \mathbb{E}[X_k]$ & $\sigma^2 = Var(X_k) < \infty$. Bilda medelvärdet av den första

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$ Vad tror ni om $\bar{X}_n$?

Sats (STL)

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara en iid sekvens med $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1) < \infty$. För varje $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

Bevis

Observera att $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu = \mu$.

Vi får att $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| \geq \varepsilon) \underset{\text{Cheby.}}{\leq} \frac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} =$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2} Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \underset{\text{ober.}}{=} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\blacksquare$

20180418 Räkneövning 4

3.9 marginaltäthet & betingad täthet.

4.46 & 4.67 räkneregler för väntevärde, varians, kovarians & korrelation.

4.88 momentgenererande funktioner.

3.9 (X,Y) är uniformt fördelad över regionen $0 \le y \le 1-x^2,\ -1 \le x \le 1$.

a) Ange marginaltätheterna för X & Y.

L uniform förd $\Rightarrow f(x,y) = c,\quad c = \frac{1}{V},\ V =$ regionens volym

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{3}{4}$ om (x,y) är i regionen, 0 annars.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1-x^2} \frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{4}(1-x^2) \quad \text{om } -1 \le x \le 1$$

$$y \le 1-x^2 \iff x^2 \le 1-y \iff -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}$$

$$f(y) = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{1-y} \quad \text{om } y \le 1-x^2$$

$$f(y) \ne f(x)$$

b) Ange de betingade tätheterna för X & Y

L $$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{3/4}{\frac{3}{2}\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \quad \text{om } (x,y) \text{ i regionen.}$$

$$f(y|x) = \frac{3/4}{\frac{3}{4}(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{om } (x,y) \text{ i regionen}$$

4.46 U, V ober. med väntevärde μ & varians σ^2

$Z = \alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\,V$. Ange $E(Z)$ & ρ_{UZ}

L $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\, V) = \alpha E(U) + \sqrt{1-\alpha^2}\, E(V) =$

$= \alpha\mu + \sqrt{1-\alpha^2}\,\mu = \mu(\alpha + \sqrt{1-\alpha^2})$

$$\rho_{UZ} = \frac{Cov(U,Z)}{\sqrt{Var(U)Var(Z)}}$$

$Var(Z) = Var(\alpha U) + Var(\sqrt{1-\alpha^2}\, V) = \alpha^2\sigma^2 + (1-\alpha^2)\,\sigma^2 = \sigma^2$

$Cov(U,Z) = Cov(U, \alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\, V) = Cov(U, \alpha U) - Cov(U, \sqrt{1-\alpha^2}\, V) =$

$= \alpha\, Cov(U,U) + \sqrt{1-\alpha^2})\, Cov(U,V) = \alpha\, Var(U) = \alpha\sigma^2$

$$\rho_{UZ} = \frac{\alpha\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2\sigma^2}} = \alpha.$$

4.67 en "stokastisk rektangel" kan konstrueras enligt följande: 1) låt $X \sim U[0,1]$

2) givet X, $Y \sim U[0, X]$

X & Y är längden på rektangelns sidor.

Använd lagen om totalt väntevärde ($\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$) för att ange väntevärdet för rektangelns omkrets & yta.

L Omkrets: $\mathbb{E}(2X + 2Y) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2E(Y)$

$E(Y) = E(E(Y|X)) = E(X/2) = \frac{1}{2} E(X) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow E(2X + 2Y) = 1 + 1/2 = 3/2$

Yta: $E(XY) = \mathbb{E}(E(XY|X)) = E(X\, E(Y|X)) = E(X \frac{X}{2}) = \frac{1}{2} E(X^2) =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

alt. L $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Leftrightarrow E(X^2) = Var(X) + E(X)^2$

$= \frac{1}{2}(Var(X) + E(X)^2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$

4.88 låt $X \sim N(0, \sigma^2)$ & använd mgf för att ta fram momentan för X.

L mgf: $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

$M'(0) = \mathbb{E}(X)$

$M''(0) = \mathbb{E}(X^2)$

$M^{(3)}(0) = \mathbb{E}(X^3)$ osv.

tfkn: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2t\sigma^2)} dx$$

$$\left[\quad x^2 - 2t\sigma^2 = (x - t\sigma^2)^2 - t^2\sigma^4, \ \text{låt } u = x - t\sigma^2 \quad \right]$$

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\sigma^2 (u^2 - t^2\sigma^4)} du = \frac{e^{\frac{t^2\sigma^4}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = e^{\frac{t^2\sigma^4}{2}}$$

$M'(t) = t\sigma^2 M(t) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = M'(0) = 0$

$M''(t) = \sigma^2 M(t) + t^2\sigma^4 M(t) \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = M''(0) = \sigma^2$

$M^{(3)}(t) = 3t\sigma^4 M(t) + t^3\sigma^6 M(t) \Rightarrow \mathbb{E}(X^3) = 0$

$M^{(4)}(0) = \mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$